Convegno su:"SISTEMI BINARI E LORO APPLICAZIONI",Taormina (ME) 1978

IPERGRUPPOIDI DI STEINER E GEOMETRIE COMBINATORIE

Giuseppe TALLINI (*)

Sia H un insieme non vuoto , denotato con P'(H) l'insieme delle parti non vuote di H , chiameremo <u>ipergruppoide</u> di sostegno H la coppia (H,*) , ove :

(1) $\quad * : H\times H \longrightarrow P'(H)$

é un'applicazione di H×H in P'(H) . Il corrispondente di $(x,y)\in H\times H$ mediante la (1) si dirà prodotto di x per y e si denoterà con xy. Un ipergruppoide (H,*) prende il nome di <u>ipergruppo</u> se :

(2) $\quad \forall a\in H\ ,\quad aH = Ha = H$ (proprietà del quoziente)

(3) $\quad \forall a,b,c\in H\ ,\quad (ab)c = a(bc)$ (proprietà associativa).

Se , per ogni x,y di H , la parte xy di H é costituita da un sol elemento , l'ipergruppoide risulta un gruppoide , l'ipergruppo risulta un gruppo .

Un sottoipergruppoide di H é un sottoinsieme K di H tale che rispetto alla restrizione del prodotto in K risulta un ipergruppoi= de, cioé é un sottoinsieme K non vuoto di H tale che:

(4) $\quad \forall x,y\in K\ ,\qquad xy\subseteq K$.

Denotato con $\mathcal{C}$ la famiglia costituita dal $\emptyset$ e dai sottoipergrup= poidi di H , si prova subito che $\mathcal{C}$ é un sistema di chiusura, al quale rimane dunque associato il suo operatore di chiusura $\overline{} : X\subseteq H \longrightarrow \overline{X}\subseteq H$. Se esso é combinatorio si dirà che H é un iper= gruppoide combinatorio , e ciò si verifica se , e soltanto se ,ri=

(*) Istituto Matematico "G.Castelnuovo" , Università di Roma , 00100 ROMA .

sulta:

(5) $\forall x \in H$, $xx = \{x\}$,

(6) $\forall x,y \in H$, $\forall X \subseteq H$ $x \notin \bar{X}$, $x \in \overline{y \cup X} \Longrightarrow y \in \overline{x \cup X}$.

In questa conferenza ci occuperemo degli <u>n-ipergruppoidi di Steiner</u>, così chiamandosi un ipergruppoide H soddisfacente alle seguenti condizioni:

(7) $\forall x,y \in H$, $x,y \in xy$,

(8) $\forall x,y \in H$, $|xy| = \begin{cases} 1 & \text{se } x=y, \\ n & \text{se } x \neq y, \end{cases}$

(9) valga la proprietà associativa per ogni terna di elementi non tutti distinti.

Dalla (7) si ha facilmente che:

(10) $\forall a \in H$, $aH = Ha = H$.

Dalle (7) e (8) segue subito che:

(11) $\forall x \in H$, $xx = \{x\}$,

(12) $n \geq 2$.

Dalle (9) e (11) si ottiene subito che:

(13) $\forall x,y \in H$, $x(xy)=xy=(xy)y$, $x(yx)=(xy)x$.

Dalla (13) si può provare che:

(14) $\forall x,y \in H$, $x \neq y$, $\forall z,t \in xy$, $z \neq t \Longrightarrow xy = zt$.

Dalla (14) segue poi subito che:

(15) $\forall x,y \in H$, $xy = yx$ (proprietà commutativa).

Ricordiamo che definiscesi <u>n-sistema di Steiner</u> una coppia $(H,\mathcal{R})$, ove H é un insieme non vuoto, i cui elementi diconsi punti, ed $\mathcal{R}$ é una famiglia di parti di H, da dirsi rette, tale che ogni retta abbia n punti e per due punti distinti di H passi una e una sola retta. Ogni spazio proiettivo o affine su un campo di Galois d'ordine q, rispetto alle sue rette, dà un esempio di n-sistema di Steiner con n=q+1 ovvero n=q; ma come é ben noto questi non sono i soli esempi. Sia $(H,\mathcal{R})$ un n-sistema di Steiner; si definisca, per ogni $x,y \in H$, il prodotto xy nel modo seguente:

(16) $$xy = \begin{cases} x & \text{se } x=y \\ \text{retta per } x \text{ e } y & \text{se } x\neq y \end{cases}.$$

In tal modo $(H,*)$ costituisce un n-ipergruppoide di Steiner , come subito si verifica, che si dirà associato ad $(H,\boldsymbol{R})$.

