Convegno su "Strutture combinatorie e loro applicazioni"

LA GEOMETRIA DELLE GRASSMANNIANE DI UNO SPAZIO DI GALOIS

G. Tallini (Roma)

Trento, 20-25 Ottobre 1980

La geometria delle grassmanniane di uno spazio di Galois

G. Tallini (Roma)

1. - Generalità sulla grassmanniana $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di $PG(r,q)$.

Sia $PG(r,q)$ uno spazio di Galois di dimensione r (≥ 3) e di ordine q (con $q = p^h$, p primo). Denoteremo con $\mathcal{G}_{r,d,q}$ la varietà grassmanniana rappresentativa dei sottospazi d-dimensionali ($1 \leq d \leq r - 2$) di $PG(r,q)$. Essa, come é noto, é una varietà algebrica, intersezione di quadriche, di uno spazio di Galois $PG(\binom{r+1}{d+1} - 1, q)$ e contiene

$$(1.1) \qquad |\mathcal{G}_{r,d,q}| = \prod_{i=0}^{d} \vartheta_{r-i} / \vartheta_{d-i}$$

punti, ove si é posto:

$$(1.2) \qquad \vartheta_s = \sum_{j=0}^{s} q^j .$$

Nella rappresentazione suddetta (che si ottiene facendo corrispondere a ciascun S_d il punto di $PG(\binom{r+1}{d+1} - 1, q)$ che ha come coordinate le coordinate grassmanniane dell'S_d), un fascio di S_d (cioé l'insieme degli S_d che passano per un dato S_{d-1} ed appartengono ad un medesimo S_{d+1}) si rappresenta in una retta; viceversa, ogni retta di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ proviene da un fascio di S_d. Ne segue che due S_d di $PG(r,q)$ che si intersechino in un S_{d-1} si rappresentano mediante due punti di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ la retta congiungente i quali appartiene tutta a $\mathcal{G}_{r,d,q}$, e viceversa. Tenuto conto che in $PG(r,q)$ una famiglia di S_d che a due a due si intersecano in un S_{d-1} o é costituita da S_d che passano per uno stesso S_{d-1}, oppure da S_d che appartengono ad un medesimo S_{d+1}, si ha quindi: <u>ogni sottospazio s-dimensionale di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ proviene in $PG(r,q)$ o da una stella s-dimensionale di S_d, con asse un S_{d-1} (cioé la totalità degli S_d passanti per un S_{d-1} ed appartenenti ad un fissato S_{d+s}), oppure da una stella s-dimensionale di S_d appartenenti ad un S_{d+1} (cioé la totalità degli S_d di S_{d+1} che passano per un fissato S_{d-s}), e viceversa.</u>

Per ogni fissato s, con $1 \leq s \leq r - d$, denoteremo con Σ_s la famiglia dei sottospazi s-dimensionali di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ ciascuno immagine di una stella di S_d, costituita dalla totalità degli S_d passanti per uno stesso S_{d-1} ed appartenenti ad un medesimo S_{d+s}. Per ogni fissato t, con $1 \leq t \leq d + 1$, denoteremo con Σ'_t la famiglia dei sottospazi t-dimensionali di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ ciascuno immagine di una stella di S_d, costituita dalla totalità degli S_d appartenenti ad un medesimo S_{d+1} e passanti per uno stesso S_{d-t}. Evidentemente, $\Sigma_1 = \Sigma'_1$ coincide con la famiglia $\mathcal{R}$ delle rette di $\mathcal{G}_{r,d,q}$. Inoltre, $\mathcal{G}_{r,d,q}$ possiede esattamente due famiglie di spazi massimali, date da Σ_{r-d} e Σ'_{d+1}, un elemento T di Σ_{r-d} essendo immagine di una stella di S_d con asse un S_{d-1} di PG(r,q), un elemento T' di Σ'_{d+1} essendo immagine della totalità degli S_d di un S_{d+1}.

Si prova immediatamente che:

(1.3) $\quad T_1, T_2 \in \Sigma_{r-d}, \quad T_1 \neq T_2 \implies |T_1 \cap T_2| \leq 1,$

(1.4) $\quad T'_1, T'_2 \in \Sigma'_{d+1}, \quad T'_1 \neq T'_2 \implies |T'_1 \cap T'_2| \leq 1,$

(1.5) $\quad T \in \Sigma_{r-d}, \quad T' \in \Sigma_{d+1} \implies T \cap T' = \emptyset$, ovvero $T \cap T' \in \mathcal{R}$,

(1.6) $\quad \forall\, U \in \Sigma_s \implies \exists!\, T \in \Sigma_{r-d} : U \subseteq T,$

(1.7) $\quad \forall\, U' \in \Sigma'_t \implies \exists!\, T' \in \Sigma'_{d+1} : U' \subseteq T',$

(1.8) $\quad \forall\, \ell \in \mathcal{R} \implies \exists!\, T \in \Sigma_{r-d}, \exists!\, T' \in \Sigma'_{d+1} : \ell \subseteq T \cap T'.$

La geometria di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ consiste nello studio (iniziato dallo autore in [2]) dei k-insiemi di punti di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ fatto rispetto alle strutture geometriche Σ_s $(s = 1,\ldots, r - d)$ e Σ'_t $(t = 1,\ldots, d + 1)$, cioé allo studio dei k-insiemi costituiti da S_d di PG(r,q), fatto rispetto alle famiglie lineari di S_d. Ci occuperemo di ciò, con particolare riguardo al caso $d = 1$, cioé a quello della geometria delle rette di PG(r,q).

In $\mathcal{G}_{r,1,q}$ le due famiglie di spazi massimali sono date da Σ_{r-1}, immagine delle stelle di rette di PG(r,q), e da Σ'_2, immagine dei piani rigati di PG(r,q); porremo $\mathcal{S} = \Sigma'_2$. In tal caso la (1.3) diventa (come é immediato constatare):

$$(1.9) \qquad T_1, T_2 \in \Sigma_{r-1}, \; T_1 \neq T_2 \implies |T_1 \cap T_2| = 1 .$$

Se $p \in \mathcal{G}_{r,1,q}$, denoteremo con Γ_p l'unione delle rette di $\mathcal{G}_{r,1,q}$ per p, cioé il <u>cono tangente</u> in p a $\mathcal{G}_{r,1,q}$. Esso risulta l'immagine della famiglia delle rette di PG(r,q) incidenti la retta della quale p é l'immagine. La famiglia $\mathcal{T} = \{\Gamma_p : p \in \mathcal{G}_{r,1,q}\}$ é manifestamente propria. Inoltre, Γ_p é unione dei ϑ_{r-2} piani di $\mathcal{S}$ per p ed anche unione dei ϑ_1 spazi $T_{r-1} \in \Sigma_{r-1}$ per p.

2. - <u>I caratteri di un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$.</u>

Sia K un k-insieme di punti di $\mathcal{G}_{r,d,q}$. Chiameremo <u>carattere</u> di K rispetto a Σ_s $(1 \leq s \leq r-d)$ di indice m (con $0 \leq m \leq \vartheta_s$) lo intero $\tau^s_{m,d}$ dato dal numero dei $T_s \in \Sigma_s$ che incontrano K ciascuno in m punti. Dati gli interi $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$, con $0 \leq m_1 < m_2 < \ldots \; m_\ell \leq \vartheta_s$, diremo che K é di <u>classe</u> $[m_1, m_2, \ldots, m_\ell]_s$ se $\tau^s_{m,d} = 0$ per ogni $m \neq m_1, m_2, \ldots, m_\ell$; diremo che K é di <u>tipo</u> $(m_1, m_2, \ldots, m_\ell)_s$ se $\tau^s_{m,d} = 0$ per ogni $m \neq m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ e $\tau^s_{m_i,d} \neq 0$ per $i = 1,2,\ldots,\ell$. Si dirà poi che K é ad <u>ℓ caratteri</u> rispetto a Σ_s se esattamente ℓ dei suoi caratteri sono diversi da zero. Lo studio dei k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,d,q}$, rispetto a Σ_s, si può fare in ordine di difficoltà crescente rispetto al numero dei caratteri non nulli.

Porremo nel seguito, per ogni coppia di interi r, d, con $r \geq d \geq 0$:

$$(2.1) \qquad \gamma_{r,d} = |\mathcal{G}_{r,d,q}| = \prod_{i=0}^{d} \vartheta_{r-i}/\vartheta_{d-i}, \qquad \gamma_{r,-1} = 1 .$$

Denotato con τ_d il numero delle coppie di punti di K, ciascuna congiunta da una retta non appartenente a $\mathcal{G}_{r,d,q}$ (una tale coppia é l'immagine di due S_d di $PG(r,q)$ che si intersecano in un S_h, con $h < d - 1$), i caratteri $\tau^s_{m,d}$ e τ_d di K soddisfano le seguenti relazioni:

$$
(2.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\vartheta_s} \tau^s_{m,d} = \gamma_{r,d-1}\cdot\gamma_{r-d,s}\ ,\\
&\sum_{m=1}^{\vartheta_s} m\,\tau^s_{m,d} = k\cdot\vartheta_d\cdot\gamma_{r-d-1,s-1}\ ,\\
&\sum_{m=2}^{\vartheta_s} m(m-1)\,\tau^s_{m,d} = \left[k(k-1) - 2\,\tau_d\right]\cdot\gamma_{r-d-2,s-2}\ .
\end{aligned}
\right.
$$

La $(2.2)_I$ é immediata, dato che $|\Sigma_s| = \gamma_{r,d-1}\cdot\gamma_{r-d,s}$ (infatti, in $PG(r,q)$ le stelle di S_d, ciascuna avente asse un S_{d-1} e spazio di appartenenza un S_{d+s}, sono in numero di $\gamma_{r,d-1}\cdot\gamma_{r-d,s}$). La $(2.2)_{II}$ si ottiene contando nei due modi possibili le coppie (p,T_s), con $p\in K$, $T_s\in\Sigma_s$ e $p\in T_s$, osservato che i T_s di Σ_s per un punto p di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ sono in numero di $\vartheta_d\cdot\gamma_{r-d-1,s-1}$. La $(2.2)_{III}$ si deduce contando nei due modi possibili le coppie $((p_1,p_2), T_s)$, con p_1, p_2 punti distinti di K, tali che la retta p_1p_2 sia <u>in</u>teramente contenuta in $\mathcal{G}_{r,d,q}$, $T_s\in\Sigma_s$, $p_1, p_2\in T_s$, qualora si tiene presente che i $T_s\in\Sigma_s$ per la retta p_1p_2 sono in numero di $\gamma_{r-d-2,s-2}$.

