Giuseppe Tallini

<u>Dimensioni negli spazi geometrici</u>

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini

n.115,Febbraio 1994

Dimensioni negli spazi geometrici.

Giuseppe Tallini,
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma
"La Sapienza".
Piazzale A. Moro 2, 00185 Roma.

1 Introduzione

Sia $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ uno spazio geometrico (cioè $\mathbf{S}$ è un insieme non vuoto i cui elementi si dicono punti e $\mathbf{C}$ è una famiglia non vuota di parti di $\mathbf{S}$ i cui elementi prendono nomi diversi a seconda dei casi). Un automorfismo di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ è una biezione di $\mathbf{S}$ che muta, insieme all'inversa, elementi di $\mathbf{C}$ in elementi di $\mathbf{C}$. L'insieme degli automorfismi, rispetto al prodotto operatorio, è un gruppo, $Aut(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Esso permette di definire un criterio di uguaglianza tra le "figure" (cioè i sottonsiemi) di $\mathbf{S}$: due figure sono "uguali" se esiste un automorfismo di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ che muta l'una nell'altra. Nasce così una geometria in $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$: lo studio delle proprietà delle figure invarianti rispetto ad $Aut(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ (cfr.[2]). Per esempio se $\mathbf{S} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{C}$ è l'insieme delle circonferenze di raggio uno si ottiene la geometria euclidea del piano (perché si può provare che una biezione di $\mathbb{R}^2$ che muta circonferenze di raggio uno in circonferenze di raggio uno è un movimento).

Se $\mathbf{S}$ è finito ed $m = |\mathbf{S}|$, la nozione di spazio geometrico equivale a quella di codice binario di $\mathbb{Z}_2^m$. Infatti, ordinati i punti di $\mathbf{S}$, se $X \subseteq \mathbf{S}$ sia $\chi(X)$ il vettore caratteristico di X. L'applicazione:

$$\chi : X \in \mathbf{P}(\mathbf{S}) \to \chi(X) \in \mathbb{Z}_2^m$$

è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali $(\mathbf{P}(\mathbf{S}), \triangle, ., \mathbb{Z}_2)$ e $\mathbb{Z}_2^m$. Allora allo spazio geometrico $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ rimane associato il codice binario $\chi(\mathbf{C})$ e viceversa. Il gruppo $Aut(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ si riflette nel gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Z}_2^m$ che conservano il peso dei vettori e mutano $\chi(\mathbf{C})$ in sé . In questo Lavoro ci occuperemo delle varie nozioni di dimensioni che si possono dare per uno spazio geometrico, in particolare per un codice binario.

Sia $X \subseteq \mathbf{S}$, porremo:

$$\mathbf{C}(X) \quad = \quad \{X \cap C : C \in \mathbf{C}\}. \tag{1.1}$$

Diremo che X è *frantumato* da $\mathbf{C}$ se $\mathbf{C}(X)$ risulta *l'insieme delle parti* di X, $\mathbf{P}(X)$, cioè :

$$X \subseteq \mathbf{S} \quad frantumato \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{C}(X) = \mathbf{P}(X). \tag{1.2}$$

Denoteremo con $\mathbf{F}(\mathbf{C})$ la famiglia dei frantumati di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Evidentemente si ha:

$$X \in \mathbf{F}(\mathbf{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall Y \subseteq X \Longrightarrow \exists C \in \mathbf{C} : Y = C \cap X], \tag{1.3}$$

$$X \in \mathbf{F}(\mathbf{C}) \quad \Longrightarrow \quad [\forall Y \subseteq X \Longrightarrow Y \in \mathbf{F}(\mathbf{C})], \tag{1.4}$$

$$\emptyset \in \mathbf{F}(\mathbf{C}), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{C}) \neq \emptyset, \tag{1.5}$$

$$|\mathbf{C}| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{C}) = \{\emptyset\}. \tag{1.6}$$

Proviamo che:

Teorema 1.1 *Se* $\mathbf{C}$ *è finito, per ogni* $X \in \mathbf{F}(\mathbf{C})$ *si ha:*

$$|X| \quad \leq \quad log_2|\mathbf{C}|. \tag{1.7}$$

Se ne deduce che esistono massimali in $(\mathbf{F}(\mathbf{C}), \subseteq)$, *ogni massimale è finito e ha cardinalità* $\leq log_2|\mathbf{C}|$.

