UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
LA SAPIENZA

Giuseppe Tallini

Fibrazioni mediante rette in quadriche e varietà di Grassmann di PG(r,q)

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini
n.100 Aprile 1988

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
ISTITUTO "G. CASTELNUOVO„
QUADERNI DEL SEMINARIO DI GEOMETRIE COMBINATORIE

FIBRAZIONI MEDIANTE RETTE IN QUADRICHE E VARIETA' DI GRASSMAN DI PG(r, q)(*)

Giuseppe TALLINI

1. Introduzione. Fibrazioni in spazi parziali di rette

Sia $(S,\mathcal{L})$ uno spazio parziale di rette, cioè una coppia $(S,\mathcal{L})$ ove S è un insieme non vuoto di elementi da dirsi punti, $\mathcal{L}$ una famiglia di parti di S da dirsi rette, tale che $\mathcal{L}$ è un ricoprimento di S, ogni retta abbia almeno due punti, per due punti passa al più una retta. Due punti x, y li diremo collineari se esiste la retta per essi e scriveremo allora $x \sim y$, in caso contrario si diranno non collineari e scriveremo $x \not\sim y$. Una qualsiasi varietà algebrica rigata di uno spazio affine o proiettivo è un esempio di spazio parziale di rette. Osserviamo anche che se ogni retta ha esattamente due punti lo spazio parziale di rette è un grafo e viceversa.

Una **fibrazione** mediante rette in $(S,\mathcal{L})$ è una famiglia $\mathcal{F}$ di rette di $(S,\mathcal{L})$ a due a due sghembe. La $\mathcal{F}$ si dirà **totale**, ovvero che è una fibrazione **di** $(S,\mathcal{L})$, se $\mathcal{F}$ è un ricoprimento di S, cioè se per ogni punto di S passa una e una sola retta **di** $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ non è totale si dirà **parziale**. Diremo che $\mathcal{F}$ è **massimale** se non è contenuta propriamente in nessun'altra fibrazione. Evidentemente ogni fibrazione è contenuta in una fibrazione massimale e quindi lo studio di queste ultime esaurisce quello di tutte le fibrazioni. Porremo, se $\mathcal{F}$ è una qualsiasi fibrazione in $(S,\mathcal{L})$:

$$F = \bigcup_{\ell \in \mathcal{F}} \ell \tag{1.1}$$

(*) Ciclo di conferenze tenute presso il Dipartimento di Scienze e Storia dell'Architettura - Università degli Studi "G. D'Annunzio" - 18, 19, 20 aprile 1988

Si ha subito che:

(1.2) $\quad \mathcal{F}$ è massimale $\Longleftrightarrow$ **F è un insieme intersezione in $(S,\mathcal{L})$ cioè: $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\ell \cap F \neq \emptyset$.**

Se $(S,\mathcal{L})$ è finito, sia F_p il fascio di rette di centro P, porremo:

(1.3) $\quad \lambda = \min_{\ell \in \mathcal{L}} |\ell|, \qquad \mu = \max_{\ell \in \mathcal{L}} |\ell|, \qquad \theta = \min_{P \in S} |F_p|.$

Per una qualsiasi fibrazione $\mathcal{F}$ in $(S,\mathcal{L})$ si ha:

(1.4) $$\lambda\ |\mathcal{F}| \leq |F| \leq |S|$$

e quindi:

(1.5) $$\begin{cases} |\mathcal{F}| \leq |S|/\lambda \\ |\mathcal{F}| = |S|/\lambda \Longleftrightarrow \text{ogni retta di } \mathcal{F} \text{ ha } \lambda \text{ punti ed } \mathcal{F} \text{ è totale.} \end{cases}$$

Un sottoinsieme F di S prende il nome di "primo" se $F \neq S$ ed è intersecato da ogni retta non su F in un sol punto. Proviamo che

1. Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione massimale di $(S,\mathcal{L})$ risulta:

(1.6) $$|\mathcal{F}| \geq \theta / \mu$$

(1.7) $\quad |\mathcal{F}| = \theta / \mu \Longleftrightarrow$ **F è un primo; $\forall P \in S-F$, $|F_p| = \theta$ $\forall \ell \in \mathcal{F}$, $|\ell| = \mu$.**

Dimostrazione. Risulta evidentemente $\theta < |S|$ e quindi se $\mathcal{F}$ è totale si ha: $\theta < |S| = |F| \leq \mu |\mathcal{F}|$, da cui

(1.8) $\quad \mathcal{F}$ **totale** $\Longrightarrow \quad |\mathcal{F}| > \theta / \mu$,

onde la (1.6) per una $\mathcal{F}$ totale. Se $\mathcal{F}$ non è totale esiste qualche $P \in S-F$ e si ha $|F_p| \geq \theta$. Poichè F è un insieme intersezione per la (1.2), si ha che ogni retta per P incontra F in un punto almeno, dunque $|F| \geq |F_p| \geq \theta$, ma $|F| \leq \mu |\mathcal{F}|$, onde la (1.6).

Se $|\mathcal{F}| = \theta/\mu$, la $\mathcal{F}$ non può essere totale per la (1.8), onde $F \neq S$. Per ogni $P \in S-F$ si ha $\theta \leq |F_p| \leq |F| \leq \mu \cdot |\mathcal{F}|$, se

$|\mathcal{F}|=\theta/\mu$ deve allora aversi: $\theta=|F_p|=|F|=\mu\ |\mathcal{F}|$.

Se ne deduce la $\Longrightarrow$ della (1.7). La $\Longleftarrow$ della (1.7) è evidente. Si ha così l'asserto.