Analogamente, chiameremo <u>carattere</u> di K rispetto a Σ'_t ($1 \leq t \leq d+1$) di indice n (con $0 \leq n \leq \vartheta_t$) l'intero $\tau'^t_{n,d}$ dato dal numero dei $T'_t \in \Sigma'_t$ che incontrano K ciascuno in n punti. Dati gli interi $n_1, n_2, \dots, n_\ell$, con $0 \leq n_1 < n_2 \dots < n_\ell \leq \vartheta_t$, diremo che K é di <u>classe</u> $[n_1, n_2, \dots, n_\ell]'_t$ se $\tau'^t_{n,d} = 0$ per ogni $n \neq n_1, n_2, \dots, n_\ell$; diremo che K é di <u>tipo</u> $(n_1, n_2, \dots, n)'_t$ se $\tau'^t_{n,d} = 0$ per ogni $n \neq n_1, n_2, \dots, n_\ell$ e $\tau'^t_{n_i,d} \neq 0$, per $i = 1,2,\dots,\ell$. In modo analogo a quanto visto precedentemente, si può fare lo studio di K rispetto a Σ'_t.

Si prova, in maniera analoga a quella già vista, che i caratteri

$\tau'^{\,t}_{n,d}$ soddisfano le seguenti relazioni:

$$(2.3)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\vartheta_t} \tau'^{\,t}_{n,d} = |\Sigma'_t| = \gamma_{r,d+1} \cdot \gamma_{d+1,d-t} , \\ \sum\limits_{n=1}^{\vartheta_t} n\, \tau'^{\,t}_{n,d} = k \cdot \vartheta_{r-d-1} \cdot \gamma_{d,d-t} , \\ \sum\limits_{n=2}^{\vartheta_t} n(n-1)\, \tau'^{\,t}_{n,d} = \left[k(k-1) - 2\, \tau_d \right] \cdot \gamma_{d-1,d-t} . \end{cases}$$

Le (2.2) relativamente alla famiglia Σ_{r-d} di spazi massimali ($s = r - d$) diventano:

$$(2.4)\quad \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{\vartheta_{r-d}} \tau^{\,r-d}_{m,d} = \gamma_{r,d-1} , \\ \sum\limits_{m=1}^{\vartheta_{r-d}} m\, \tau^{\,r-d}_{m,d} = k\, \vartheta_d , \\ \sum\limits_{m=2}^{\vartheta_{r-d}} m(m-1)\, \tau^{\,r-d}_{m,d} = k(k-1) - 2\, \tau_d . \end{cases}$$

Le (2.3) relativamente alla famiglia Σ'_{d+1} di spazi massimali ($t = d + 1$) diventano:

$$(2.5)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\vartheta_{d+1}} \tau'^{\,d+1}_{n,d} = \gamma_{r,d+1} , \\ \sum\limits_{n=1}^{\vartheta_{d+1}} n\, \tau'^{\,d+1}_{n,d} = k\, \vartheta_{r-d-1} , \\ \sum\limits_{n=2}^{\vartheta_{d+1}} n(n-1)\, \tau'^{\,d+1}_{n,d} = k(k-1) - 2\, \tau_d . \end{cases}$$

Nel caso della grassmanniana delle rette, $\mathcal{G}_{r,1,q}$, di $PG(r,q)$, cioé per $d = 1$, porremo, per semplicità di scrittura, $\tau^{\,s}_{m,1} = \tau^{\,s}_m$ $(1 \leq s \leq r - 1)$, $\tau'^{\,2}_{n,1} = \tau^{\rho}_n$ e $\tau_1 = \tau$. Le (2.2) allora diventano:

$$
(2.6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\vartheta_s} \tau_m^s = \vartheta_r \, \gamma_{r-1,s} \, , \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\vartheta_s} m\,\tau_m^s = k\,\vartheta_1 \cdot \gamma_{r-2,s-1} \, , \\ \displaystyle\sum_{m=2}^{\vartheta_s} m(m-1)\,\tau_m^s = [k(k-1) - 2\tau]\,\gamma_{r-3,s-2} \, . \end{cases}
$$

Le (2.4), (2.5), relative alle famiglie Σ_{r-1} e $\mathcal{S} = \Sigma'_2$ di spazi massimali, diventano:

$$
(2.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\vartheta_{r-1}} \tau_m^{r-1} = \vartheta_r \, , \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\vartheta_{r-1}} m\,\tau_m^{r-1} = k \cdot \vartheta_1 \, , \\ \displaystyle\sum_{m=2}^{\vartheta_{r-1}} m(m-1)\,\tau_m^{r-1} = k(k-1) - 2\tau \, , \end{cases}
$$

$$
(2.8)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\vartheta_2} \tau_n^{\mathcal{S}} = \gamma_{r,2} = \vartheta_r \cdot \vartheta_{r-1}\,\vartheta_{r-2} / \vartheta_1\,\vartheta_2 \, , \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\vartheta_2} n\,\tau_n^{\mathcal{S}} = k\,\vartheta_{r-2} \, , \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\vartheta_2} n(n-1)\,\tau_n^{\mathcal{S}} = k(k-1) - 2\tau \, . \end{cases}
$$

Proviamo che:

I. - <u>Un k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m)_s$, con $1 \leq s \leq r-d-1$, é necessariamente o il $\emptyset$, ovvero $\mathcal{G}_{r,d,q}$. Ne segue che ogni k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ con $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathcal{G}_{r,d,q}$ ha sempre almeno due caratteri diversi da zero rispetto a Σ_s, con $1 \leq s \leq r-d-1$.</u>

Dimostrazione. Per ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$, $K \cap T_{r-d}$ é un insieme di tipo $(m)_s$ dello spazio proiettivo T_{r-d}, con $1 \leq s \leq r - d - 1$, e quindi (cfr. [2], prop. I) o é $K \cap T_{r-d} = \emptyset$, ovvero $K \cap T_{r-d} = T_{r-d}$. Nel primo caso é $m = 0$, ma allora $K = \emptyset$, nel secondo é $m = \vartheta_s$, ma allora $K = \mathcal{G}_{r,d,q}$. Si ha così l'asserto.

In modo del tutto analogo si prova che:

II. - Un k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(n)_t^!$, con $1 \leq t \leq d$, é necessariamente o il $\emptyset$, ovvero $\mathcal{G}_{r,d,q}$. Ne segue che ogni k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$, con $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathcal{G}_{r,d,q}$, ha sempre almeno due caratteri diversi da zero rispetto a Σ'_t, con $1 \leq t \leq d$.

3. - I k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m_1, m_2)_s$ con $1 \leq s \leq r - d - 1$ e quelli di tipo $(n_1, n_2)_t^!$ con $1 \leq t \leq d$.

Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m_1, m_2)_s$ con $1 \leq s \leq r - d - 1$. Risulta $0 \leq m_1 < m_2 \leq \vartheta_s$; distinguiamo allora i seguenti casi:

(I) $m_1 = 0$, $m_2 = \vartheta_s$

(II) $m_1 = 0$, $m_2 < \vartheta_s$

(III) $m_1 > 0$, $m_2 = \vartheta_s$

(IV) $0 < m_1 < m_2 < \vartheta_s$.

Per ogni T_{r-d} di Σ_{r-d}, $K \cap T_{r-d}$ é un insieme di classe $[m_1, m_2]_s$ dello spazio proiettivo T_{r-d}, con $1 \leq s \leq (r - d) - 1$. Nel caso (I), $K \cap T_{r-d}$ é quindi di classe $[0, \vartheta_s]_s$, onde necessariamente é $K \cap T_{r-d} = \emptyset$, ovvero $K \cap T_{r-d} = T_{r-d}$ (non esistendo in T_{r-d} insiemi di tipo $(0, \vartheta_s)_s$); pertanto, ogni T_{r-d} di Σ_{r-d} o non ha punti in comune con K, oppure appartiene a K. D'altra parte, dati comunque due elementi T_{r-d} e $\overline{T}_{r-d}$ di Σ_{r-d}, esiste sempre una successione $T^1_{r-d}, T^2_{r-d}, \ldots, T^h_{r-d}$ di elementi di Σ_{r-d} tale che $T_{r-d} \cap T^1_{r-d} \neq \emptyset$, $T^i_{r-d} \cap T^{i+1}_{r-d} \neq \emptyset$ $(i = 1,2,\dots, h-1)$, $T^h_{r-d} \cap T_{r-d} \neq \emptyset$ (ciò segue dal fatto che, come é immediato verificare, in PG(r,q), comunque si cinsiderino due spazi S_{d-1} e S_{d-1}. esiste sempre una successione di spazi $S^1_{d-1}, S^2_{d-1}, \dots, S^h_{d-1}$ tali che $\dim(S_{d-1} \cap S^1_{d-1}) = \dim(S^i_{d-1} \cap S^{i+1}_{d-1}) = \dim(S^h_{d-1} \cap S_{d-1}) = d - 2)$. Ne segue che, se un $T_{r-d} \in \sum_{r-d}$ ha intersezione vuota con K (ovvero $T_{r-d} \subset K$), ciò accade anche per ogni altro T_{r-d} di $\sum_{r-d}$, onde $K = \emptyset$ (ovvero $K = \mathcal{G}_{r,d,q}$), ma ciò é escluso, essendo K di tipo $(0, \vartheta_s)_s$.

Nel caso (II), $K \cap T_{r-d}$ o é il $\emptyset$, ovvero é di tipo $(0, m_2)_s$, ma allora, se é $r - d \geq 3$, in forza della prop. XIV di [2], $K \cap T_{r-d}$ o é un punto, ossia é $m_2 = 1$, oppure é il complementare di un iperpiano di T_{r-d}, e quindi $m_2 = q^s$. Se $m_2 = 1$, allora K é di classe $[0,1]_{r-d}$, con $\tau^{r-d}_{1,d} \neq 0$, cioé é l'immagine su $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_1$ non vuota di S_d di PG(r,q), a due a due intersecantisi in spazi di dimensione $< d - 1$ (ad esempio, se $d = 1$, é una famiglia di rette di PG(r,q) a due a due sghembe tra loro). Se $m_2 = q^s$, il complementare di K é l'immagine in $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_2$ di S_d di PG(r,q), tale che, per ogni S_{d-1} di PG(r,q), o tutti gli S_d per esso appartengono ad $\mathcal{F}_2$, oppure l'unione degli S_d di $\mathcal{F}_2$ per esso costituisce un iperpiano. Per $d = 1$, K é allora (cfr. [4]) il complementare dell'immagine in $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di un complesso lineare di rette. Se é $r - d = 2$, sarà $s = 1$ (essendo $1 \leq s \leq r - d - 1$) e quindi K é di tipo $(0,m_2)_1$, con $0 < m_2 < \vartheta_2$, su $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$.
Se é $d \geq 2$, scelto un $T'_{d+1} \in \sum'_{d+1}$ tale che $K \cap T'_{d+1} \neq \emptyset$, $K \cap T'_{d+1}$ é di tipo $(0,m_2)_1$ e, poiché $d + 1 \geq 3$, (in forza di [2], prop. XIV) $K \cap T'_{d+1}$ risulta un punto e cioé $m_2 = 1$, oppure il complementare di un iperpiano di T'_{d+1} e quindi $m_2 = q$. Allora, se $m_2 = 1$, K é l'immagine su $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_1$ di S_d di PG(r,q) sopra descritta; se $m_2 = q$, il complmentare di K, essendo di tipo $(1,q + 1)_1$ e quindi di classe $[1, \vartheta_{r-d}]_{r-d}$, risulta l'immagine su $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$ di

una famiglia $\mathcal{F}_2$ di S_d di $PG(r,q)$, di cui sopra. Se é $r - d = 2$ e $d = 1$, K é un k-insieme di tipo $(0,m)_1$, con $0 < m < \vartheta_1$, di $\mathcal{G}_{3,1,q}$, che viene studiato in [4] ; comunque, per $m = 1$ o $m = q$, K coincide, rispettivamente, con l'immagine di una famiglia di rette di $PG(3,q)$, a due a due sghembe, o con il complementare dell'immagine di un complesso lineare di rette.