Dimostrazione: Per ogni $Y \subseteq X$ esiste $C(Y) \in \mathbf{C}$ tale che $C(Y) \cap X = Y$ per la (1.3). Ma allora se $Y' \subseteq X$ è diverso da Y sarà $C(Y) \neq C(Y')$ e quindi X è finito, essendo $\mathbf{C}$ finito. Sia $r = |X|$, ogni s-pla Y di punti di X individua almeno un $C(Y) \in \mathbf{C}$ tale che $C(Y) \cap X = Y$ ed s-ple diverse individuano elementi di $\mathbf{C}$ diversi, ne segue che:

$$|\mathbf{C}| \quad \geq \quad \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} = 2^r,$$

onde l'asserto.

Osserviamo che se $\mathbf{C}$ è infinito in $(\mathbf{F}(\mathbf{C}), \subseteq)$ possono non esistere massimali, come mostra il seguente:

ESEMPIO 1.- Sia $\mathbf{S} = \mathbb{R}$ e $\mathbf{C}$ la famiglia dei chiusi della topologia naturale di $\mathbb{R}$. Si prova subito che $X \subseteq \mathbb{R}$ è frantumato da $\mathbf{C}$ se, e solamente se, ogni suo punto è isolato (cfr. (1.3)). Ne segue che ogni $X \in \mathbf{F}(\mathbf{C})$ non è massimale, perché , se $y \in \mathbb{R} - X$ l'insieme $X \cup \{y\}$ è frantumato e contiene X.

Diremo (cfr.[1]) che $\mathbf{C}$ ha VC-dimensione n ($< \infty$) se n è il più piccolo valore di k tale che esista qualche insieme di cardinalità k che non è frantumato da $\mathbf{C}$. Altrimenti diremo che $\mathbf{C}$ ha VC-dimensione infinita. Tale nozione è stata introdotta da Vapnik e Chervonenkis nel

1971. Faremo qualche esempio. Se $\mathbf{C}$ è la famiglia dei sottospazi di uno spazio vettoriale, la VC-dimensione di $\mathbf{C}$ è $n = 1$ (perché $\{0\}$ non è frantumato da $\mathbf{C}$). Se $\mathbf{C}$ è la famiglia dei sottospazi di uno spazio proiettivo qualsiasi, la VC-dimensione di $\mathbf{C}$ è $n = 3$ (perché ogni punto è frantumato da $\mathbf{C}$ e così ogni coppia di punti, mentre una terna di punti allineati non è frantumato da $\mathbf{C}$). Se $\mathbf{C}$ è la famiglia degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ la VC-dimensione di $\mathbf{C}$ è $n = 3$. Nell'Esempio 1 precedente la VC-dimensione di $\mathbf{C}$ è infinita. Dagli esempi precedenti degli spazi vettoriali e degli spazi proiettivi si desume che la nozione di VC-dimensione è molto lontana da quella classica. Daremo ora una definizione di dimensione per un qualsiasi spazio geometrico $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ più aderente a quella classica e che si riduce ad essa nel caso degli spazi vettoriali e degli spazi proiettivi.

Supponiamo che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ soddisfi alla seguente condizione:

$$\exists L \in \mathbb{N} : \quad \forall X \in \mathbf{F}(\mathbf{C}), \quad |X| \leq L, \tag{1.8}$$

come accade se $\mathbf{C}$ è finito, cfr. Teorema 1.1. Allora esistono i massimali in $(\mathbf{F}(\mathbf{C}), \subseteq)$ ed hanno tutti cardinalità finita limitata superiormente da L. Chiameremo *rango* di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ la massima cardinalità , R, di un massimale di $(\mathbf{F}(\mathbf{C}), \subseteq)$, *dimensione lineare* di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ l'intero δ uguale ad R se $\bigcap_{C \in \mathbf{C}} C \neq \emptyset$, uguale a $R - 1$ se $\bigcap_{C \in \mathbf{C}} C = \emptyset$. Se non è verificata la (1.8) diremo che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha rango e dimensione lineare infinita. Si ha evidentemente che:

$$VCdim(\mathbf{S}, \mathbf{C}) \quad \leq \quad 1 + R(\mathbf{S}, \mathbf{C}). \tag{1.9}$$