Se $(S,\mathcal{L})$ è tale che tutte le rette hanno la medesima cardinalità λ e tutti i fasci la medesima cardinalità θ, dalla prop. 1 e dalla (1.5) si ha:

(1.8) $\mathcal{F}$ fibrazione massimale $\Longrightarrow$ $\theta/\lambda \leq |\mathcal{F}| \leq |S|/\lambda$, **il segno = a destra avendosi se, e solo se, la $\mathcal{F}$ è totale, quello a sinistra avendosi se, e solo se, F è un primo di $(S,\mathcal{L})$.**

Nel presente Lavoro ci occuperemo di fibrazioni nelle quadriche non singolari di PG(r,q), $r\geq 4$, e nelle varietà di Grassmann rappresentative delle rette di PG(r, q), $r\geq 3$. Esporremo risultati da noi ottenuti nel gennaio del 1982, mai prima d'ora pubblicati in extenso, ma comunicati nel Convegno "Finite Geometries" tenutosi ad Oberwolfach nel marzo 1982.

2. Fibrazioni mediante rette in una quadrica Q non singolare di PG(4, q).

In PG(4, q) sia $Q=Q_4$ una quadrica non singolare (onde $|Q|=\theta_3=\sum_{i=0}^{3} q^i$) e sia $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in Q. Risulta allora:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &|\mathcal{F}| \leqslant \frac{\theta_3}{q+1} = q^2+1 \\ &|\mathcal{F}| = q^2+1 \iff \mathcal{F} \text{ è totale}. \end{aligned}$$

Q può interpretarsi come una sezione iperpiana non tangente della quadrica di Klein $\mathcal{G}_{3,q}$, cioè come l'insieme delle rette di PG(3, q) di un complesso lineare di rette K di cui denoteremo con φ :PG(3, q) $\to$ PG*(3, q) la polarità nulla associata.

Ad ogni $\ell \in \mathcal{F}$ corrisponde un fascio di rette di PG(3, q) di centro L ($\in$ PG(3, q)) sul piano φ(L).

Si ha:

$$(2.2)\qquad \ell,\ell' \in \mathcal{F}, \ell\neq\ell' \Longrightarrow L' \notin \varphi(L),\ L \notin \varphi(L')$$

Sia H l'insieme dei punti L di PG(3, q) che provengono nel modo anzidetto dalle rette $\ell \in \mathcal{F}$. Per la (2.2) si ha:

(2.3) $L, L' \in H,\ L \neq L' \Longrightarrow [L' \notin \varphi(L) \Longleftrightarrow \varphi(L) \cap H = \{L\}]$.

Viceversa se H è un insieme di punti di $PG(3, q)$ soddisfacente alla (2.3), i fasci $\{(L, \varphi(L)\}_{L \in H}$ sono altrettante rette di Q che costituiscono una fibrazione di Q. Il problema della determinazione delle fibrazioni mediante rette di Q equivale dunque a quello della determinazione dei sottoinsiemi H di $PG(3, q)$ tali che:

(2.4) $\qquad L \in H \quad \Longrightarrow \quad \varphi(L) \cap H = \{L\}$,

ove $\varphi : PG(3, q) \to PG^*(3, q)$ è una fissata polarità nulla, non singolare, di $PG(3, q)$, di cui denoteremo con K il relativo complesso lineare di rette.

Dalla (2.3) segue che:

(2.5) $\qquad r \in K \Longrightarrow |r \cap H| \leq 1$

Infatti se, per assurdo, $r \cap H \supseteq \{A, B\}$, con $A \neq B$, per la (2.4) si avrebbe $\varphi(A) \cap H = \{A\}$ mentre $B \in \varphi(A) \cap H$.(perchè $A, B \in H$ e $r \in K$). L'assurdo prova l'asserto.

Sia π un piano ed $L = \varphi^{-1}(\pi)$, se $L \in H$ per la (2.4) si ha $|\pi \cap H| = 1$; se $L \notin H$ le $q+1$ rette di L su π appartengono a K e per la (2.5) incontrano H ciascuna in al più un punto, in esattamente un punto se ogni retta di K è 1- secante H. Ne segue che:

$$
(2.6)\quad \begin{cases}
\forall \pi \in PG^*(3,q), \quad |\pi \cap H| \leq q+1 \\
\mathcal{F} \text{ totale} \Longleftrightarrow |\mathcal{F}| = q^2+1 \Longleftrightarrow \text{ogni retta di } K \text{ è 1-secante } H \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \begin{cases} |\pi \cap H| = 1, \ L = \varphi^{-1}(\pi) \in H \\ |\pi \cap H| = q+1, \ L = \varphi^{-1}(\pi) \notin H. \end{cases} \Longleftrightarrow
\end{cases}
$$

$\Longleftrightarrow$ H è una (q^2+1)-calotta di $PG^*(3,q)$, q pari.

Se ne deduce che

I. In Q non esistono fibrazioni totali, se q è dispari.Se q è pari ogni fibrazione totale è l'immagine su $\mathcal{G}_{3,q}$ dei fasci di rette tangenti ad una (q^2+1)-calotta che ammette come polarità

nulla la φ .

Una fibrazione $\mathcal{F}$ di Q massimale, cioè non contenuta propriamente in nessun altra fibrazione, è relativa ad un insieme H di $PG(3, q)$, soddisfacente alla (2.4), che sia massimale rispetto alla proprietà (2.4) (cioè non contenuto propriamente in nessun insieme H' soddisfacente alla (2.4)).

Se ne deduce che:

(2.7) $\quad \mathcal{F}$ **massimale** $\Longleftrightarrow$ **H è un blocking set rispetto ai piani**

Proviamo che:

II. Sia $\mathcal{F}$ **una fibrazione massimale di Q, risulta:**

(2.8) $$|\mathcal{F}| \geqslant q+1,$$

(2.9) $|\mathcal{F}|=q+1 \Longleftrightarrow$ **H è una retta** $\Longleftrightarrow \mathcal{F}$ **è costituito dalle rette di un regolo di una quadrica iperbolica sezione di Q con un iperpiano di $PG(4, q)$.**

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ è totale la (2.8) è verificata (cfr.(2.1)).