Sia ora dato un n-ipergruppoide di Steiner $(H,*)$, denotato con Δ_H la diagonale di $H\times H$, si consideri la famiglia di parti di H data da:

(17) $$\{xy\}_{(x,y)\in H\times H-\Delta_H}$$

e sia $\boldsymbol{R}$ la famiglia propria ad essa associata . Allora <u>$(H,\boldsymbol{R})$ é un n-sistema di Steiner</u> . Infatti ogni elemento di $\boldsymbol{R}$ ha cardinalità n per la (8) , per ogni coppia di punti distinti di H passa almeno una retta , elemento di $\boldsymbol{R}$, per la (7) (dato dal prodotto dei due punti). Proviamo che per $x,y\in H$, con $x\neq y$, passa un sol elemento di $\boldsymbol{R}$: se r ed s sono elementi di $\boldsymbol{R}$ passanti per x e y , sarà $r=zt$ (con $z,t\in H$, $z\neq t$) ed $s=uv$ (con $u,v\in H$, $u\neq v$), in forza della (14), che vale per $(H,*)$si ha allora (essendo $x,y\in r=zt$ e $x,y\in s=uv$): $r = zt = xy$ ed $s = uv = xy$, onde $r= s$.

Le due nozioni di n-sistema di Steiner e di n-ipergruppoide di Steiner sono dunque equivalenti .

Se $(H,*)$ é un n-ipergruppoide di Steiner , ogni suo sottoipergruppoide é ancora un n-ipergruppoide di Steiner, quindi il sistema di chiusura $\boldsymbol{C}$ é costituito dal vuoto e da n-ipergruppoidi di Steiner . Questi ultimi corrispondono ai sottosistemi di Steiner di $(H,\boldsymbol{R})$.

Sia X un sottoinsieme di H . Poniamo $X_1=XX=X^2$, cioé X_1 sia l'insieme unione di tutti i prodotti tra due elementi qualsiasi di X . L'insieme X_1 si dirà <u>reticolato primo</u> di X . Chiameremo <u>reticolato secondo</u> di X il reticolato del reticolato primo di X e lo denoteremo con X_2 , porremo cioé $X_2=(X_1)^2$. Così procedendo induttivamente possiamo definire il reticolato h-esimo di X , col porre $X_h=(X_{h-1})^2$. Porremo poi $X=X_o$. Denotato con $\bar{X}$ la chiusura di X rispetto al sistema di chiusura $\boldsymbol{C}$, evidentemente si ha:

(18) $$X=X_o \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots\ldots\ldots \subseteq X_h \subseteq \bar{X} \quad .$$

Manifestamente si ha:

(19) $$X_h=X_{h+1} \Longleftrightarrow X_h=\bar{X} \quad .$$

Nel seguito supporremo H finito , anche se molto di quanto diremo si può estendere al caso infinito. Sotto tale ipotesi di finitezza , qualunque sia il sottoinsieme X di H , esiste un intero h tale che $X_h=X_{h+1}=\bar{X}$. Il minimo intero m tale che $X_m=X_{m+1}=\bar{X}$ si dirà <u>indice</u> di X e si scriverà : m=ind.X . Ovviamente é :

(20) $$C\subseteq H \quad , \quad \text{ind}.C = 0 \Longleftrightarrow C\in \mathcal{C} \quad .$$

Per ogni $C\in\mathcal{C}$ e per ogni $x\in H$, si consideri l'intero ind.$(x\cup C)$ Sia:

(21) $$\sigma(H) = \max \left\{\text{ind}.(x\cup C)\right\}_{x\in H, C\in\mathcal{C}} .$$

L'intero σ prende il nome di <u>specie</u> di (H,*) . Si ha subito che :

(22) $$\sigma(H) = 0 \Longleftrightarrow xy = \{x,y\} \; .$$

Lo studio degli n-ipergruppoidi di Steiner può eseguirsi in ordine di difficoltà crescente , rispetto alla loro specie . La (22) caratterizza gli ipergruppoidi di Steiner di specie zero : essi sono , tutti e soli , i 2-ipergruppoidi di Steiner . Possiamo perciò supporre per (H,*) che sia $\sigma(H)\geq 1$ e $n\geq 3$. Al riguardo si possono provare le seguenti caratterizzazioni (le cui dimostrazionisaranno date in un nostro successivo lavoro in estenso sull'argomento) :

(23) $\sigma(H)=1 \Longleftrightarrow \forall x,y,z\in H,\ (xy)z=x(yz) \Longleftrightarrow$ (H,*) <u>é un ipergruppo</u> $\Longleftrightarrow$ (H,$\mathcal{R}$) <u>é uno spazio proiettivo</u> ;

(24) $\forall x,y,z\in H \;,\; (x(yz))z=(x(yz))y \Longleftrightarrow (x(yz))z= \overline{\{x,y,z\}}$;

(25) $\forall x,y,z\in H \;,\; (x(yz))z=(x(yz))y \;,\; |(x(yz))z| = n^2 \;,\; n>3 \Longleftrightarrow$ (H,$\mathcal{R}$) <u>é uno spazio affine con</u> n>3 .