Se $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ risulta uno spazio vettoriale o proiettivo ovvero affine rispetto ai loro sottospazi la nozione di insieme frantumato coincide, come subito si prova, con quella di insieme indipendente e quindi la nozione di rango e di dimensione lineare su data coincide con quella classica. In tali casi nella (1.9) non vale in generale il segno di uguaglianza. Diamo un esempio in cui nella (1.9) vale il segno di uguaglianza. Sia $\mathbf{S} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{C}$ la famiglia $\mathcal{R}$ delle rette di $\mathbb{R}^2$, allora ogni coppia di punti è frantumata mentre ogni terna di punti non è frantumata, quindi VC-dim$(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$=3 e $R(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$=2, onde nella (1.9) vale il segno di uguaglianza. Nel seguito esamineremo il caso che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ sia uno spazio di chiusura, introdurremo quattro nozioni di dimensioni (una delle quali coincide con quella di dimensione lineare su data), ne esamineremo le proprietà e proveremo tra l'altro che esse coincidono se, e solamente se, $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ è matroidale, cioè soddisfa l'assioma dello scambio.

2 Dimensioni in spazi di chiusura.

Sia $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ uno *spazio di chiusura*, cioè $\mathbf{S} \in \mathbf{C}$ e l'intersezione di elementi di $\mathbf{C}$ è un elemento di $\mathbf{C}$. Gli elementi di $\mathbf{C}$ prendono il nome di *chiusi* e $\mathbf{C}$ chiamasi *sistema di chiusura*. Se $X \subseteq \mathbf{S}$, chiameremo *chiusura* di X l'intersezione di tutti i chiusi contenenti X. Esso è un chiuso che denotasi con $\overline{X}$. In $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ si può allora introdurre la nozione di insieme

X *indipendente* (se $\forall x \in X$ si ha: $x \notin \overline{X - \{x\}}$), *dipendente*, *generatore* (se $\overline{X} = \mathbf{S}$), *base* (se $\overline{X} = \mathbf{S}$ e X è indipendente). Proviamo che:

$$X \subseteq \mathbf{S}, \quad X \quad \textit{frantumato} \quad \Longleftrightarrow \quad X \quad \textit{indipendente}. \qquad (2.10)$$

Dimostrazione: Se X è frantumato, per ogni $x \in X$ esiste un $C \in \mathbf{C}$ tale che $(X - x) = C \cap X$ (cfr. (1.3)), ma allora $x \notin C$ e quindi $x \notin \overline{X - \{x\}} (\subseteq C)$, onde X è indipendente. Se X è indipendente, sia Y un qualsiasi sottoinsieme di X; per ogni $x \in X - Y$, sia $C(x) = \overline{X - \{x\}}$; si ha $x \notin C(x)$ e quindi:

$$C = \bigcap_{x \in X - Y} C(x) \in \mathbf{C}, \quad [\forall x \in X - Y \Longrightarrow x \notin C] \quad \Longrightarrow \quad Y = C \cap X,$$

onde, per la (1.3), X è frantumato. Si è così provato la (2.10).