Possiamo dunque supporre $\mathcal{F}$ massimale non totale. Esiste allora un $P \in Q$ tale che per P non passano rette di $\mathcal{F}$. Sia τ l'iperpiano tangente in P a Q e sia $\Gamma = Q \cap \tau$ il cono tangente in P a Q. Le rette di Γ passano tutte per P, quindi Γ non contiene nessuna retta di $\mathcal{F}$. Ogni retta di $\mathcal{F}$ incontra dunque τ e quindi Γ in un sol punto e rette distinte di $\mathcal{F}$ incontrano Γ in punti distinti. D'altra parte ciascuna delle $q+1$ rette di Γ deve incontrare qualche retta di $\mathcal{F}$, altrimenti $\mathcal{F}$ non sarebbe massimale (in quanto se a è una retta di Γ sghemba con ogni retta di $\mathcal{F}$, la $\mathcal{F} \cup \{a\}$ sarebbe una fibrazione).Ne segue che $|\mathcal{F}| \geqslant q+1$, cioè la (2.8).

Sia α un iperpiano di $PG(4,q)$ che incontri Q in una quadrica iperbolica $\mathcal{I}$ e sia $\mathcal{F}$ un regolo della quadrica $\mathcal{I}$. Proviamo che $\mathcal{F}$ è una fibrazione massimale: infatti ogni retta di Q , non su α incontra α in un punto di $\mathcal{I}$, per cui passa una retta di $\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ è massimale. Inoltre è $|\mathcal{F}|=q+1$.

Dimostriamo che nel caso ora detto H è una retta: infatti, denotato con Φ l'iperpiano di $PG(5, q)$ che incontra $\mathcal{G}_{3,q}$ in Q, l'$S_3 = \alpha (\subset \Phi)$ ha come retta polare rispetto a $\mathcal{G}_{3,q}$ una retta secante $\mathcal{G}_{3,q}$ in due punti A_1, A_2; i punti di $\mathcal{I} = \alpha \cap Q$ si rappresentano quindi in rette di K^2 in $PG(3,q)$ incidenti le rette a_1 e a_2 (ove a_1 e a_2 sono le rette corrispondenti di A_1, A_2) e le rette di $\mathcal{F}$ si rappresentano in fasci di rette con centri sui punti di una fissata delle due rette a_1, a_2.

Viceversa, se H è una retta, $\mathcal{F}$ si ottiene nel modo anzidetto. Si è così provata la seconda equivalenza (2.9). Proviamo la prima. Se H è una retta allora $\mathcal{F}$ è massimale (per la (2.7)) e $|\mathcal{F}|=q+1$. Mostriamo che se $\mathcal{F}$ è massimale e $|\mathcal{F}|=q+1$ allora H è una retta. Sia ℓ una retta esterna ad H, ogni piano per ℓ incontra H in almeno un punto, per la (2.7); ma i piani per ℓ sono $q+1=|H|$, onde ogni piano per ℓ incontra H in esattamente un punto. Siano L_1, L_2 due punti distinti di H ed α un qualsiasi piano per L_1, L_2. Per quanto su detto α non contiene rette esterne ad H, onde $|H \cap \alpha| \geqslant q+1$, ma allora $|H \cap \alpha|=q+1$, (perchè $|H|=q+1$), cioè $H \subset \alpha$, per ogni piano α per L_1L_2, quindi H coincide con la retta L_1L_2. Si ha così l'asserto.

Sia m il massimo numero di punti allineati di H. Poichè ogni piano per una retta r che sia m-secante H ha in comune con H al più $q+1$, si avrà: $|H| \le (q+1)(q+1-m)+m$, cioè:

$$|\mathcal{F}|=|H| \le q^2+1-(m-2)q, \quad m=\max(H \cap r), \text{ con } r \text{ retta di } PG(3,q). \tag{2.10}$$

Proviamo ora che:

III. Se q è dispari ogni fibrazione $\mathcal{F}$ massimale di Q è tale che:

$$q+1 \le |\mathcal{F}| \le q^2-q+1. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Per la prop. II basta provare che $|\mathcal{F}| \leqslant q^2-q+1$.

Se H non è una calotta, sarà $3 \leqslant m=\max(H \cap r)$($r$ retta di $PG(3,q)$) e quindi per la (2.10) si ha $|\mathcal{F}| \le q^2-q+1$. Se H è una calotta ogni piano π è tale che $|H \cap \pi| \le q$ (infatti se esistesse un piano π tale che $|H \cap \pi|=q+1$, allora H sarebbe una conica di π tale che per $P=\varphi^{-1}(\pi)$ ogni retta di π è tangente e ciò è assurdo essendo q dispari). Siano A_1, A_2 due distinti punti di H. Ciascuno dei $q+1$ piani per A_1A_2 incontrano H in al più $q-2$ punti diversi da A_1, A_2, onde è $|H| \leqslant (q+1)\cdot(q-2)+2=q^2-q<q^2-q+1$. Ne segue l'asserto.

Se q è pari, sia N il nucleo di Q (cioè ii punto per cui passano tutti gli iperpiani tangenti di Q, onde ogni retta per N è tangente a Q). Proiettando Q da N su un $S_3=PG(3,q)$ di $PG(4,q)$ non per N, si ottiene una biezione che muta le rette di Q nelle rette di un complesso lineare K. Ogni fibrazione $\mathcal{F}$ di Q si muta in una fibrazione $\mathcal{F}'$, mediante rette di K, in PG(3,q). Si ha che $\mathcal{F}$ è massimale se, e solo se, $\mathcal{F}'$ è massimale rispetto a K (cioè ogni retta di K incide qualche retta di $\mathcal{F}'$) e quindi: $\mathcal{F}'$ massimale in PG(3,q) $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ è massimale in Q, ma non vale il viceversa, cioè potrebbe esistere una fibrazione $\mathcal{F}$ massimale in Q tale che la sua proiezione $\mathcal{F}'$ non sia massimale in PG(3,q) (pur essendo massimale rispetto a K): per esempio il regolo di una quadrica iperbolica sezione di Q con un iperpiano. Si osservi però che se $\mathcal{F}$ è totale, anche la sua proiezione $\mathcal{F}'$ è totale, e viceversa (perchè $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| = q^2+1$).