Il caso (III) é il complementare del caso (II).

Nel caso (IV), $K \cap T_{r-d}$ risulta (cfr. prop. I) di tipo $(m_1,m_2)_s$ in T_{r-d}, con $1 \leq s \leq (r - d) - 1$. Se é $s \leq (r - d) - 2$, allora, per [7] prop. V, deve essere necessariamente q un quadrato dispari ed inoltre, posto $\varepsilon = \pm 1$:

$$(3.1)\quad \begin{cases} m_1 = [1 + \vartheta_{s-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) - (\sqrt{q})^s]/2 , \\ m_2 = [1 + \vartheta_{s-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) + (\sqrt{q})^s]/2 \end{cases}$$

e $K \cap T_{r-d}$ deve essere di tipo $(m_1', m_2')_1$, con

$$(3.2)\quad \begin{cases} m_1' = [1 + (q + \varepsilon\sqrt{q}) - \sqrt{q}]/2 \\ m_2' = [1 + (q + \varepsilon\sqrt{q}) + \sqrt{q}]/2 . \end{cases}$$

Ne segue che K é di tipo $(m_1',m_2')_1$; ma allora ogni sottospazio di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ incontra K in un insieme di tipo $(m_1',m_2')_1$ e quindi (cfr. [2], XIV) K é di classe $[m_1^s, m_2^s]_s$, per ogni $s = 2,3,\dots, r - d$, con

$$(3.3)\quad \begin{cases} m_1^s = [1 + \vartheta_{s-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) - (\sqrt{q})^s]/2 \\ m_2^s = [1 + \vartheta_{s-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) + (\sqrt{q})^s]/2 \end{cases}$$

e di classe $[n_1^t, n_2^t]_t'$ per ogni $t = 2,3,\dots, d + 1$, con

$$(3.4)\quad \begin{cases} n_1^t = [1 + \vartheta_{t-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) - (\sqrt{q})^t]/2 \\ n_2^t = [1 + \vartheta_{t-1}(q + \varepsilon\sqrt{q}) + (\sqrt{q})^t]/2 , \end{cases}$$

anzi di tipo $(m_1^s, m_2^s)_s$ per ogni $s = 2,\dots, r-d-1$ e di tipo $(n_1^t . n_2^t)_t$ per ogni $t = 2,\dots, d$, in virtù delle prop. I e II. Dalle $(2.4)_I$ e $(2.4)_{II}$ si trae (tenuto conto che K é di classe $[m_1^{r-d}, m_2^{r-d}]_{r-d}$ ove m_1^{r-d}, m_2^{r-d} sono dati dalle (3.3)), denotando, per semplicità, con τ_1^{r-d} e τ_2^{r-d} i caratteri di K di indici m_1^{r-d}, m_2^{r-d} rispetto a Σ_{r-d}:

$$(3.5)\quad \begin{cases} \tau_1^{r-d} = [m_2^{r-d}\, \gamma_{r,d-1} - k\cdot \vartheta_d]/(\sqrt{q})^{r-d} \\ \tau_2^{r-d} = [k\cdot \vartheta_d - m_1^{r-d}\cdot \gamma_{r,d-1}]/(\sqrt{q})^{r-d}, \end{cases}$$

da cui si ottiene (dovendo essere $\tau_1^{r-d} \geqslant 0$, $\tau_2^{r-d} \geqslant 0$):

$$(3.6)\quad \left| \frac{2\,\vartheta_d}{\gamma_{r,d-1}}\, k - [1 + \vartheta_{r-d-1}(q + \varepsilon\sqrt{q})] \right| \leq (\sqrt{q})^{r-d}.$$

Analogamente, dalle $(2.5)_I$ e $(2.5)_{II}$, denotando per semplicità con $\tau'^{\,d+1}_1$ e $\tau'^{\,d+1}_2$ i caratteri di K di indici n_1^{d+1} ed n_2^{d+1} rispetto a Σ'_{d+1}, si ottiene:

$$(3.7)\quad \begin{cases} \tau'^{\,d+1}_1 = (n_2^{d+1}\cdot \gamma_{r,d+1} - k\, \vartheta_{r-d-1})/(\sqrt{q})^{d+1}, \\ \tau'^{\,d+1}_2 = (k\cdot \vartheta_{r-d-1} - n_1^{d+1}\cdot \gamma_{r,d+1})/(\sqrt{q})^{d+1}, \end{cases}$$

da cui si trae:

$$(3.8)\quad \left| \frac{2\,\vartheta_{r-d-1}}{\gamma_{r,d+1}}\, k - [1 + \vartheta_d(q + \varepsilon\sqrt{q})] \right| \leq (\sqrt{q})^{d+1}.$$

Rimane, infine, da esaminare il caso (IV), con $s = r-d-1$. In tale eventualità, $K \cap T_{r-d}$ é di tipo $(m_1, m_2)_{r-d-1}$ in $T_{r-d} = PG(r-d, q)$, con $0 < m_1 < m_2 < \vartheta_{r-d-1}$ e quindi (cfr. [7], prop. II) deve essere (essendo $q = p^h$):

$$(3.9)\quad m_2 = m_1 + p^{\ell}, \text{ con } 0 \leq \ell \leq h(r-d-1).$$

Inoltre, $|K \cap T_{r-d}|$ deve soddisfare l'equazione (cfr. [7], n.2):

$$x^2 - x\left[1 + (m_1 + m_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} / \vartheta_{r-d-2}\right] + m_1 m_2 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{r-d-2} = 0, \tag{3.10}$$

la quale, dunque, deve ammettere soluzioni intere. Quindi K o é di tipo $(M)_{r-d}$, con M soluzione della (3.10), oppure é di tipo $(M_1, M_2)_{r-d}$, con M_1, M_2 soluzioni della (3.10) ed $M_1 < M_2$. Se K é di tipo $(M)_{r-d}$, dalle $(2.4)_I$, $(2.4)_{II}$ si ottiene (essendo ora $\tau^{r-d}_{m,d} = 0$ per ogni $m \neq M$):

$$k = M \gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \ . \tag{3.11}$$

Inoltre, dalle $(2.2)_I$, $(2.2)_{II}$ e dalle (3.9), (3.11) si trae:

$$\begin{cases} \tau^{r-d-1}_{m_1,d} = \gamma_{r,d-1}\left[m_2 \vartheta_{r-d} - M \vartheta_{r-d-1}\right]/p^\ell , \\ \tau^{r-d-1}_{m_2,d} = \gamma_{r,d-1}\left[M \vartheta_{r-d-1} - m_1 \vartheta_{r-d}\right]/p^\ell , \end{cases} \tag{3.12}$$

da cui (dovendo essere $\tau^{r-d-1}_{m_i,d} > 0$):

$$q\, m_1 < M < q\, m_2 + 1 \ . \tag{3.13}$$

Se K é di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$, dalle $(2.4)_I$, $(2.4)_{II}$ si ottiene, denotando con $\Delta = M_2 - M_1$ il discriminante della (3.10):

$$\begin{cases} \tau^{r-d}_{M_1,d} = \left[M_2 \gamma_{r,d-1} - k \vartheta_d\right]/\Delta \\ \tau^{r-d}_{M_2,d} = \left[k \vartheta_d - M_1 \gamma_{r,d-1}\right]/\Delta \end{cases} \tag{3.14}$$

e quindi (essendo $\tau^{r-d}_{M_i,d} > 0$):

$$M_1 \gamma_{r,d-1}/\vartheta_d < k < M_2 \gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \ . \tag{3.15}$$

Si può così concludere con la seguente proposizione:

III. - <u>Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m_1, m_2)_s$, con $1 \leq s \leq r - d - 1$. Per esso possono presentarsi soltanto le eventualità seguenti:</u>

(A) K é l'immagine, su $\mathcal{G}_{r,d,q}$, di una famiglia $\mathcal{F}_1$ di S_d di $PG(r,q)$ a due a due intersecantisi in spazi di dimensione $< d-1$ (K di tipo $(0,1)_1$), oppure K é il complementare dell'immagine della famiglia $\mathcal{F}_1$ (K di tipo $(q, \vartheta_1)_1$).

(B) K é l'immagine, su $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_2$ di S_d di $PG(r,q)$ tale che, per ogni S_{d-1} di $PG(r,q)$, o tutti gli S_d per l' S_{d-1} appartengono ad $\mathcal{F}_2$, oppure l'unione degli S_d di $\mathcal{F}_2$ per l' S_{d-1} risulta un iperpiano (K di tipo $(1, \vartheta_1)_1$), oppure K é il complementare dell'immagine della famiglia $\mathcal{F}_2$ (K di tipo $(0,\sigma)_1$). Per $d = 1$, $\mathcal{F}_2$ é un complesso lineare di rette di $PG(r,q)$.

(C) K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di tipo $(0,n)_1$, con $n \leq q-1$, oppure di tipo $(m, \vartheta_1)_1$, con $m \geq 2$.

(D) K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$, con q quadrato dispari, di tipo $(m_1', m_2')_1$, con m_1', m_2' dati dalle (3.2), ove $\varepsilon = \pm 1$. Ne segue che K é di tipo $(m_1^s, m_2^s)_s$, per ogni $s = 2,3,\dots, r-d-1$, con m_1^s, m_2^s dati dalle (3.3), e di tipo $(n_1^t, n_2^t)_t'$ per ogni $t = 2,3,\dots,d$, con n_1^t, n_2^t dati dalle (3.4), di classe $[m_1^{r-d}, m_2^{r-d}]_{r-d}$, con m_1^{r-d}, m_2^{r-d} dati dalle (3.3) e di classe $[n_1^{d+1}, n_2^{d+1}]'_{d+1}$, con n_1^{d+1}, n_2^{d+1} dati dalle (3.4); inoltre, k soddisfa le (3.6) e (3.8).

(E) K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m_1,m_2)_{r-d-1}$, con $0 < m_1 < m_2 < \vartheta_{r-d-1}$. Ma allora deve essere $m_2 - m_1 = p^{\ell}$ $(0 \leq \ell \leq h(r-d-1))$; inoltre, l'equazione (3.10) deve ammettere soluzioni intere e K o é tipo $(M)_{r-d}$, con M soluzione della (3.10), oppure é di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$, con M_1, M_2 soluzioni della (3.10) ed $M_1 < M_2$; nel primo caso k é dato dalla (3.11) ed M soddisfa la (3.13), nel secondo caso k soddisfa la (3.15).