Per $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ due casi sono possibili:

$$(I) \quad \textit{caso} \qquad \bigcap_{C \in \mathbf{C}} C \neq \emptyset, \qquad \textit{ossia} \quad \emptyset \notin \mathbf{C},$$

$$(II) \quad \textit{caso} \qquad \bigcap_{C \in \mathbf{C}} C = \emptyset, \qquad \textit{ossia} \quad \emptyset \in \mathbf{C}.$$

Chiameremo *catena* di lunghezza n di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ una n-pla $(C_1, C_2, ..., C_n)$ di chiusi tale che:

$$C_1 \neq \emptyset, \quad C_i \subseteq C_{i+1}, \quad C_i \neq C_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1. \qquad (2.11)$$

Una catena la diremo *satura* o *massimale* se non è contenuta propriamente in un'altra catena. Se $(C_1, C_2, ..., C_n)$ è satura allora: nel (I) caso $S_1 = \overline{\emptyset}$, mentre nel (II) caso S_1 è un chiuso *monico* ossia che non contiene propriamente altri chiusi non vuoti cioè è un atomo del reticolo $(\mathbf{C}, \subseteq)$, inoltre in ogni caso $C_n = \mathbf{S}$ e C_{i+1} *copre* C_i per $i = 1, 2, ..., n-1$. Viceversa se sono verificate le suddette proprietà la catena $(C_1, C_2, ..., C_n)$ risulta satura.

Diremo che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha *dimensione* d se ogni catena di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha lunghezza $\leq d+1$ ed esiste qualche catena di lunghezza $d+1$. Diremo che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha *dimensione infinita* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste qualche catena di lunghezza n. Osserviamo che denotato con N l'insieme degli interi che sono lunghezze di catene, due eventualità sono possibili a seconda che N sia limitato superiormente oppure no. Nella prima eventualità , detto $d+1$ il massimo di N, $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha dimensione d, nella seconda $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha dimensione infinita. Nel seguito supporremo sempre che $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ abbia dimensione finita d.

Se $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ha dimensione d ogni sua catena di lunghezza $d+1$ è evidentemente satura. Inoltre se $C \in \mathbf{C}$ (con $C \neq \emptyset$), poiché ogni catena di C (nella struttura di spazio di chiusura indotta) è anche una catena di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, si ha che C ha dimensione: $dim\ C \leq d$ e se $dim\ C = d$ allora $C = \mathbf{S}$. Se $C = \emptyset \in \mathbf{C}$, porremo $dim\ C = -1$. Rimane allora definita l'applicazione:

$$dim: \quad C \in \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad dimC \in \{0, 1, ..., d\}, \qquad (I) \quad caso, \tag{2.12}$$

$$dim: \quad C \in \mathbf{C} \quad \rightarrow \quad dimC \in \{-1, 0, 1, ..., d\}, \qquad (II) \quad caso. \tag{2.13}$$

Proviamo che:

Teorema 2.1 *Le applicazioni (2.12), (2. 13) sono surgettive.*

Dimostrazione: Sia $(C_0, C_1, ..., C_d)$ una catena di lunghezza $d+1$ di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Essa allora è satura e $C_0 = \overline{\emptyset}$ nel caso (I), C_0 è monico nel caso (II); quindi in ogni caso $dim\ C_0 = 0$, inoltre nel caso (II) $dim\ \emptyset = -1$. Proviamo che $dim\ C_i = i$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., d\}$, ne seguirà l'asserto. Si ha :

$$i \leq dimC_i, \tag{2.14}$$

perché in C_i la catena $(C_0, C_1, ..., C_i)$ ha lunghezza $i + 1$. Sia $n = dimC_i$. Se fosse $n \geq i + 1$, in C_i vi sarebbe una catena satura di lunghezza $n + 1 \geq i + 2$, sia essa $(T_0, T_1, ..., T_{n-1}, T_n = C_i)$, ma allora la catena $(T_0, T_1, ..., T_{n-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_d)$ di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ avrebbe lunghezza $d-i+1+n \geq d + 2$ e ciò è escluso. Dunque $dim\ C_i \leq i$. Da (2.14) si ha allora $dim\ C_i = i$, ne segue l'asserto.

Da quanto precede si ha che, per ogni $C, C' \in \mathbf{C}$:

$$C \subseteq C' \Rightarrow [dimC \leq dimC'; \quad dimC = dimC' \iff C = C']. \tag{2.15}$$

Sia $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ un spazio di chiusura di dimensione d. Denoteremo con d_m e d_M gli interi tali che $d_m + 1$ e $d_M + 1$ siano rispettivamente la minima e la massima lunghezza di una catena satura di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, onde $d_M = d$. Chiameremo d_m e $d_M = d$ *dimensioni geometriche* minima e massima di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$.