Sia $\mathcal{F}$ una qualsiasi fibrazione non totale di Q, allora $\mathcal{F}'$ è una fibrazione non totale di PG(3,q). Se la $\mathcal{F}'$ non è contenuta in una fibrazione totale di PG(3,q) sarà $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| \leqslant q^2 - \sqrt{q}$. Se ne deduce che:

IV. **Se q è pari, per ogni fibrazione $\mathcal{F}$ di Q massimale non totale, tale che la sua proiezione $\mathcal{F}'$ da N non sia contenuta in una fibrazione totale di PG(3,q), soddisfa alla:**

$$q+1 \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant q^2 - \sqrt{q}\ . \tag{2.12}$$

In ogni caso, se q è pari ed $\mathcal{F}$ è una fibrazione massimale non totale di Q, sia H il sottoinsieme di PG(3,q) ad essa associata. Se H non è una calotta per la (2.10) risulterà $|\mathcal{F}| = |H| \leqslant q^2-q+1$ (perchè $m \geq 3$); se H è una calotta, non potrà essere contenuta in una (q^2+1)-calotta (altrimenti $\mathcal{F}$ non sarebbe massimale non totale), dunque H sarà una calotta completa diversa da una (q^2+1)-calotta, ne segue allora che $|H| \leq q^2 - \sqrt{q}/2+1$.

Se ne deduce che:

V. **Se q è pari, per ogni fibrazione $\mathcal{F}$ di Q massimale non totale risulta:**

$$|\mathcal{F}| \leqslant q^2 - \sqrt{q}/2 + 1. \tag{2.13}$$

3. Fibrazioni mediante rette in una quadrica ellittica Q_5^E di PG(5,q)

In PG(5,q) sia $Q=Q_5^E$ una quadrica ellittica, onde per ogni $P\in Q$ l'iperpiano tangente τ_P incontra Q in un cono proiettante da P una quadrica ellittica di un $S_3\subset\tau_P$ con $P\notin S_3$. Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in Q. Poichè $|Q|=q^4+q^3+q+1$, si ha:

$$(3.1)\qquad \begin{cases} |\mathcal{F}|\le |Q|/(q+1)=q^3+1, \\ |\mathcal{F}|=q^3+1 \iff \mathcal{F} \text{ è totale.} \end{cases}$$

Sia $\mathcal{F}$ massimale ma non totale. Esiste allora un punto $P\in Q$ tale che per P non passano rette di $\mathcal{F}$, onde τ_P non contiene rette di $\mathcal{F}$ (altrimenti una tale retta dovrebbe passare per P). Ogni retta di $\mathcal{F}$ allora incontra $\Gamma_P=\tau_P\cap Q$ in un punto, inoltre ogni retta di Γ_P deve incontrare qualche retta di $\mathcal{F}$ (altrimenti $\mathcal{F}$ non sarebbe massimale). Poichè le rette di Γ_P sono q^2+1, dovrà essere $|\mathcal{F}|\ge q^2+1$. Se $|\mathcal{F}|=q^2+1$, ciascuna delle q^2+1 rette di Γ_P incontra una ed una sola retta di $\mathcal{F}$. Denotato al solito con $F=\bigcup_{\ell\in\mathcal{F}}\ell$, si ha allora che ogni retta di Q o appartiene per intera ad F oppure è 1-secante F. Siano $\ell_1,\ell_2\in\mathcal{F}$ ed $\bar S_3$ il loro spazio congiungente. $S_3\cap Q$ è una quadrica iperbolica $\mathcal{I}$. Se $P\in\mathcal{I}-(\ell_1\cup\ell_2)$ la retta r per P incidente ℓ_1 ed ℓ_2 appartiene ad F (perchè ha due punti in comune con F: $r\cap\ell_1$ e $r\cap\ell_2$), onde $\mathcal{I}\subset F$.

Sia A un punto di F non nell'$\bar S_3$ (certamente esistente perchè $|F|=\theta_3=(q^2+1)(q+1)$ e $|\mathcal{I}|=q^2+2q+1$). Si consideri l'$\bar S_4$ congiungente A con $\bar S_3$. Il cono tangente Γ_A incontra l'$\bar S_4$ in un cono $\gamma_A=(\tau_A\cap\bar S_4)\cap Q$ proiettante da A la conica sezione di $\mathcal{I}$ con il piano $\bar S_3\cap(\tau_A\cap\bar S_4)$, onde $\gamma_A\subset F$ (perchè ogni sua retta ha due punti in comune con F). Fissata una retta a di γ_A sia $A'=a\cap\mathcal{I}$ ciascuna delle quadriche iperboliche per a e per una delle q rette non per A', di uno fissato dei regoli di $\mathcal{I}$ appartiene ad F e all'$\bar S_4$. Ne segue che $|F\cap S_4|\geqslant q^3$. Se ne deduce facilmente che $F\subseteq S_4$. Si è così provato che:

I. Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione massimale non totale in una quadrica ellittica Q di PG(5,q), deve aversi:

(3.2) $$|\mathcal{F}| \geqslant q^2 + 1$$

(3.3) $|\mathcal{F}| = q^2+1 \Longleftrightarrow$ **$\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di una quadrica non singolare sezione iperpiana di Q, onde q è pari**

(3.4) q dispari $|\mathcal{F}| > q^2+1$

4. Fibrazioni mediante rette in $\mathcal{G}_{3,q}$

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette nella quadrica di Klein, $\mathcal{G}_{3,q}$, di PG(5,q), cioè in una quadrica iperbolica di PG(5,q). Deve aversi $|\mathcal{F}| \leqslant |\mathcal{G}_{3,q}|/\theta_1 = (q^2+1)(q^2+q+1)/\theta_1 = (q^3+2q-1)+ +2/(q+1)$.