Sia ora K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(n_1, n_2)_t^*$, con $1 \leq t \leq d$. Se $t = 1$, dato che $\Sigma'_1 = \Sigma_1 = \mathcal{R}$, esso é di tipo $(n_1, n_2)_1$ e quindi per esso vale la proposizione II. Possiamo, perciò, supporre $2 \leq t \leq d$ (e così $d + 1 \geq 3$). In tal caso, ragionando in modo del tutto analogo a quanto precede (pur di fissare le idee sui $T'_{d+1} \in \Sigma'_{d+1}$, invece che sui $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$), si perviene alla seguente proposizione:

IV. - Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(n_1, n_2)_t^*$, con $2 \leq t \leq d$; allora, o K coincide con uno degli insiemi di cui in (A), (B), (C), (D) della proposizione III, oppure

(E') K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(n_1, n_2)'_d$, con $0 < n_1 \leq n_2 \leq \vartheta_d$. Ma allora deve essere $n_2 - n_1 = p^\ell$ $(0 \leq \ell \leq hd)$; inoltre, l'equazione:

$$x^2 - x\left[1 + (n_1 + n_2 - 1)\vartheta_d/\vartheta_{d+1}\right] + n_1 n_2 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{d-1} = 0 \tag{3.16}$$

deve ammettere soluzioni intere e K o é di tipo $(N)'_{d+1}$, con N soluzione della (3.16), oppure é di tipo $(N_1, N_2)'_{d+1}$, con N_1, N_2 soluzioni della (3.16) ed $N_1 < N_2$. Nel primo caso k é dato da:

$$k = N\,\gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \tag{3.17}$$

ed N soddisfa la:

$$n_1 q < N < n_2 q + 1 \; ; \tag{3.18}$$

nel secondo caso k soddisfa la:

$$N_1 \gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} < k < N_2 \gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \, . \tag{3.19}$$

4. - I k-insiemi di tipo $(1,m)_{r-d-1}$ o di tipo $(1,n)_d^*$ di $\mathcal{G}_{r,d,q}$.

Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(1,m)_{r-d-1}$, con $1 < m \leq \vartheta_{r-d-1}$. Se $m = \vartheta_{r-d-1}$, dalla prop. III segue che $r = d + 2$ e che K é l'immagine su $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_2$ di S_d di $PG(d+2,q)$. Possiamo perciò supporre $1 < m < \vartheta_{r-d-1}$. Per ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$, allora l'insieme $K \cap T_{r-d}$ é di tipo $(1,m)_{r-d-1}$ nello spazio proiettivo

$T_{r-d} = PG(r-d,q)$. Distinguiamo i seguenti casi: $r-d=2$, $r-d=3$, $r-d>3$.

Se $r-d=2$, $K\cap T_{r-d}$ é un insieme di tipo $(1,m)_1$ del piano $T_{r-d} = PG(2,q)$, con $m \leq q$; quindi, in forza di [5] prop. VIII, deve essere q un quadrato, $m=\sqrt{q}+1$ e $K\cap T_{r-d}$ risulta un arco hermitiano ovvero un subpiano di Baer, onde $|K\cap T_{r-d}| = q\sqrt{q}+1$ ovvero $|K\cap T_{r-d}| = q+\sqrt{q}+1$. Pertanto, K é di classe $[q+\sqrt{q}+1,\ q\sqrt{q}+1]_1$. Inoltre, risulta $d=1$; infatti, se fosse $d\geq 2$, fissato un $T'_{d+1}\in \Sigma'_{d+1}$, l'insieme $K\cap T'_{d+1}$ sarebbe di tipo $(1,\sqrt{q}+1)_1$ nello spazio $T'_{d+1} = PG(d+1,q)$, con $d+1\geq 3$, ma un tale insieme non esiste (cfr. [6], prop. X). Ne segue che K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$, di tipo $(1,\sqrt{q}+1)_1$ e di classe $[q+\sqrt{q}+1,\ q\sqrt{q}+1]_1$.

Se $r-d=3$, $K\cap T_{r-d}$ é un insieme di tipo $(1,m)_2$ di $T_{r-d} = PG(3,q)$; quindi (cfr. [8] o [2] prop. XXI) é $m=q+1$ e $K\cap T_{r-d}$ é una retta od una (q^2+1)-calotta (cioé una quadrica se q é dispari), onde $|K\cap T_{r-d}| = q+1$, ovvero $|K\cap T_{r-d}| = q^2+1$. Ne segue che K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{d+3,d,q}$ di classe $[0,1,2,q+1]_1$, di tipo $(1,q+1)_2$ e di classe $[q+1,\ q^2+1]_3$.

Se $r-d>3$, $K\cap T_{r-d}$ é un insieme di tipo $(1,m)_{r-d-1}$ di $T_{r-d} = PG(r-d,q)$, quindi (cfr. [8] o [2] prop. XXI) é $m=q+1$ e $K\cap T_{r-d}$ é una retta, onde $|K\cap T_{r-d}| = q+1$. Pertanto, K é di classe $[0,1,q+1]_1$, di tipo $(1,q+1)_{r-d-1}$ e di tipo $(q+1)_{r-d}$.

Da quanto precede e dalla prop. III caso (E), si trae che:

V. - <u>Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(1,m)_{r-d-1}$, con $1 < m \leq \vartheta_{r-d-1}$. Per esso possono al più presentarsi le eventualità seguenti:</u>

(4.1) <u>K é di tipo $(1,\vartheta_1)_1$ in $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$ e quindi é l'immagine in $\mathcal{G}_{d+2,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}'_2$ di S_d di $PG(d+2,q)$ (cfr. prop. III caso (B)), cioé é il duale di un complesso lineare di rette.</u>

(4.2) <u>K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di tipo $(1,\sqrt{q}+1)_1$, di classe $[q+\sqrt{q}+1,\ q\sqrt{q}+1]_2$ e di classe $[q+\sqrt{q}+1,\ q\sqrt{q}+1]'_2$.</u>

(4.3) K é l'immagine su $\mathcal{G}_{r,d,q}$ $(r - d \geq 3)$ di una famiglia $\mathcal{F}_3$ di S_d di PG(r,q), tale che per ogni S_{d-1} di PG(r,q) gli S_d della famiglia per l' S_{d-1} formano fascio, cioé la loro unione é un S_{d+1} (K é di tipo $(q + 1)_{r-d}$ e di tipo $(0,1,q + 1)_1$). Inoltre, risulta:

$$k = \vartheta_1 \gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \quad .$$

Quindi, affinché esista un tale insieme, $\vartheta_1\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d$ deve essere un intero (per esempio, per $d = 1$ si ha $k = \vartheta_r$, per $d = 2$ ed $r = 5$ si ha $k = (q^3 + 1)\vartheta_4$, per $d = 2$ ed $r = 6$ si ha $k = (q^3 + 1)\vartheta_6$, mentre per $d = 2$ ed $r = 7$ si ha $\vartheta_1\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d = \vartheta_7\vartheta_6/\vartheta_2$ che non é un intero, onde non esistono in $\mathcal{G}_{7,2,q}$ insiemi suddetti).

(4.4) K é l'immagine su $\mathcal{G}_{d+3,d,q}$ di una famiglia $\mathcal{F}_4$ di S_d di PG(d+3,q) tale che, per ogni S_{d-1} di PG(d+3,q), gli S_d della famiglia per l' S_{d-1} costituiscono un cono proiettante dall'S_{d-1} una $(q^2 + 1)$-calotta di un S_3 sghembo con l' S_{d-1} e quindi un cono quadrico, se q é dispari (K é di tipo $(q^2 + 1)_3$ e di tipo $(0,1,2)_1$). Inoltre risulta:

$$k = (q^2 + 1)\gamma_{d+3,d-1}/\vartheta_d = \vartheta_{d+3}\vartheta_{d+2}\vartheta_{d+1}/\vartheta_2(\vartheta_1)^2 \; .$$

Pertanto, affinché esista un tale insieme, deve essere un intero l'ultimo membro della precedente eguaglianza (ad esempio, per $d = 1$ ciò non accade, mentre per $d = 2$ si ha $k = (q^2 - q + 1)\cdot\vartheta_4(q^2 + 1)$).

(4.5) K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{d+3,d,q}$ immagine di una famiglia $\mathcal{F}_5$ di S_d di PG(d+3,q) tale che, per ogni S_{d-1} di PG(d+3,q), gli S_d della famiglia per l' S_{d-1} o formano fascio, oppure costituiscono un cono proiettante dall' S_{d-1} una $(q^2 + 1)$-calotta di un S_3 sghembo con l' S_{d-1} (K é di tipo $(q + 1,q^2 + 1)_3$ e di tipo $(0,1,2,q + 1)_1$). Inoltre risulta:

$$\vartheta_{d+3}\vartheta_{d+2}\vartheta_{d+1}/\vartheta_3\vartheta_2 < k < \vartheta_{d+3}\vartheta_{d+2}\vartheta_{d+1}/\vartheta_2(\vartheta_1)^2 \; .$$

Il problema dell'esistenza degli insiemi di cui alla precedente proposizione é aperto.

Il complementare di un insieme di tipo $(1,m)_{r-d-1}$ di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ é un insieme di tipo $(m', \vartheta_{r-d-1} - 1)_{r-d-1}$, con $0 \leq m' < \vartheta_{r-d-1}$. Dalla proposizione V (osservato che $\vartheta_{r-d-1} - 1 = q \cdot \vartheta_{r-d-2}$) segue allora:

VI. - Un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(m, q\vartheta_{r-d-2})_{r-d-1}$, con $0 \leq m < q\vartheta_{r-d-2}$, risulta il complementare di uno degli insiemi di cui nella proposizione V.

Ragionando in modo duale a quanto fatto per provare la proposizione V, si perviene alla seguente proposizione:

VII. - Un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(1,n)'_d$, con $1 < n \leq \vartheta_d$, risulta il duale di uno degli insiemi di cui nella proposizione V.

5. - I k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(M)_{r-d}$ o di tipo $(N)'_{d+1}$.

Un k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ ad un sol carattere rispetto a Σ_s, con $s \leq r - d - 1$ (o, dualmente, rispetto a Σ'_t, con $t \leq d$), risulta necessariamente il $\emptyset$ ovvero tutto $\mathcal{G}_{r,d,q}$ (cfr. prop. I e II). Ciò non é più vero, in generale, se K ha un solo carattere rispetto a Σ_{r-d} (o, dualmente, rispetto a Σ'_{d+1}); infatti, ad esempio, l'insieme delle rette tangenti od appartenenti ad una quadrica Q non singolare di un PG(r,q), con r dispari, é manifestamente di tipo $(\vartheta_{r-2})_{r-1}$ (e, dualmente, l'insieme degli S_{r-2} tangenti a Q é di tipo $(\vartheta_{r-2})'_{r-1}$). In questo numero ci occuperemo di tali insiemi.