Sia $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un indipendente di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Si ponga:

$$C_i \quad = \quad \overline{\{x_1, x_2, ..., x_i\}}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Essendo X indipendente risulta: $C_i \subset C_{i+1}$, cioè $(C_1, C_2, ..., C_n)$ è una catena di lunghezza n di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, che diremo *associata* ad X. Ne segue che: $n \leq d+1$. Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I), tale catena certamente non è satura, in quanto $x_1 \notin \overline{\emptyset}$ e quindi $\overline{\emptyset} \subset C_1$, cioè C_1 non è monico. Se ne deduce che:

Teorema 2.2 *Ogni base B di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ è finita e ha cardinalità $|B| \leq d$ se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I), $|B| \leq d+1$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (caso II).*

Siano R_m e R_M rispettivamente la minima e la massima cardinalità di una base di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Chiameremo R_m e R_M minimo e massimo *rango* di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Per la (2.10) risulta $R = R_M$, ove R è il rango introdotto nel n.1. Dal Teorema precedente si ha che:

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad (caso \quad I): \qquad\qquad R_m \leq R_M \leq d \tag{2.16}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset \quad (caso \quad II): \qquad R_m \leq R_M \leq d+1. \tag{2.17}$$

Sia $(C_1, C_2, ..., C_n)$ una catena satura di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Si consideri l'insieme $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ definito da:

$$x_1 \in C_1, \quad x_i \in C_i - C_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Essendo $(C_1, C_2, ..., C_n)$ satura, sarà : $\overline{\{x_1\}} = C_1$, $\overline{\{x_1, x_2\}} = C_2$ [in quanto: $C_1 \subset \overline{\{x_1, x_2\}} \subseteq C_2$ ed C_2 copre C_1], $\overline{\{x_1, x_2, x_3\}} = C_3$ [in quanto: $C_2 \subset \overline{\{x_1, x_2, x_3\}} \subseteq C_3$ ed C_3 copre C_2]. Così procedendo induttivamente si ha che:

$$\overline{\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}} = C_n = \mathbf{S},$$

cioè $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ è un generatore di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, che diremo *associato* a $(C_1, C_2, ..., C_n)$. Sia $X = \{x_0, x_1, ..., x_{d_m}\}$ un generatore associato ad una catena satura di lunghezza $d_m + 1$. Esiste allora una base $B \subseteq X$ e quindi $|B| \leq d_m + 1$. Ne segue che:

$$R_m \quad \leq \quad d_m + 1 \quad \leq \quad d + 1. \tag{2.18}$$

Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I) ogni generatore $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ associato ad una qualsiasi catena satura $(C_1, C_2, ..., C_n)$ è certamente dipendente [perché $x_1 \in C_1 = \overline{\emptyset}$ e quindi $x_1 \in \overline{\{x_2, x_3, ..., x_n\}}$], onde se B è una base contenuta in X, sarà : $|B| < n$. Se ne deduce che:

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad R_m \quad \leq d_m \quad \leq d. \tag{2.19}$$

Porremo

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad (caso \quad I): \qquad \delta_m = R_m, \quad \delta_M = R_M, \tag{2.20}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset \quad (caso \quad II): \qquad \delta_m = R_m - 1, \quad \delta_M = R_M - 1. \tag{2.21}$$

Chiameremo δ_m e δ_M ***dimensioni lineari*** minima e massima di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Si ha $\delta = \delta_M$, ove δ è la dimensione lineare introdotta nel n.1. Dalle (2.20), (2.16), (2.19), (2.21), (2.17), (2.18) si ottiene in ogni caso:

$$\delta_m \quad \leq \quad \delta_M \quad \leq \quad d, \tag{2.22}$$

$$\delta_m \quad \leq \quad d_m \quad \leq d. \tag{2.23}$$

Evidentemente i ranghi, le dimensioni geometriche e lineari su introdotte si conservano per isomorfismi. Nel numero successivo esamineremo e caretterizzeremo completamente il caso in cui le quattro dimensioni geometriche e lineari coincidono.