Non potendosi avere il segno di uguaglianza nella precedente relazione (perchè l'ultimo membro non è un intero), si ha:

(4.1) **Una fibrazione $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}_{3,q}$ non è mai totale.**

(4.2) $$|\mathcal{F}| \leqslant q^3+2q-1.$$

Poichè una retta di $\mathcal{G}_{3,q}$ è un fascio di rette di PG(3,q), si ha che ogni fibrazione $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}_{3,q}$ determina un insieme H di punti di PG(3,q) (centri dei fasci di rette relativi alle rette di $\mathcal{F}$), con $|H| = |\mathcal{F}|$ e una applicazione iniettiva:

(4.3) $$p : H \to PG^*(3,q),$$

Tale che:

(4.4) $$\begin{cases} \forall x \in H, \quad x \in p(x) \\ x \in H,\ y \in p(x) \cap H,\ x \neq y \implies x \notin p(y), \end{cases}$$

ove $(x, p(x))$ è il fascio di rette di centro x sul piano p(x) corrispondente ad una retta di $\mathcal{F}$. Viceversa un insieme $H \subseteq PG(3,q)$ e una applicazione $p: H \to PG^*(3,q)$ soddisfacente alla (4.4) determina una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ se si considerano le rette di $\mathcal{G}_{3,q}$ corrispondenti dei fasci di rette $(x, p(x))$. Lo studio e la determinazione delle fibrazioni $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ equivale dunque a quello delle applicazioni (4.3) soddisfacenti alla (4.4). Chiameremo contropolarità di sostegno H ogni applicazione (4.3) soddisfacente alla (4.4). L'insieme $p(H)=H^*$ risulta l'insieme dei piani dei fasci di rette relative alle rette di $\mathcal{F}$. Il piano $p(x)$, $x \in H$, si dirà piano tangente in x ad H ovvero piano polare di x. Denoteremo con K l'insieme delle rette dei fasci $\{(x,p(x))\}_{x \in H}$, evidentemente $|K|=|H|(q+1)=|F|$.

Si ha subito che:

(4.5) $\quad \mathcal{F}$ **massimale** $\Longleftrightarrow$ $p:H \to PG^*(3,q)$ **massimale**

Se esiste un piano α di $PG(3,q)$ esterno ad H, per ogni $y \in \alpha$, il fascio (y, α) non ha nessuna retta in comune con K, quindi $p:H \to PG^*(3,q)$ è ampliabile, cioè $\mathcal{F}$ non è massimale. Si ha dunque che:

(4.6) $\quad \mathcal{F}$ massimale $\Longrightarrow$ **H è un "insieme intersezione" rispetto ai piani.**

Dalla (1.2) si ha:

(4.7) $\quad \mathcal{F}$ **massimale** $\Longleftrightarrow$ **F è un "insieme intersezione" rispetto alle rette di $\mathcal{G}_{3,q}$.**

Denoteremo con $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ le due famiglie di piani di $\mathcal{G}_{3,q}$ provenienti rispettivamente dalle stelle di rette e dai piani rigati di $PG(3,q)$. Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione massimale di $\mathcal{G}_{3,q}$, per ogni $\ell \in \mathcal{F}$ sia $\pi(\ell)$ il piano di $\mathcal{S}$ contenente ℓ. Evidentemente $\pi(\ell)$ contiene solamente la retta ℓ di $\mathcal{F}$. Al variare di ℓ in $\mathcal{F}$ si ottiene la famiglia $\{\pi(\ell)\}_{\ell \in \mathcal{F}}$ costituita da $|\mathcal{F}|$ piani distinti di $\mathcal{S}$. Sia α un qualsiasi piano di $\mathcal{S}$ non appartenente a $\{\pi(\ell)\}_{\ell \in \mathcal{F}}$.

$\alpha \cap F$ è un "insieme intersezione" rispetto alle rette in α (per la (4.7)), dunque:

(4.8) $\quad \forall \pi \in \mathcal{S}$, $|\pi \cap F| \geq q+1$, **$\pi \cap F$ è un "insieme intersezione" in π.**

Sia N il numero delle coppie (x, π), ove $x \in F$, $\pi \in \mathcal{S}$ e $x \in \pi$. Per la (4.8) si ha (tenuto conto che per un punto $x \in \mathcal{G}_{3,q}$

passano q+1 piani di $\mathcal{S}$ e che $|\mathcal{S}| = \theta_3$):

$$(q+1)|F| = N \geq \theta_3(q+1)$$

il segno = avendosi se, e solo se, in (4.8) vale sempre il segno di uguaglianza. Tenuto conto che $|F|=(q+1)|\mathcal{F}|$, si ha allora che:

(4.9) **Se $\mathcal{F}$ è massimale risulta: $|\mathcal{F}| \geq q^2+1$; $|\mathcal{F}|=q^2+1 \iff \forall \pi \in \mathcal{S}$, $|\pi \cap F|=q+1$ e $\pi \cap F$ è un"insieme intersezione" in $\pi \iff \forall \pi \in \mathcal{S}$, $\pi \cap F$ è una retta.**

Se $|\mathcal{F}|=q^2+1$, essendo K l'insieme delle rette di PG(3,q) corrispondenti dei punti di F, in forza della $(4.9)_{II}$ si ha che nella stella di rette di centro P le rette di K costituiscono un fascio e sia π (P) il suo piano. Si consideri l'applicazione:

$$(4.10) \qquad \pi : P \in PG(3,q) \to \pi(P) \in PG^*(3,q) .$$

Si prova subito che essa è biettiva, che soddisfa alla:

$$(4.11) \qquad Q \in \pi(P) \iff P \in \pi(Q)$$

e che quando P descrive una retta r il piano π (P) descrive un fascio di piani. Ne segue che la (4.10) è una polarità nulla non degenere, onde K è un complesso lineare di rette non degenere, cioè F è la sezione di $\mathcal{G}_{3,q}$ con un iperpiano S_4 di PG(5,q) non tangente a $\mathcal{G}_{3,q}$ e quindi $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di $Q_4 = S_4 \cap \mathcal{G}_{3,q}$. Se ne deduce che (cfr. prop. I, n.2):

I. Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale di $\mathcal{G}_{3,q}$. Se q è dispari risulta $|\mathcal{F}| > q^2+1$. Se q è pari si ha $|\mathcal{F}| = q^2+1$ se, e solo se, $\mathcal{F}$ è l'immagine su $\mathcal{G}_{3,q}$ dei q^2+1 fasci di rette tangenti ad una (q^2+1)-calotta di PG(3,q).