Sia, dunque, K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(M)_{r-d}$. Dalle $(2.4)_I$ e $(2.4)_{II}$ si ha (essendo ora $\tau^{r-d}_{m,d} = 0$ per ogni $m \neq M$):

$$k = M\,\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \;; \tag{5.1}$$

quindi, affinché esista un tale insieme, occorre che il secondo membro della (5.1) sia un intero. Dalle $(2.4)_{III}$ e (5.1) si trae:

(5.2) $$2\tau_d = k(k - \vartheta_d M + q\vartheta_{d-1}) ,$$

onde $2\tau_d$ é un multiplo di k (necessariamente positivo se $K \neq \emptyset$).

Per d = 1, la (5.1) diventa

(5.3) $$k = M\vartheta_r/\vartheta_1 .$$

Se r é pari, ϑ_1 é primo con ϑ_r e quindi deve aversi:

(5.4) $$\begin{cases} M = m\vartheta_1 & (m \text{ intero}) \\ k = m\vartheta_r , \end{cases}$$

dalla (5.2) si ha allora:

(5.5) $$2\tau_1 = m\,q\vartheta_r\left[m(q^2\vartheta_{r-3} - 1) + 1\right] .$$

Se r é dispari, r = 2s + 1, risulta $\vartheta_r/\vartheta_1 = \sum_{i=0}^{s} q^{2i} = \vartheta_{s,q^2}$.

La (5.3) allora diventa:

(5.6) $$k = M\vartheta_{s,q^2} ,$$

da ciò e dalla (5.2) si ha poi:

(5.7) $$2\tau_1 = Mq\vartheta_{s,q^2}\left[M(q\vartheta_{s-1,q^2} - 1) + 1\right] .$$

Sia ora K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(N)^!_{d+1}$. Dalle $(2.5)_I$ e $(2.5)_{II}$ si trae:

(5.8) $$k = N\gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} ,$$

quindi, affinché esista un tale insieme, occorre che il secondo membro della (5.8) sia un intero. Dalle $(2.5)_{III}$ e (5.8) si ha:

(5.9) $$2\tau_d = k\left[k - \vartheta_{r-d-1}N + q\vartheta_{r-d-2}\right] .$$

Per d = 1, la (5.8) diventa:

(5.10) $$k = N\vartheta_r\vartheta_{r-1}/\vartheta_2\vartheta_1 .$$

Per r = 3, si ha:

$(5.10)_3$ $$k = N(q^2 + 1) .$$

Per r = 4, si ha:

$(5.10)_4$ $$k = N\vartheta_4(q^2 + 1)/\vartheta_2 ;$$

dato che ϑ_2 e ϑ_4 sono primi tra loro, e così pure ϑ_2 e (q^2+1), la $(5.10)_4$ implica che ϑ_2 deve dividere N, cioé $N = n\cdot\vartheta_2$ (n intero), ma é $N \leq \vartheta_2$, quindi o $n = 0$, oppure $n = 1$, ossia o $N = 0$ ed allora $K \neq \emptyset$, oppure é $N = \vartheta_2$ ed allora $K = \mathcal{G}_{r,1,q}$. Ne segue che non esiste in PG(r,q), con $r \geq 4$, una famiglia $\mathcal{F}$ di rette tale che ogni piano rigato contenga un fissato numero N di rette della famiglia, con $0 < N < \vartheta_2$ (in quanto, se PG(4,q) é un dato sottospazio di PG(r,q), la famiglia $\mathcal{F}'$ delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a PG(4,q) avrebbe come immagine in $\mathcal{G}_{4,1,q}$ un insieme di tipo $(N)'_2$, con $0 < N < \vartheta_2$, e ciò é assurdo, come si é visto). Si ha, dunque, che:

VIII. - _In $\mathcal{G}_{r,1,q}$, con $r \geq 4$, non esistono k-insiemi ad un sol carattere rispetto a $\Sigma'_2 = \mathcal{P}$, diversi dall'insieme vuoto e da $\mathcal{G}_{r,1,q}$._

Dalla proposizione precedente, per dualità, si deduce:

IX. - _In $\mathcal{G}_{r,r-2,q}$, con $r \geq 4$, non esistono k-insiemi ad un sol carattere rispetto a Σ_2 diversi dal $\emptyset$ e da $\mathcal{G}_{r,r-2,q}$._

Ritornando al caso generale per d, supponiamo che K sia di tipo $(M)_{r-d}$ e di tipo $(N)'_{d+1}$. Devono allora essere contemporaneamente vere le (5.1), (5.8) e le (5.2), (5.9) e quindi, se é $K \neq \emptyset$, cioé $k \neq 0$:

$$M\,\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d = N\,\gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \qquad , \tag{5.11}$$

$$-\vartheta_d M + q\,\vartheta_{d-1} = -\vartheta_{r-d-1}N + q\cdot\vartheta_{r-d-2} \qquad , \tag{5.12}$$

da cui si ha (eliminando M):

$$N\left[(\vartheta_{r-d-1})^2\gamma_{r,d-1} - (\vartheta_d)^2\gamma_{r,d+1}\right] = \tag{5.13}$$

$$= q(\vartheta_{r-d-2} - \vartheta_{d-1})\,\gamma_{r,d-1}\,\vartheta_{r-d-1}$$

e quindi o é $\vartheta_{r-d-2} - \vartheta_{d-1} = 0$ e cioé $r = 2d+1$, ma allora la (5.13) risulta una identità (essendo $\gamma_{2d+1,d-1} = \gamma_{2d+1,d+1}$) e dalla (5.11) si ha $M = N$; oppure é $\vartheta_{r-d-2} - \vartheta_{d-1} \neq 0$ e cioé

$r \neq 2d+1$, ma allora dalla (5.13) si trae (con facili calcoli) $N = \vartheta_{d+1}$, cioé $K = \mathcal{G}_{r,d,q}$. Si é così provato che:

X. - <u>Se K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(M)_{r-d}$ e di tipo $(N)'_{d+1}$, allora o é $r = 2d+1$ ed $M = N$, oppure é $K = \emptyset$ o $K = \mathcal{G}_{r,d,q}$.</u>

Sia ora K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(1)_{r-d}$, cioé l'immagine su $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di una famiglia di S_d di $PG(r,q)$, tale che per ogni S_{d-1} di $PG(r,q)$ passi un solo S_d della famiglia. Allora K é, evidentemente, di classe $[0,1]'_{d+1}$. Se K é di tipo $(1)'_{d+1}$, per la proposizione X, deve essere $r = 2d+1$ e da (5.1) si ha $k = \gamma_{2d+1,d-1}/\vartheta_d$. In caso contrario, K é di tipo $(0,1)'_{d+1}$ ed allora dalle $(2.5)_I$, $(2.5)_{II}$ si ha $\tau'^{\,d+1}_{0,d} = \gamma_{r,d+1} - k\,\vartheta_{r-d-1}$ e quindi (dovendo essere $0 < \tau'^{\,d+1}_{0,d} < \gamma_{r,d+1}$) risulta:

$$0 < k < \gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \qquad ;$$

d'altra parte, é:

$$k = \gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \quad , \tag{5.14}$$

onde risulta (tenuto conto che $\gamma_{r,d-1}/\gamma_{r,d+1} = \vartheta_{d+1}\vartheta_d/\vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1}$) $\vartheta_{d+1} < \vartheta_{r-d}$ e quindi $r > 2d+1$. Per $d = 1$, la (5.14) diventa $k = \vartheta_r/\vartheta_1$, che é un intero soltanto se r é dispari; dunque, per r pari, non esistono k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,1,q}$ di tipo $(1)_{r-1}$, se r é dispari, $r = 2s+1$, per un siffatto k-insieme risulta:

$$k = \sum_{i=0}^{s} q^{2i} = \vartheta_{s,q^2} \quad , \quad (r = 2s+1) \tag{5.15}$$

si ha pertanto che:

XI. - <u>Per un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(1)_{r-d}$ due casi sono possibili: o esso é di tipo $(1)'_{d+1}$, ma allora é $r = 2d+1$, oppure é di tipo $(0,1)'_{d+1}$, ma allora é $r > 2d+1$; in ogni caso k é dato dalla (5.14). Se $d = 1$, tali insiemi non esistono se r é pari, se r é dispari, $r = 2s+1$, k é dato dalla (5.15) (un esempio al riguardo é for-</u>

nito dall'immagine su $\mathcal{G}_{r,1,q}$ delle rette di $PG(2s+1,q)$ che congiungono punti complessi coniugati nell'estensione quadratica del campo di Galois $GF(q)$).

6. - I k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ a due caratteri rispetto alle famiglie massimali Σ_{r-d}, Σ'_{d+1}.

Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$. Se K é di classe $[M_1, M_2]_{r-d}$, da (2.4) otteniamo:

$$(6.1) \qquad 2\tau_d = k^2 - k\left[1 + \vartheta_d(M_1 + M_2 - 1)\right] + M_1M_2\,\gamma_{r,d-1} \quad ,$$

$$(6.2) \qquad \begin{cases} \tau^{r-d}_{M_1,d} = (M_2\,\gamma_{r,d-1} - k\,\vartheta_d)/(M_2 - M_1) \quad , \\ \tau^{r-d}_{M_2,d} = (k\,\vartheta_d - M_1\,\gamma_{r,d-1})/(M_2 - M_1) \quad . \end{cases}$$

Da (6.2) si ha (essendo $\tau^{r-d}_{M_i,d} \geqslant 0$):

$$(6.3) \qquad M_1\,\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \leqslant k \leqslant M_2\,\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d \quad ,$$

il segno di eguaglianza a primo od a secondo membro avendosi se, e soltanto se, K é di tipo $(M_1)_{r-d}$ o di tipo $(M_2)_{r-d}$.

Se K é di classe $[N_1,N_2]'_{d+1}$, da (2.5) otteniamo:

$$(6.4) \qquad 2\tau_d = k^2 - k\left[1 + \vartheta_{r-d-1}(N_1 + N_2 - 1)\right] + N_1N_2\,\gamma_{r,d+1},$$

$$(6.5) \qquad \begin{cases} \tau'^{\,d+1}_{N_1,d} = (N_2\,\gamma_{r,d+1} - k\,\vartheta_{r-d-1})/(N_2 - N_1) \quad , \\ \tau'^{\,d+1}_{N_2,d} = (k\,\vartheta_{r-d-1} - N_1\,\gamma_{r,d+1})/(N_2 - N_1) \quad . \end{cases}$$

Da (6.5) si ha:

$$(6.7) \qquad N_1\,\gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \leqslant k \leqslant N_2\,\gamma_{r,d+1}/\vartheta_{r-d-1} \quad ,$$

il segno di eguaglianza a primo od a secondo membro avendosi se, e soltanto se, K é di tipo $(N_1)'_{d+1}$ o di tipo $(N_2)'_{d+1}$.