3 *Spazi di chiusura per i quali* $\delta_m = d$.

Sia $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ un spazio di chiusura di dimensione d e sia C è un suo chiuso. Chiameremo catena *semisatura di origine* C una catena $(C, C_1, C_2, ..., C_n)$ tale che: C_1 copre C e, per ogni $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, C_{i+1} copre C_i. Evidentemente per ogni chiuso C esiste una catena semisatura di origine C. Denoteremo poi con $\delta_m(C)$, $\delta_M(C)$, $d_m(C)$, $d(C)$ le dimensioni lineari e geometriche del chiuso C. Evidentemente si ha:

$$C \quad monico \quad \Longrightarrow \quad \delta_m(C) = \delta_M(C) = d_m(C) = d(C) = 0. \tag{3.24}$$

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset, \quad d(C) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta_m(C) = \delta_M(C) = d_m(C) = d(C) = 1. \tag{3.25}$$

In questo numero studieremo e caratterizzeremo gli spazi di chiusura per i quali $\delta_m = d$, cioè tali che [cfr. (2.22), (2.23)]:

$$\delta_m \quad = \quad \delta_M \quad = \quad d_m \quad = \quad d. \tag{3.26}$$

Proviamo che:

Teorema 3.1 *Nell'ipotesi che valga la (3.26), data comunque una catena satura* $(C_0, C_1, ..., C_d)$ *di* $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$*, ogni* $X = \{x_0, x_1, .., x_d\}$ *associato a* $(C_0, C_1, ..., C_d)$ *(cfr.n.2) risulta una base se* $\overline{\emptyset} = \emptyset$*, mentre se* $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$*,* $X - \{x_0\}$ *è una base.*

<u>Dimostrazione</u>: La catena $(C_0, C_1, ..., C_d)$ è satura, quindi X è un generatore di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e X fosse dipendente esisterebbe una base $B \subset X$ con $|B| < d+1$, onde sarebbe $\delta_m < d$, ma ciò è escluso per la

(3 .26). Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$, si ha $C_0 = \overline{\emptyset}$ e quindi $x_0 \in \overline{X - \{x_0\}}$, onde $X - \{x_0\}$ è un generatore di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$; se $X - \{x_0\}$ fosse dipendente esisterebbe in $X - \{x_0\}$ una base B di cardinalià minore di $|X - \{x_0\}| = d$, quindi $\delta_m < d$, ma ciò è escluso per la (3.26). Si ha così l'asserto.

Proviamo ora che:

Teorema 3.2 *Se vale la (3.26) per ogni chiuso C di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ si ha:*

$$\delta_m(C) \quad = \quad \delta_M(C) \quad = \quad d_m(C) \quad = \quad d(C) \tag{3.27}$$

<u>Dimostrazione</u>: Sia C una qualsiasi chiuso di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ e sia

$$n = dim(C)$$

Esiste allora una catena di lunghezza $n+1$ in C, ivi satura, $(C_0, C_1, ..., C_n = C)$. Essa è contenuta in una catena satura di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, necessariamente di lunghezza $d + 1$, per la (3.26). Dunque esiste in $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ una catena semisatura di origine C data da $(C, C_{n+1}, ..., C_d)$ tale che: $(C_0, C_1, ..., C_n = C, C_{n+1}, ..., C_d)$ sia una catena satura di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Sia ora $(C'_0, C'_1, ..., C'_m = C)$ una qualsiasi catena satura di C. La catena $(C'_0, C'_1, ..., C'_m = C, C_{n+1}, ..., C_d)$ è satura in $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ ed ha lunghezza: $d + 1 - (n + 1) + (m + 1)$, onde per la (3.26) deve aversi: $d + 1 - (n + 1) + (m + 1) = d + 1$, cioè $n = m$. Ne segue che:

$$d_m(C) \quad = \quad d(C) \quad = \quad n. \tag{3.28}$$

Osserviamo che ogni $X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ..., x_d\}$ associato (cfr.n.2) alla catena satura $(C_0, C_1, ..., C_n = C, C_{n+1}, ..., C_d)$ di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, per il Teorema 3.1, è una base per $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre, se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$, allora