5. Esempi di fibrazioni in $\mathcal{G}_{3,q}$.

Daremo ora alcuni esempi di contropolarità in PG(3,q) e quindi di fibrazioni in $\mathcal{G}_{3,q}$.

Esempio I. Sia H_1 una quadrica ellittica di PG(3,q), q dispari, ed ℓ una secante di H_1. In ogni piano α per ℓ si scelga un punto $A \notin \ell$ che sia interno alla conica $\alpha \cap H_1$ e sia H_2 l'insieme dei q+1 punti A così scelti. Posto $H = H_1 \cup H_2$, per ogni $P \in H$ sia $p(P) = \tau_P$ (piano tangente in P ad H_1) se $P \in H_1$, $p(P) = \alpha$ se $P = A \in H_2$ ($\alpha = A \oplus \ell$). Si prova subito che:

$$p : P \in H \to p(P) \in PG^*(3,q)$$

è una contropolarità. essa determina una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ con $|\mathcal{F}| = q^2+q+2$.

Esempio II. Sia α un piano di PG(3,q) e α^* il piano rigato di α. Si può sempre costruire una applicazione

$$\lambda : P \in \alpha \to \lambda(P) \in \alpha^*, \text{ tale che: } \forall P \in \alpha,\ \lambda(P) \ni P.$$

Sia $H = \alpha$, per ogni $P \in H$ si fissi un piano p(P) per λ(P). Allora si ha subito che:

$$p: P \in H \to p(P) \in PG^*(3,q)$$

è una contropolarità, essa determina una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$, con $|\mathcal{F}| = q^2+q+1$.

Esempio III. In un piano π di ordine q sia $S \subseteq \pi$ e $\Psi : S \to \pi^*$ una applicazione iniettiva tale che:

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \Psi : S \longrightarrow \pi^*: \\ \forall\, x \in S,\ x \notin \Psi(x), \\ x,y \in S,\ x \neq y \implies \Psi(x) \cap \Psi(y) \text{ non appartiene alla retta } xy. \end{cases}$$

Un esempio di una tale $\Psi : S \to \pi^*$ è il seguente. Sia $\mathcal{C}$ una conica di $\pi = PG(2,q)$, q dispari, ed S l'insieme dei punti interni a $\mathcal{C}$, l'applicazione $\Psi : P \in S \to \Psi(P) \in \pi^*$, ove Ψ(P) è la polare di P rispetto a $\mathcal{C}$, soddisfa alle (5.1).

In $AG(3,q)$ si fissi un punto O e sul piano improprio $\pi=\pi_\infty$ di $AG(3,q)$ si fissi una applicazione $\Psi: S \to \pi^*$ soddisfacente alle (5.1). Sia $PG(3,q)$ l'ampliamento di $AG(3,q)$ e Γ il cono proiettante da O l'insieme $S(\subseteq \pi)$. Fissati un punto A in π ed un piano α per O si ponga $p(O)=\alpha$, $p(A)=\pi$ e per ogni $X \in \Gamma - \{O\}$, sia $p(X)$ il piano proiettante da X la retta impropria $\Psi(X_\infty)$, dove X_∞ è il punto improprio della retta OX.

Posto $H=\Gamma \cup \{A\}$, si prova subito che l'applicazione:

$$p: x \in H \to p(X) \in PG^*(3,q) \tag{5.2}$$

è una contropolarità. Essa determina dunque una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ con:

$$|\mathcal{F}| = (q-1)\,|S| + 2. \tag{5.3}$$

Una applicazione (5.1) in cui $S=\pi$ sarà detta **massima.** Per essa si ha (cfr. (5.3)):

$$|\mathcal{F}| = q^3 + 1\,. \tag{5.4}$$

Proviamo che:

I. Se in $\pi=PG(2,q)$ esiste una applicazione (5.1) massima, la fibrazione $\mathcal{F}$ relativa è massimale e si ha la (5.4).

Dimostrazione. Supponiamo la $\mathcal{F}$ non massimale. Esiste allora una retta ℓ di $\mathcal{G}_{3,q}$ sghemba con ogni retta di $\mathcal{F}$.

La ℓ proviene da un fascio (L,Λ), di centro L e piano Λ, di $PG(3,q)$, il quale non ha in comune rette con i fasci $(X, p(X))$.

Il centro L non può appartenere ad $AG(3,q)$, altrimenti i fasci (L,Λ), $(L, p(L))$ avrebbero la retta $\Lambda \cap p(L)$ in comune e ciò è escluso. Dunque $L \in \pi_\infty = \pi$ ed inoltre $L \neq A$ e $\Lambda \neq \pi$. Sia $r=\Lambda \cap \pi$. Se $O \notin \Lambda$, sia X il punto d'incontro di Λ con la retta OX_∞ ove $X_\infty = \Psi^{-1}(r)$; evidentemente X è proprio (per la $(5.1)_I$) e $X \neq O$ (perchè $O \notin \Lambda$); il fascio $(X, p(X))$ ha in comune con il fascio (L,Λ) la retta XL e ciò è escluso.

Dunque $O \in \Lambda$. Per ogni $y \in r=\Lambda \cap \pi$ la retta $\Psi(y)$ è diversa da r (per la $(5.1)_I$), inoltre se $y, z \in r$ e $y \neq z$ risulta $\Psi(y) \cap r \neq \Psi(z) \cap r$ (per la $(5.1)_{II}$). Ne segue che l'applicazione $\Psi_r: y \in r \to \Psi(y) \cap r \in r$ è biettiva. Quindi esiste un punto

$y_0 \in r$ tale che $L \in \psi(y_0)$.