Se K é di tipo $(N)'_{d+1}$ e di classe $[M_1,M_2]_{r-d}$, dalla (6.1) e dalle (5.8), (5.9) otteniamo (tenuto conto che $\gamma_{r,d-1}/\gamma_{r,d+1} =$ $= \vartheta_{d+1}\vartheta_d/\vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1}$):

(6.8) $$N^2 - N\left[1 + (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d/\vartheta_{r-d-1}\right] + M_1M_2\vartheta_{d+1}\vartheta_d/\vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1} = 0.$$

La (6.8) per $r = 2d + 1$ diventa:

$$N^2 - N(M_1 + M_2) + M_1M_2 = 0 \quad ,$$

e quindi ammette le soluzioni $N = M_1$ ed $N = M_2$. Se $N = M_1$, si ha da (5.8) (posto ivi $r = 2d + 1$ e tenuto conto che $\gamma_{2d+1,d+1} =$ $= \gamma_{2d+1,d-1}$) $k = M_1\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d$, onde nella (6.3) vale il segno di eguaglianza a primo membro e quindi K é di tipo $(N)_{r-d}$. Analogamente, se $N = M_2$, da (5.8) si ha: $k = M_2\cdot\gamma_{r,d-1}/\vartheta_d$, onde nella (6.3) vale il segno di eguaglianza a secondo membro e, pertanto, K é di tipo $(N)_{r-d}$.

Se é $r \neq 2d + 1$ e K é diverso da $\emptyset$ e da $\mathcal{G}_{r,d,q}$, cioé $0 < N < \vartheta_{d+1}$, K non può essere ad un solo carattere rispetto a Σ_{r-d} (per la proposizione X), quindi é di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$. Allora, dalle (6.3), (5.8) otteniamo:

(6.9) $$M_1\vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d} < N < M_2\vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d} \quad .$$

Facili calcoli mostrano poi che, denotato con $f(N)$ il polinomio a primo membro della (6.8), risulta:

(6.10) $$f(M_1\vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) = M_1\vartheta_{d+1}(\vartheta_d - \vartheta_{r-d-1})(1 - M_1/\vartheta_{r-d})/\vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1},$$

(6.11) $$f(M_2\vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) = M_2\vartheta_{d+1}(\vartheta_d - \vartheta_{r-d-1})(1 - M_2/\vartheta_{r-d})/\vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1}.$$

Se $M_1 = 0$, da (6.8) si ha (supponendosi $N > 0$):

(6.12) $$N = 1 + (M_2 - 1)\vartheta_d/\vartheta_{r-d-1} \qquad (M_2 < \vartheta_{r-d}) ,$$

e quindi dalla (6.9) segue:

$$(q^{r-d} - q^{d+1})\vartheta_{r-d} < M_2(q^{r-d} - q^{d+1}) \quad ,$$

da cui, se $r - d > d + 1$, si trae l'assurdo $\vartheta_{r-d} < M_2$, onde deve essere $r < 2d + 1$.

Se $M_2 = \vartheta_{r-d}$, la (6.8) ammette, oltre la soluzione $N = \vartheta_{d+1}$

(cfr. (6.11)), che é da scartare, perché $N < \vartheta_{d+1}$, la soluzione:

(6.13) $$N = M_1 \vartheta_d / \vartheta_{r-d-1} \qquad (M_1 > 0).$$

Da ciò e dalla (6.9) si ha: $\vartheta_{d+1}\vartheta_{r-d-1} < \vartheta_d \vartheta_{r-d}$, cioé $q^{r-d} < q^{d+1}$ e quindi ancora $r < 2d + 1$.

Se $0 < M_1 < M_2 < \vartheta_{r-d}$ ed é $r > 2d + 1$, cioé $d < r - d - 1$, dalle (6.10), (6.11) si trae:

$$f(M_1 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) < 0 \quad , \quad f(M_2 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) < 0 \quad ;$$

quindi, se N é una qualsivoglia delle due soluzioni della (6.8), deve aversi $N > M_2 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}$ ovvero $N < M_1 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}$ e ciò é in contrasto con la (6.9). Pertanto, in ogni caso é $r < 2d + 1$. Concludendo, si ha:

XII. - <u>Se K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$, con $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathcal{G}_{r,d,q}$, di tipo $(N)'_{d+1}$ e di classe $[M_1,M_2]_{r-d}$, allora o é $r = 2d + 1$ e quindi K é di tipo $(N)_{r-d}$, oppure deve necessariamente essere $r < 2d + 1$ e quindi K é di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$, con M_1, M_2, N soddisfacenti alle (6.8), (6.9); inoltre, se $M_1 = 0$ od $M_2 = \vartheta_{r-d}$, N é dato, rispettivamente, dalla (6.12) o dalla (6.13).</u>

Procedendo in modo duale, si perviene alla seguente proposizione:

XIII. - <u>Se K é un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$, con $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathcal{G}_{r,d,q}$, di tipo $(M)_{r-d}$ e di classe $[N_1,N_2]'_{d+1}$, allora o é $r = 2d + 1$, e quindi K é di tipo $(M)'_{d+1}$, oppure deve necessariamente essere $r > 2d + 1$ e quindi K é di tipo $(N_1,N_2)'_{d+1}$, con N_1, N_2, M soddisfacenti alle:</u>

(6.14) $$M^2 - M\left[1 + (N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1}/\vartheta_d\right] + N_1 N_2 \vartheta_{r-d}\vartheta_{r-d-1}/\vartheta_{d+1}\vartheta_d = 0,$$

(6.15) $$N_1 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1} < M < N_2 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1} \quad ;$$

<u>inoltre, se $N_1 = 0$ od $N_2 = \vartheta_{d+1}$, M é dato, rispettivamente, da:</u>

(6.16) $$M = 1 + (N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1}/\vartheta_d \quad , \quad (N_1 < \vartheta_{d+1}),$$

(6.17) $$M = N_1 \vartheta_{r-d-1}/\vartheta_d \quad , \quad (N_2 < \vartheta_{d+1}).$$

Proviamo ora:

XIV. - In $\mathcal{G}_{r,1,q}$ non esistono k-insiemi di tipo $(M)_{r-1}$ e di tipo $(0,N)'_2$ se r é pari. Ne segue che in $\mathcal{G}_{r,1,q}$, con r pari, non esistono insiemi di tipo $(M)_{r-1}$ e di tipo $(N, \vartheta_2)'_2$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista un siffatto insieme K. Dalla prop.XIII si ha allora:

(6.18) $$M = 1 + (N - 1)\vartheta_{r-2}/\vartheta_1 \qquad (N < \vartheta_2) .$$

Dato che r é pari, sarà (cfr. (5.4)):

(6.19) $$M = m\vartheta_1 \qquad \text{(m intero positivo)};$$

inoltre, ϑ_1 e ϑ_{r-2} sono primi tra loro, onde (dovendo essere un intero $(N - 1)\vartheta_{r-2} / \vartheta_1$):

(6.20) $$N = 1 + n\vartheta_1 \qquad \text{(n intero positivo)}.$$

Dalla (6.18), in forza delle (6.19) e (6.20), si ha:

$$m\vartheta_1 = 1 + n \cdot \vartheta_{r-2}$$

e quindi: $1 + n \equiv 0 \pmod{\vartheta_1}$, ossia

(6.21) $$n = -1 + a\vartheta_1 \qquad \text{(a intero positivo)};$$

dalle (6.20) e (6.21) si trae:

$$N = 1 - \vartheta_1 + a\vartheta_1^2 = -q + a\vartheta_1^2 .$$

Essendo $N < \vartheta_2$ (cfr. (6.18)), sarà: $-q + a\vartheta_1^2 < \vartheta_2$, cioé $a\vartheta_1^2 < \vartheta_1^2$, ossia l'assurdo. Si ha così l'asserto. Si noti che, per r dispari, esistono di fatto insiemi di tipo $(M)_{r-1}$ e di tipo $(0,N)'_2$ per particolari valori di N (cfr. prop. IX).

XV. - In $\mathcal{G}_{r,1,q}$, con $r = 3s + 2$, non esistono k-insiemi di tipo $(M)_{r-1}$ e di tipo $(N_1,N_2)'_2$, con N_2 primo con ϑ_2 (ad esempio, $N_2 = 1, 2^t, q, q + 1, q^2 + q - 1, q^2 + q$), se r é pari; sono di tipo $(0,N_2)'_2$ se r é dispari.

Dimostrazione. La (6.14) per $d = 1$ diventa:

$$\vartheta_1 \vartheta_2 M^2 - M\vartheta_2\left[\vartheta_1 + (N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-2}\right] + N_1N_2\vartheta_{r-1}\vartheta_{r-2} = 0 ,$$

onde $N_1N_2 \vartheta_{r-1}\vartheta_{r-2}$ é un multiplo di ϑ_2. D'altra parte, N_2, $\vartheta_{r-1} =$

$= \vartheta_{3s+1}$, $\vartheta_{r-2} = \vartheta_{3s}$ sono primi con ϑ_2, onde $N_1 = a\,\vartheta_2$ (a intero). Ma $N_1 < \vartheta_2$, quindi deve essere $a = 0$. Pertanto, K é di tipo $(0,N_2)^!_2$; dalla prop. precedente segue allora l'asserto.

Per complementarizzazione, da XV si ha:

XVII. - <u>In $\mathcal{G}_{r,1,q}$, con $r = 3s + 2$, non esistono k-insiemi di tipo $(M)_{r-1}$ e di tipo $(N_1,N_2)^!_2$, con N_1 primo con ϑ_2 se r é pari; sono di tipo $(N_1,\vartheta_2)^!_2$ se r é dispari.</u>

Rimane da esaminare il caso in cui K sia di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$ e di tipo $(N_1,N_2)^!_{d+1}$ (onde $K \neq \emptyset$ e $K \neq \mathcal{G}_{r,d,q}$). In tale eventualità, sussistono contemporaneamente le (6.1) e (6.4), da cui si trae:

$$(6.21)\qquad k\left[(N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} - (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d\right] = N_1N_2\,\gamma_{r,d+1} - M_1M_2\,\gamma_{r,d-1}.$$

Due casi sono allora possibili, a seconda che

$$(6.22)\qquad (N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} = (M_1 + M_2 - 1)\,\vartheta_d \iff$$

$$\iff N_1N_2\,\gamma_{r,d+1} = M_1M_2\,\gamma_{r,d-1} \qquad ,$$

oppure:

$$(6.23)\qquad (N_1 + N_2 - 1)\,\vartheta_{r-d-1} - (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d \neq 0 \;.$$