$\{x_1, ..., x_n, ..., x_d\}$ è una base. Dunque $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ è una base per C se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ è $\{x_1, ..., x_n\}$ una base per C. Quindi C ammette basi di cardinalità $n + 1 = d(C) + 1$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, ovvero basi di cardinalità $n = d(C)$ se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$.

Sia ora $B = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\}$ una qualsiasi base di C e sia $(T_0, T_1, T_2, ..., T_m = C)$ la catena ad essa associata (cfr. n.2), onde è $T_i = \overline{\{x_0, x_1, ..., x_i\}}$. Si consideri la catena di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ data da $(T_0, T_1, T_2, ..., T_m = C, C_{n+1}, ..., C_d)$. Essa è contenuta in una catena satura di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ (di lunghezza $d + 1$):

$$(C_0^*, C_1^*, C_2^*, ..., C_n^* = T_m = C, C_{n+1}, ..., C_d). \tag{3.29}$$

Si consideri un $Y = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_d\}$ associato alla catena (3.29), scelto in modo che

$$C_i^* = T_j, \quad j \leq i \quad \Longrightarrow \quad y_i = x_j.$$

Per il Teorema 3.1, $Y = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_d\}$ è una base se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ si ha che $\{y_1, y_2, ..., y_d\}$ è una base di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$, quindi $\{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}$ è una base se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ si ha che $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ è una base di C. Ma $B = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\} \subseteq \{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}$, onde se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ si ha $m + 1 = n + 1$ e quindi $\delta_m(C) = \delta_M(C) = n = d(C)$, se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ si ha $m + 1 = n$ e quindi $\delta_m(C) = \delta_M(C) = n = d(C)$. Si ha così l'asserto.

Consideriamo le seguenti proprietà che possono o non valere in un spazio di chiusura $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$:

$$(a) \qquad \delta_m = \delta_M = d_m = d,$$

$$(b) \qquad \forall C \in \mathbf{C}, \quad \forall x \in G - C \quad \Longrightarrow \quad dim(\overline{C \cup \{x\}}) = d(C) + 1,$$

$$(c) \qquad \forall C \in \mathbf{C}, \quad \forall x \in G - C \quad \Longrightarrow \quad \overline{C \cup \{x\}} \ \ copre \ \ C,$$

$$(\sigma) \qquad \forall X \subseteq \mathbf{S}, \forall x, y \in \mathbf{S} : x \notin \overline{X}, x \in \overline{X \cup y} \quad \Longrightarrow \quad y \in \overline{X \cup x}.$$

Mostreremo ora che esse sono equivalenti. Proviamo che:

$$(a) \quad \Longrightarrow \quad (b). \tag{3.30}$$

<u>Dimostrazione</u>: La (3.30) è evidente se $C = \emptyset$ (nel caso che: $\emptyset \in \mathbf{C}$). Supponiamo dunque $C \neq \emptyset$. Per il Teorema 3.2 vale la (3.27). Sia $n = d(C)$ e sia $x \in \mathbf{S} - C$. Per la (3.27) ogni base di C è costituita da $n+1$ elementi se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, da n elementi se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. Supposto che $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (in modo analogo si procede se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$), sia $B = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una base di C. Si consideri il chiuso $C' = \overline{C \cup \{x\}}$. Esso ammette come generatore l'insieme $X = \{x, x_0, x_1, ..., x_n\}$ costituito da $n+2$ elementi. Ne segue che C' ammette una base B' ($\subseteq X$) con $|B'| \leq n+2$. Ma allora per la (3.27), $d(C') \leq n+1$. Daltra parte $d(C') > n$, onde: $d(C') = n+1$, cioè : $dim(\overline{C \cup \{x\}}) = n + 1 = d(C) + 1$. Si ha così l'asserto.