Se $X \in Y_0 0 - \{0\}$ il fascio $(X, p(x))$ ha in comune con il fascio (L, Λ) la retta XL e ciò è escluso. Ne segue l'asserto.

C. Fisher, in una conferenza tenuta il 27 gennaio 1988 a Roma nel seminario diretto da G. Tallini, espose risultati, relativi a questioni che non riguardavano le fibrazioni, in cui intervenivano le applicazioni (5.1) massime e le relative applicazioni (5.2), ristrette ad $AG(3,q)-\{0\}$. Era comunque allora aperto il problema dell'esistenza di applicazioni (5.1) massime.

P. Bellini, dietro nostro suggerimento, ha determinato siffatte applicazioni per $q=2,3$. Esempi al riguardo sono i seguenti.

In $PG(2,2)$ di coordinate (x_1, x_2, x_3) un esempio di applicazione (5.1) è data da:

$$(5.5)\qquad \begin{cases} (001) \to x_3=0,\ (100) \to x_1=x_3,\ (010) \to x_1+x_2+x_3=0, \\ (011) \to x_2=0,\ (101) \to x_1=x_2,\ (110) \to x_2=x_3, \\ \qquad (111) \to x_1=0. \end{cases}$$

In $PG(2,3)$ di coordinate (x_1, x_2, x_3) un esempio di applicazione (5.1) è data da:

$$(5.6)\qquad \begin{cases} (001) \to x_3=0,\ (010) \to x_2=0,\ (100) \to x_1=0,\ (011) \to x_2+x_3=0, \\ \qquad (101) \to x_1+x_2+x_3=0, \\ (110) \to x_1+x_2-x_3=0,\ (111) \to x_1+x_2=0,\ (01\text{-}1) \to x_2=x_3, \\ \qquad (10\text{-}1) \to x_1=x_2+x_3, \\ (1\text{-}10) \to x_2=x_1+x_3,\ (11\text{-}1) \to x_1=x_3,\ (1\text{-}11) \to x_1+x_3=0, \\ \qquad (\text{-}111) \to x_1=x_2. \end{cases}$$

Denoteremo con $M(\mathcal{G}_{3,2})$ e con $m(\mathcal{G}_{3,q})$ rispettivamente il massimo ed il minimo di $|\mathcal{F}|$ al variare della fibrazione massimale $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$. Da quanto detto nella prop. I del n.4, dal primo capoverso dell'esempio III (tenuto conto che i punti interni ad una conica $\mathcal{C}$ di $PG(2,q)$, q dispari, sono in numero di $((q^2-q)/2)$ e dalla (5.3), dall'esempio I, dalla prop.I e da quanto su detto, si ha:

(5.7) $\begin{cases} q \text{ dispari}, & m(\mathcal{G}_{3,q}) > q^2+1, \\ q \text{ pari}, & m(\mathcal{G}_{3,q}) = q^2+1. \end{cases}$

(5.8) $\begin{cases} q \text{ dispari}, & M(\mathcal{G}_{3,q}) \geq q(q-1)^2/2 + 2, \\ q \text{ pari}, & M(\mathcal{G}_{3,q}) \geq q^2+q+2. \end{cases}$

(5.9) **Se esiste in PG(2,q) una applicazione (5.1) si ha:**

$$q^2+1 \leqslant m(\mathcal{G}_{3,q}) \leqslant q^3+1 \leqslant M(\mathcal{G}_{3,q}).$$

(5.10) $M(\mathcal{G}_{3,2}) \geqslant 9, \qquad m(\mathcal{G}_{3,2})=5.$

(5.11) $10 < m(\mathcal{G}_{3,3}) \leqslant 28 \leqslant M(\mathcal{G}_{3,3}).$

6. Fibrazioni $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ con $|\mathcal{F}| \geq q^3+q+2$.

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di $\mathcal{G}_{3,q}$, $q \geqslant 3$, con:

(6.1) $|\mathcal{F}| = q^3+a, \quad a \geqslant q+2 \quad (a \leqslant 2q-1$, per la (4.2))

Risulta:

(6.2) $\begin{cases} |K| = |F| = |\mathcal{F}|\, \theta_1 = (q^3+a)\, \theta_1, \\ |H| = |H^*| = |\mathcal{F}| = q^3+a. \end{cases}$

Denotato con C l'insieme delle rette di PG(3,q) non appartenenti a K, si ha $|C| = |\mathcal{G}_{3,q}| - (q^3+a)\,\theta_1 = \theta_4+q^2-(q^3+a)\theta_1$ e quindi (per la (6.1)):

(6.3) $|C| = q^2+\theta_2 - a\,\theta_1 \leqslant q^2-2q-1.$

Sia α un piano di PG(3,q). Se $\alpha \notin H^*$ l'applicazione $p_\alpha : x \in \alpha \cap H \to p(x) \cap \alpha \in \alpha^* \cap K$ è biettiva; se $\alpha \in H^*$ e P è il punto di α tale che il fascio (P,α) corrisponde ad una retta di $\mathcal{F}$, l'applicazione $p_\alpha : x \in \alpha \cap (H-\{P\}) \to p(x) \cap \alpha \in \alpha^* \cap (K-(P,\alpha))$ è biettiva; ne segue che:

(6.4) $\alpha \in PG^*(3,q)-H^* \implies |\alpha^* \cap K| = |\alpha \cap H|,$

(6.5) $\alpha \in H^* \implies |\alpha^* \cap K| = q + |\alpha \cap H| \implies$

$$\Longrightarrow |\alpha \cap H| \leqslant q^2+1.$$

Se $P \in PG(3,q)$, denotato con K_P e con H^*_P rispettivamente l'insieme delle rette di K e dei piani di H^* per P, per dualità dalle (6.4), (6.5) si ha:

(6.6) $\quad P \in PG(3,q) - H \Longrightarrow |K_P| = |H^*_P|,$

(6.7) $\quad P \in H \Longrightarrow |K_P| = q+|H^*_P| \Longrightarrow |H^*_P| \leq q^2+1$

Proviamo che:

I. Per un punto $P \notin H$ passano almeno $q+3$ rette q-secanti H.

Dimostrazione. Sia m il numero delle rette per P q-secanti H. Ciascuna delle rimanenti θ_2-m rette per P ha allora in comune con H al più $q-1$ punti. Dunque si ha (cfr. (6.1)):

$$q^3+a = |H| \leqslant (\theta_2-m)(q-1)+mq = q^3-1+m \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad m \geqslant a+1 \geqslant q+3,$$

onde l'asserto.