Se vale la (6.23), dalla (6.21) si ha (tenuto conto che $\gamma_{r,d+1} = \gamma_{r,d-1}\,\vartheta_{r-d}\,\vartheta_{r-d-1}/\vartheta_{d+1}\vartheta_d$):

$$(6.24)\qquad k = \gamma_{r,d-1}\,\frac{N_1N_2\,\vartheta_{r-d}\,\vartheta_{r-d-1} - M_1M_2\,\vartheta_{d+1}\vartheta_d}{\vartheta_d\,\vartheta_{d+1}\left[(N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} - (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d\right]},$$

che per $r = 2d + 1$ diventa:

$$(6.25)\qquad k = \gamma_{r,d-1}\,\frac{N_1N_2 - M_1M_2}{\vartheta_d\left[(N_1 + N_2) - (M_1 + M_2)\right]}\quad , \qquad (r = 2d + 1).$$

La (6.24), sostituita in (6.3), dà:

$$(6.26)\qquad M_1 < \frac{N_1N_2\,\vartheta_{r-d}\,\vartheta_{r-d-1} - M_1M_2\,\vartheta_{d+1}\,\vartheta_d}{\vartheta_{d+1}\left[(N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} - (M_1 + M_2 - 1)\,\vartheta_d\right]} < M_2 \;,$$

e sostituita in (6.7) dà:

$$(6.27) \qquad N_1 < \frac{N_1 N_2 \vartheta_{r-d} \vartheta_{r-d-1} - M_1 M_2 \vartheta_{d+1} \vartheta_d}{\vartheta_{r-d} \left[(N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} - (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d\right]} < N_2 \ .$$

Se vale la (6.22), si ha:

$$(6.28) \qquad \begin{cases} N_1 N_2 = M_1 M_2 \vartheta_{d+1} \vartheta_d / \vartheta_{r-d} \vartheta_{r-d-1} \\ N_1 + N_2 = 1 + (M_1 + M_2 - 1)\vartheta_d / \vartheta_{r-d-1} \end{cases}$$

ed anche:

$$(6.28') \qquad \begin{cases} M_1 M_2 = N_1 N_2 \vartheta_{r-d} \vartheta_{r-d-1} / \vartheta_{d+1} \vartheta_d \\ M_1 + M_2 = 1 + (N_1 + N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1} / \vartheta_d \end{cases} ,$$

quindi N_1, N_2 sono soluzioni dell'equazione (6.8) ed M_1, M_2 sono soluzioni della (6.14).

Se $r > 2d + 1$ ed $M_1 \neq 0$, $M_2 \neq \vartheta_{r-d}$, dalle (6.10) e (6.11) si ha $f(M_1 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) < 0$ ed $f(M_2 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d}) < 0$ e quindi (dato che N_1, N_2 sono soluzioni dell'equazione $f(N) = 0$) dovrà aversi:

$$(6.29) \qquad N_1 < M_1 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d} < M_1 \ , \quad N_2 > M_2 \vartheta_{d+1}/\vartheta_{r-d} \ .$$

Se $r < 2d + 1$ ed $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq \vartheta_{d+1}$, denotato con $g(M)$ il polinomio a primo membro della (6.14), risulta $g(N_1 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1}) < 0$, $g(N_2 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1}) < 0$ e così (dato che M_1, M_2 sono soluzioni dell'equazione $g(M) = 0$) dovrà aversi:

$$(6.30) \qquad M_1 < N_1 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1} < N_1 \ , \quad M_2 > N_2 \vartheta_{r-d}/\vartheta_{d+1} \ .$$

Quale che sia r, si ha poi dalla (6.28):

$$(6.31) \qquad M_1 = 0 \implies N_1 = 0 \ , \quad N_2 = 1 + (M_2 - 1)\vartheta_d/\vartheta_{r-d-1} \ ,$$

$$(6.32) \qquad M_2 = \vartheta_{r-d} \implies N_2 = \vartheta_{d+1} \ , \quad N_1 = M_1 \vartheta_d/\vartheta_{r-d-1} \ ,$$

e dalle (6.28'):

$$(6.31') \qquad N_1 = 0 \implies M_1 = 0 \ , \quad M_2 = 1 + (N_2 - 1)\vartheta_{r-d-1}/\vartheta_d \ ,$$

$$(6.32') \qquad N_2 = \vartheta_{d+1} \implies M_2 = \vartheta_{r-d} \ , \quad M_1 = N_1 \vartheta_{r-d-1}/\vartheta_d \ .$$

Se $r = 2d + 1$, dalle (6.28) segue:

$$(6.33) \qquad M_1 = N_1 \ , \quad M_2 = N_2 \ , \quad (r = 2d + 1) \ .$$

Riassumendo i risultati ora ottenuti, si ha:

XVII. - Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(M_1,M_2)_{r-d}$ e di tipo $(N_1,N_2)'_{d+1}$. Due casi sono possibili: o vale la (6.22), oppure la (6.23). In questa seconda eventualità, k é dato dalla (6.24) e sussistono le (6.26) e (6.27). Nell'ipotesi (6.22), si hanno, intanto, le (6.31), (6.32) e (6.31'), (6.32'); supposto poi $M_1 > 0$ ed $M_2 < \vartheta_{r-d}$, se é $r > 2d+1$, valgono le (6.29); se é $r < 2d+1$, valgono le (6.30): se é $r = 2d+1$, risulta $M_1 = N_1$, $M_2 = N_2$.

Osserviamo, infine, che, ragionando come nel secondo capoverso del n. 3, si ha:

XVIII. - In $\mathcal{G}_{r,d,q}$ non esistono insiemi di tipo $(0,\vartheta_{r-d})_{r-d}$ né insiemi di tipo $(0,\vartheta_{d+1})'_{d+1}$.

7. - I k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$ con $1 \leq s \leq r-d-1$.

Premettiamo la seguente proposizione:

XIX. - Un k-insieme K di $PG(r,q)$ di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$, con $1 \leq s \leq r-1$, esiste soltanto se $s = 1$ ed $m = 1$ od $m = q$ e nei due casi K é un sottospazio S_t di $PG(r,q)$, con $1 \leq t \leq r-2$, od il complementare di S_t.

Dimostrazione. Se $s > 1$, sia S_{s-1} un sottospazio di $PG(r,q)$ tale che $|S_{s-1} \cap K| = m_1$, con $0 < m_1 < \vartheta_{s-1}$. Ciascun S_s per l' S_{s-1} ha in comune con K esattamente $m - m_1$ punti non in S_{s-1} (in quanto non può essere $|K \cap S_s| = 0$, perché $m_1 > 0$, né $|K \cap S_s| = \vartheta_s$, perché $m_1 < \vartheta_{s-1}$). Ne segue che $(m - m_1)\vartheta_{r-s} = k - m_1$, da cui $m_1 = (m\vartheta_{r-s} - k)/(\vartheta_{r-s} - 1)$, onde m_1 non dipende dall' S_{s-1} considerato. Se ne deduce che K é di tipo $(0,m_1,\vartheta_{s-1})_{s-1}$. Procedendo per induzione decrescente, si ha allora che K é di tipo $(0,n,\vartheta_1)_1$.

Sia α un piano contenente una retta esterna a K ed un punto di K. L'insieme $\alpha \cap K$, in α, é evidentemente di tipo $(0,n)_1$, onde é $n = p^a$ (a intero non negativo). Analogamente, se β é un piano contenente una retta di K ed un punto non di K, l'insieme $\beta \cap K$, in β, é di tipo $(n, \vartheta_1)_1$, onde é $q + 1 - n = p^b$ (b intero non negativo). Deve allora essere $q + 1 - p^a = p^b$, e ciò può aversi soltanto se $a = 0$, ossia $n = 1$, ovvero $b = 0$, ossia $n = q$. Pertanto, K é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$, ovvero di tipo $(0,q,\vartheta_1)_1$, ma, in questo secondo caso, il suo complementare é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$. Se K é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$, esso coincide con un sottospazio S_t, che ammette rette esterne e rette appartenenti, onde deve essere $1 \leq t \leq r - 2$. D'altra parte, un S_t può essere di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$ soltanto se $s = 1$ ed $m = 1$. Ne segue l'asserto.

Sia K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(0,m,\vartheta_1)_1$. Per ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$, si ha che $K \cap T_{r-d}$ é un insieme di T_{r-d} di classe $[0,m,\vartheta_1]_1$. Quindi, se $r - d \geq 3$, per la proposizione precedente e per le proposizioni I, XIV e XV di [2], risulta $m = 1$, ovvero $m = q$.

Se $r - d = 2$ e $d \geq 2$, ogni $T'_{d+1} \in \Sigma'_{d+1}$ incontra K in un insieme di classe $[0,m,\vartheta_1]'_1$ in T'_{d+1} e quindi (essendo $d + 1 \geq 3$) si ha ancora $m = 1$, ovvero $m = q$ (sempre per la XIX e I, XIV, XV di [2]).

Se $r - d = 2$ e $d = 1$, cioé se $r = 3$ e $d = 1$, supposto $2 \leq m \leq q - 1$, ogni piano α di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ che contenga una m-secante di K incontra K in un insieme necessariamente di tipo $(0,m)_1$ o di tipo $(m,\vartheta_1)_1$ in α. Se $K \cap \alpha$ é di tipo $(0,m)_1$ (in modo analogo si procede nell'altro caso), risulta $m = p^a$, con a intero positivo. Ma allora ogni altro piano α' di $\mathcal{G}_{3,1,q}$, che contenga una m-secante di K, incontra K in un insieme di tipo $(0,m)_1$ (in quanto, se l'incontrasse in un insieme di tipo $(m,q+1)_1$, si avrebbe $q + 1 - m = p^b$, con b positivo, e ciò é assurdo, essendo $m = p^a$). Sia ℓ una retta appartenente a K (certo esistente perché K é di tipo $(0,m,\vartheta_1)_1$), ciascuno dei due piani β_1, β_2 di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ per essa, per quanto precede, appartiene interamente a K. Sia allora P un qualsiasi punto di $\mathcal{G}_{3,1,q}$, non su β_1; esiste - come é ben noto - un (unico) piano π di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ che incontra β_1 secondo una retta t; poiché $t \subseteq K$, il piano appartiene a K e quindi $P \in K$: dunque, $K = \mathcal{G}_{3,1,q}$ e ciò é assurdo. Ne segue, anche ora, che é $m = 1$, ovvero $m = q$.

In ogni caso, pertanto, K é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$, ovvero di tipo $(0,q,\vartheta_1)_1$ ed in questa seconda eventualità il complementare di K é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$. Se ne deduce:

XX. - Ogni k-insieme K di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(0,m,\vartheta_1)_1$ é tale che $m = 1$, ovvero $m = q$. Se $m = 1$, K é l'immagine di una famiglia $\mathcal{J}$ di S_d di PG(r,q) tale che per ogni S_{d-1} di PG(r,q) gli S_d della famiglia per l' S_{d-1} costituiscono una stella t-dimensionale (con $-1 \leq t \leq r-d$, t dipendente dall' S_{d-1}) ed esistono fasci di S_d che con $\mathcal{J}$ non hanno elementi in comune, ne hanno uno solo, od appartengono ad $\mathcal{J}$. Se $m = q$, K é il complementare dell'insieme precedente.