$$(b) \quad \Longrightarrow \quad (c). \tag{3.31}$$

<u>Dimostrazione</u>: Per ogni $C \in \mathbf{C}$ e per ogni $x \in \mathbf{S} - C$, se esistesse $T \in \mathbf{C}$ con $C \subset T \subset C' = \overline{C \cup \{x\}}$, si avrebbe $d(C) < d(T) < d(C')$ e quindi sarebbe $d(C') \geq d(C) + 2$, mentre per la (b) risulta $d(C') = d(C) + 1$, onde l'asserto.

$$(c) \quad \Longrightarrow \quad (\sigma). \tag{3.32}$$

Dimostrazione: Osserviamo che, come subito si prova, la (σ) equivale alla seguente proprietà :

$$\forall C \in \mathbf{C}, \forall x, y \in \mathbf{S} : x \notin C, x \in \overline{C \cup \{y\}} \implies y \in \overline{C \cup \{x\}}. \tag{3.33}$$

Dalla (c) si ha:

$$\forall C \in \mathbf{C}, \forall x, y \in \mathbf{S} : x \notin C, x \in \overline{C \cup \{y\}} \implies$$
$$\implies C \subset \overline{C \cup \{x\}} \subseteq \overline{C \cup \{y\}} \implies$$
$$\implies \overline{C \cup \{y\}} = \overline{C \cup \{x\}} \implies y \in \overline{C \cup \{x\}},$$

cioè la (3.33) che, come è stato osservato, equivale alla (σ). Ne segue l'asserto.

$$(\sigma) \implies (a). \tag{3.34}$$

Dimostrazione: Proveremo l'asserto nel caso che $\overline{\emptyset} = \emptyset$, in modo analogo si prova nel caso che $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. Se vale la (σ), cioè se $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ è matroidale, si prova subito che:

$$X \subseteq \mathbf{S}, \quad X \quad \textit{indipendente}, \quad X \cup \{y\} \quad \textit{dipendente} \implies y \in \overline{X}. \tag{3.35}$$

Inoltre da (σ) ed essendo $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ finitamente generato segue che tutte le basi di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ hanno la stessa cardinalità , $\delta + 1$, e che ogni insieme di $\delta + 1$ elementi indipendenti è una base. Dunque $\delta_m = \delta_M = \delta$.

Si consideri una qualsiasi catene satura $(C_0, C_1, ..., C_n = \mathbf{S})$ di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ e sia $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un insieme ad essa associata (cioè $C_0 = \{x_0\}, x_{i+1} \in C_{i+1} - C_i, i = 0, 1, ..., n-1)$. Si ha $\overline{X} = C_n = \mathbf{S}$. Inoltre dalla (3.35) si ha subito che X è un indipendente e quindi una base di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$. Ma allora $n + 1 = \delta + 1$. Dunque tutte le catene satúre di $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ hanno la stessa lunghezza $\delta + 1$. Ne segue la (a), cioè l'asserto.

Si è così provata l'equivalenza delle (a), (b), (c), (σ). Se ne deduce che:

Teorema 3.3 *Le quattro dimensioni di* $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ *coincidono se, e solamente se,* $(\mathbf{S}, \mathbf{C})$ *è matroidale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A.Macintyre, *Good estimates for Vapnik-Chervonienkies dimension of sigmoidal neural networks.* Conferenza tenuta nel Convegno "Order in Algebra and Logic, with Applications, IV" (Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, 8-11 Febbraio 1994).

[2] G.Tallini, *Strutture geometriche.*Liguori Editore, Napoli (1991).

[3] G.Tallini, *Spazi di chiusura, Spazi lineari, Reticoli e spazi lineari. Lezioni di Geometria Superiore, anno acc. 1991-92, Univ. Roma '"La Sapienza".* Quaderno n.104, Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", giugno 1992.

[4] G.Tallini, *Dimensioni negli ipergruppi.* Scritti in onore di G. Melzi, Ed. Vita e Pensiero, Milano (1994).