La (23) e la (25) caratterizzano rispettivamente gli n-iper=

gruppoidi associati a spazi proiettivi e a spazi affini (per $n>3$). Inoltre dalla (23) si ha che:

I.- <u>Ogni n-ipergruppo di Steiner é associato ad uno spazio proiettivo di ordine $q=n-1$, e viceversa</u> .

Un altro punto di vista per studiare gli n-ipergruppoidi di Steiner é quello combinatorio. Precisamente il sistema di chiusura $\mathcal{C}$ dell'n-ipergruppoide di Steiner $(H,*)$ può o meno essere combinatorio (cioé può o meno soddisfare alla (6) , la (5) essendo soddisfatta per la (11)). Se lo é parleremo di <u>n-ipergruppoide combinatorio</u>. In tal caso due basi per H (cioé due sottoinsiemi di H indipendenti e che generano H) , si prova che hanno lo stesso numero di elementi, tale numero diminuito di uno si definisce <u>dimensione</u> di H ; in modo analogo si può definire la dimensione di ogni elemento C di $\mathcal{C}$ (in quanto , se $C\neq\emptyset$, C é un n-ipergruppoide di Steiner combinatorio, si pone poi dimensione $\emptyset = -1$) . Sussiste la seguente formula di Grassmann:

$$(26) \qquad \forall C,C'\in\mathcal{C}, \qquad \dim.C + \dim.C' \geq \dim.C\cap C' + \dim.\overline{C\cup C'} .$$

E' chiaro che gli n-ipergruppoidi di Steiner combinatori sono più facili da studiarsi che gli altri. Quindi nello studio degli ipergruppoidi di Steiner si può procedere, in ordine di difficoltà crescente, studiando prima quelli combinatori e poi gli altri , tenendo conto che il sistema di chiusura $\mathcal{C}$ dell'ipergruppoide contiene dei sottosistemi di chiusura combinatori.

Citiamo per finire alcuni risultati da noi ottenuti in questo ordine di idee (le cui dimostrazioni compariranno nel lavoro in estenso) :

II.- <u>Sia $(H,*)$ un n-ipergruppoide di Steiner con $|H|<n^3$. Allora se $(H,*)$ é combinatorio e di dimensione ≥ 3 , necessariamente $(H,*)$ é un ipergruppo e $(H,\mathcal{R})$ é uno spazio proiettivo di dimensione 3</u> .

III.- <u>Sia $(H,*)$ un n-ipergruppoide di Steiner con $|H| = n^3$.</u>

Se (H,*) é combinatorio e di dimensione ≥ 3, necessariamente (H,$\mathcal{R}$) é uno spazio affine di dimensione 3.

IV.- Sia (H,*) un n-ipergruppoide di Steiner , con $|H| \leq n^3$. Allora ogni sottoipergruppoide di (H,*) non banale (cioé distinto dal singleton , da tutto H e dal prodotto xy , con $x,y \in H$) risulta necessariamente l'n-ipergruppoide associato ad un piano affine o proiettivo se é $n>3$. Se é n=3 può esistere anche un sottoipergruppoide con 13 elementi , nel qual caso esso é unico e tutti gli altri sottoipergruppoidi non banali sono associati a piani proiettivi. Ne segue che ogni sottoipergruppoide di (H,*) , diverso da H , risulta un ipergruppo oppure é associato ad un piano affine se é $n>3$, mentre se é n=3 esso o é un ipergruppo o é associato ad un piano affine, ovvero esso é costituito da 13 elementi , ma in tal caso ogni altro sottoipergruppoide , diverso da H , risulta un ipergruppo . Se ne deduce anche che , se K é un sottoipergruppoide di (H,*) , diverso da H , risulta $|K|=1,n,n^2-n+1,n^2$ se é $n>3$, mentre se é n=3 si ha $|K|=1,3,7,9,13$.

BIBLIOGRAFIA

1. H.CRAPO,G.C.ROTA , "On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries", Univ.Waterloo ,M.I.T., 1968 .
2. P.DEMBOWSKI , "Finite geometries" , Ergebnisse der Math., Springer Berlin , 1968 .
3. DRESHER and O.ORE , "Theory of multigroups" , Amer.J.Math. 60 (1938) .
4. M.KOSKAS , "Gruppoides, demi-hypergroupes et hypergroupes" , J.Math.pures et appl. , 49 (1970) .
5. B.SEGRE , "Istituzioni di geometria superiore , vol.III (1963-

1964): Complessi ,reti , disegni", (Lezioni raccolte da P.V. Ceccherini) , Ist.Mat. "G.Castelnuovo" , Univ.Roma .

6. G.TALLINI , "Spazi di rette e geometrie combinatorie ", Semi= nario di Geometrie Combinatorie , Ist. Mat. "G.Castelnuovo", Univ.Roma , 1977 .