Sia ora K un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$, con $2 \leq s \leq r-d-1$. Ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$ incontra K in un insieme di classe $[0,m,\vartheta_s]_s$ in T_{r-d}. Per la proposizione XIX, essendo $s \geq 2$, $K \cap T_{r-d}$ o é l'insieme vuoto, oppure é tutto T_{r-d}, oppure é un insieme di tipo $(0,m)_s$ o di tipo $(m,\vartheta_s)_s$ in T_{r-d}. Se $K \cap T_{r-d}$ é di tipo $(0,m)_s$, per la prop. XIV di [2] (essendo $r - d \geq 3$), esso é un punto, onde $m = 1$, oppure il complementare di un punto, onde $m = q^s$. Se $K \cap T_{r-d}$ é di tipo $(m,\vartheta_s)_s$, per la prop. XV di [2] , esso é il complementare di un punto, onde $m = \vartheta_s - 1$, oppure un iperpiano T_{r-d-1} di T_{r-d}, onde $m = \vartheta_{s-1}$. Pertanto, o K é di tipo $(0,1,\vartheta_s)_s$, ed allora ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$, con $\emptyset \neq K \cap T_{r-d} \neq T_{r-d}$, incontra K in un punto, o K é di tipo $(0,\vartheta_{s-1},\vartheta_s)_s$ ed allora ogni $T_{r-d} \in \Sigma_{r-d}$, con $\emptyset \neq K \cap T_{r-d} \neq T_{r-d}$, incontra K in un iperpiano; oppure K é di tipo $(0,\vartheta_s - 1,\vartheta_s)_s$ o di tipo $(0,q^s,\vartheta_s)_s$, ma allora é il complementare di un insieme di tipo $(0,1,\vartheta_s)_s$ o di tipo $(0,\vartheta_{s-1},\vartheta_s)_s$. Ne segue:

XXI. - Un k-insieme di $\mathcal{G}_{r,d,q}$ di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$, con $2 \leq$

$s \leq r - d - 1$, é necessariamente di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$ o di tipo $(0,q,\vartheta_1)_1$. Se é di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$, risulta $m = 1$, ovvero $m = \vartheta_{s-1}$. Se $m = 1$, K é l'immagine di una famiglia $\mathcal{J}_1$ di S_d di $PG(r,q)$ tale che, per ogni S_{d-1} di $PG(r,q)$, o non passano S_d della famiglia, o ne passa uno solo, o tutti gli S_d per l' S_{d-1} appartengono alla famiglia. Se $m = \vartheta_{s-1}$, K é l'immagine di una famiglia $\mathcal{J}_2$ di S_d di $PG(r,q)$ tale che per ogni S_{d-1} di $PG(r,q)$ o non passano S_d della famiglia, o tutti gli S_d per l' S_{d-1} appartengono alla famiglia, oppure gli S_d della famiglia per l' S_{d-1} costituiscono una stella $(r - d - 1)$-dimensionale. Se K é di tipo $(0,q,\vartheta_1)_1$, il suo complementare coincide con uno degli insiemi suddetti.

Le proposizioni XX e XXI si dualizzano, dando luogo a proposizioni l'enunciato delle quali é lasciato al Lettore.

Proviamo infine che:

XXII. - In $\mathcal{G}_{r,1,q}$ un k-insieme K di tipo $(0,m,\vartheta_s)_s$, con $2 \leq s \leq r - 2$, é necessariamente l'immagine su $\mathcal{G}_{r,1,q}$ di una stella di rette (cioé $K = T_{r-1} \in \Sigma_{r-1}$) o della famiglia delle rette di un fissato iperpiano di $PG(r,q)$, oppure il complementare di uno di questi insiemi. Ne segue, per dualità, che in $\mathcal{G}_{r,r-2,q}$ un k-insieme di tipo $(0,m,\vartheta_s)'_s$, con $2 \leq s \leq r - 2$, é necessariamente l'immagine su $\mathcal{G}_{r,r-2,q}$ della famiglia degli S_{r-2} di un fissato iperpiano, o della famiglia degli S_{r-2} per un fissato punto, oppure il complementare di uno di tali insiemi.

Dimostrazione. Per la prop. XXI, K é l'immagine o di una famiglia $\mathcal{J}_1$ (ed allora $m = 1$), o di una famiglia $\mathcal{J}_2$ (ed allora $m = \vartheta_{s-1}$) di rette di $PG(r,q)$, oppure il complementare di uno di tali insiemi.

Se K é l'immagine di una famiglia $\mathcal{J}_1$, esiste necessariamente una stella di rette, di centro P, in $PG(r,q)$ tutta appartenente ad $\mathcal{J}_1$ (infatti, se così non fosse, $\mathcal{J}_1$ sarebbe costituita da rette a due a due sghembe, ma allora K sarebbe di tipo $(0,1)_s$ e non di tipo $(0,1,\vartheta_s)_s$).

Se esistesse una retta t di $\mathcal{J}_1$ non passante per P, per ogni $P' \in t$ passerebbero almeno due rette di $\mathcal{J}_1$ (la t e la PP'), onde tutta la stella di centro P' apparterrebbe ad $\mathcal{J}_1$. Ne seguirebbe che per ogni altro punto P" di PG(r,q) passerebbero almeno due rette di $\mathcal{J}_1$ (la PP' e la P'P"), onde tutta la stella di centro P" apparterrebbe ad $\mathcal{J}_1$, cioé $K = \mathcal{G}_{r,1,q}$, e ciò é escluso. Se ne deduce che $\mathcal{J}_1$ coincide con la stella di centro P.

Se K é l'immagine di una famiglia $\mathcal{J}_2$, esiste necessariamente un punto di PG(r,q) per cui non passano rette di $\mathcal{J}_2$ (altrimenti K sarebbe di tipo $(\vartheta_{s-1}, \vartheta_s)_s$ e non di tipo $(0, \vartheta_{s-1}, \vartheta_s)_s$); ma allora per ogni punto P di PG(r,q) o non passano rette di $\mathcal{J}_2$, ovvero l'unione delle rette di $\mathcal{J}_2$ per P é un iperpiano π, che diremo polare di P. Dato che $\mathcal{J}_2 \neq \emptyset$, esiste un punto P che presenta la seconda eventualità. Per ogni fissato $P' \in \pi \setminus \{P\}$, la retta PP' appartiene ad $\mathcal{J}_2$, dunque esiste l'iperpiano polare π' di P'.

Sia α un piano per PP' appartenente a $\pi \cap \pi'$. Poiché i due fasci di rette di centri P e P' di α appartengono ad $\mathcal{J}_2$, tutte le rette di α appartengono ad $\mathcal{J}_2$ (essendo K di tipo $(0,1,\vartheta_1)_1$). Quindi tutte le rette contenute in $\pi \cap \pi'$ ed incidenti PP' appartengono ad $\mathcal{J}_2$. Ne segue che l'iperpiano polare di ogni punto di PP' contiene $\pi \cap \pi'$.

Due casi sono possibili, a seconda che $\pi = \pi'$, oppure $\pi \neq \pi'$. Se $\pi = \pi'$, per quanto precede, l'iperpiano polare di ogni punto $\bar{P}$ di PP' coincide con π. Supponiamo allora che esista una retta t di $\mathcal{J}_2$ non su π. Se $T \in t$, l'iperpiano polare $\bar{\pi}$ di T incontra PP' in un punto $\bar{P}$ il cui iperpiano polare, che é π, deve contenere la $\bar{P}T$ e ciò é assurdo. Ne segue che $\mathcal{J}_2$ é costituita dalla famiglia delle rette di π.

Se $\pi \neq \pi'$, l'iperpiano polare di ogni punto di PP' contiene l' $S_{r-2} = \pi \cap \pi'$ e punti distinti hanno iperpiani polari distinti. Ne segue che é biunivoca la corrispondenza tra i punti della retta PP' e gli iperpiani del fascio di asse l' $S_{r-2} = \pi \cap \pi'$ che ad ogni punto di PP' fa corrispondere il relativo iperpiano polare. Ma allora per ogni punto dello spazio passerebbe qualche retta di $\mathcal{J}$, cioé ogni punto ammetterebbe iperpiano polare e ciò é escluso. E' quindi assurdo il caso $\pi \neq \pi'$. Si ha così l'asserto.

Sia $\mathcal{S}$ la famiglia di tutti i sottospazi non vuoti di PG(r,q). Chiameremo <u>polarità nulla generalizzata</u> una applicazione:

$$(7.1) \qquad p : P \in PG(r,q) \longrightarrow \pi_P \in \mathcal{S} ,$$

tale che:

$$(7.2) \qquad P \in \pi_P , \quad \text{per ogni } P \in PG(r,q) ,$$

$$(7.3) \qquad P \in \pi_Q \Longleftrightarrow Q \in \pi_P , \qquad P, Q \in PG(r,q) .$$

Una retta t di PG(r,q) sarà detta <u>isotropa</u> rispetto a p se per un punto P di t si ha $t \subseteq \pi_P$ (ed allora ciò accade per ogni punto P di t).

Evidentemente, la famiglia $\mathcal{J}$ delle rette isotrope di p ha come immagine su $\mathcal{G}_{r,1,q}$ un insieme di classe $[0,1,\vartheta_1]_1$. Viceversa, se $\mathcal{J}$ é una famiglia di rette di PG(r,q) controimmagine di un insieme di classe $[0,1,\vartheta_1]_1$ di $\mathcal{G}_{r,1,q}$, facendo corrispondere ad ogni P di PG(r,q) l'unione delle rette di $\mathcal{J}$ per P (che é un sottospazio), si ottiene una polarità nulla generalizzata. Pertanto, lo studio dei k-insiemi di classe $[0,1,\vartheta_1]_1$ di $\mathcal{G}_{r,1,q}$ é ricondotto a quello delle polarità nulle generalizzate.

Bibliografia

[1] B. SEGRE, Lectures on modern geometry, Cremonese Ed. Roma, 1961.

[2] G. TALLINI, Problemi e Risultati sulle geometrie di Galois, Relaz. N. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli (1973), pp. 1 - 30.

[3] G. TALLINI, Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space, Atti Convegno Teorie Combinatorie (Roma, 3 - 15 Settembre 1973), tomo II, Acc. Naz. Lincei (1976), pp. 153 - 165.

[4] G. TALLINI, I k-insiemi di rette di uno spazio di Galois studiati rispetto ai fasci di rette, Quaderno Semin. Geometrie Combinatorie, Univ. Roma, n. 28 (Settembre 1980).

[5] M. TALLINI SCAFATI, {k,n}-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri, Note I, II, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 40 (1966), 812 - 818, 1020 - 1025.

[6] M. TALLINI SCAFATI, Calotte di tipo (m,n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 53 (1973), pp. 71 - 81.

[7] M. TALLINI SCAFATI, Sui k-insiemi di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ a due soli caratteri nella dimensione d, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 60 (1976), pp. 782 - 788.

[8] J.A. THAS, A combinatorial problem, Geometriae Dedicata 1 (1973), pp. 236 - 240.

Indice