II. Per un punto $P \in H$ passano almeno $q+2$ rette appartenenti ad H.

Dimostrazione: analoga alla precedente.

III. Per un punto $P \in H$ passano almeno due rette di C.

Dimostrazione. Sia u il numero delle rette per P appartenenti a C. Ragionando per assurdo supponiamo $u \leq 1$. Per la (6.6) il numero dei piani di H^* per P è $\theta_2-u \geqslant q^2+q$. Esiste dunque al più un piano α per P non di H^*. Per la prop. I esistono almeno $q+3$ rette per P q-secanti H, di esse almeno due non appartengono ad α, sia r una di esse. Dunque la r passa per P è q-secante H ed ogni piano per essa è di H^*, onde ciascuno dei $q+1$ piani per r incontra H in al più q^2+1-q punti fuori di r (cfr. (6.5)). Ne segue che:

$$q^3+a = |H| \leq (q^2+1-q)(q+1) + q = q^3+q+1,$$

da cui $a \leq q+1$ e ciò contraddice la (6.1), onde l'asserto.

Per dualità della prop. III si ha:

IV. Su un piano $\pi \notin H^*$ esistono almeno due rette di C.

Sia α un piano di PG(3,q). Le rette di C su α sono in numero di $\theta_2 - |\alpha^* \cap K|$, onde $|C| \geqslant \theta_2 - |\alpha^* \cap K|$ e quindi per la (6.3), si ha:

$$(6.8) \quad \begin{cases} |\alpha^* \cap K| \geqslant 3q+2 \\ |\alpha^* \cap K| = 3q+2 \iff a=q+2, \ C \subseteq \alpha^*. \end{cases}$$

La $(6.8)_{II}$ non può presentarsi perchè esiste almeno un piano $\beta \notin H^*$ diverso da α (in quanto $|PG^*(3,q)-H^*| = \theta_2 - a > 2$), per la proposizione IV il piano β contiene due rette di C, di queste una almeno non sta su α e ciò contraddice appunto la $(6.8)_{II}$.

Si è così provato, tenuto conto delle (6.4), (6.5), che:

V. Qualsiasi sia il piano α di PG(3,q) risulta:

$$(6.9) \qquad |\alpha^* \cap K| > 3q+2$$

$$(6.10) \qquad \alpha \in H^*, \quad |\alpha \cap H| > 2q+2$$

$$(6.11) \qquad \alpha \notin H^*, \quad |\alpha \cap H| > 3q+2.$$

Se α, β sono piani distinti di PG(3,q), denotati con C_α e C_β gli insiemi di rette di C rispettivamente su α e su β, dalle (6.4), (6.5) si ha:

$|C_\alpha| \geqslant \theta_2 - q - |\alpha \cap H|$, $|C_\beta| \geqslant \theta_2 - q - |\beta \cap H|$ e quindi in ogni caso: $|C_\alpha| + |C_\beta| \geqslant 2(q^2+1) - |\alpha \cap H| - |\beta \cap H|$.

Le rette di C appartenenti ad α e a β sono in numero di $|C_\alpha|+|C_\beta|$, se la retta $r = \alpha \cap \beta \in K$, $|C_\alpha|+|C_\beta|-1$ se $r \notin K$, dunque risulta $|C| \geq |C_\alpha|+|C_\beta|-1 \geq 2q^2+1-|\alpha \cap H|-|\beta \cap H|$. Da ciò e dalla (6.3) otteniamo:

$$(6.12) \qquad |\alpha \cap H| + |\beta \cap H| \geq q^2+2q+2, \ (\forall \alpha, \beta \in PG^*(3,q)).$$

Se ne deduce che:

VI. Se esiste un piano α di PG(3,q) tale che $|\alpha \cap H| < (q^2/2)+q+1$, per ogni altro piano β risulta $|\beta \cap H| > (q^2/2)+q+1$.

Dalle prop. III e IV si ha che:

VII. Ogni piano di $\mathcal{G}_{3,q}$ appartenente ad F o che abbia al più un punto non di F, contiene una retta di $\mathcal{F}$.

Denoteremo con ρ_s il numero dei piani di $\mathcal{P}$ (famiglia di piani di $\mathcal{G}_{3,q}$ immagini dei piani rigati di PG(3,q)) che incontrano F in s punti, con $s=3q+3,.., \theta_2$ (cfr. (6.9)). Si prova subito che:

$$(6.13)\qquad \sum_{3q+3}^{\theta_2} \rho_s = \theta_3 \;, \qquad \sum_{3q+3}^{\theta_2} s\,\rho_s = (q^3+a)\theta_1^2.$$

Moltiplicando la $(6.13)_1$ per $\theta_2 -1$ e sottraendovi la $(6.13)_{II}$ si ottiene:

$$0 \le \sum_{3q+3}^{\theta_2 -1} (\theta_2 -1-s)\rho_s = \rho_{\theta_2} + \theta_1^2\,(q-a)$$

e quindi:

$$(6.14)\qquad a \le \frac{\rho_{\theta_2}}{\theta_1^2} + q$$

Supponendosi $a \ge q+2$ si ha:

$$(6.15)\qquad \rho_{\theta_2} \ge 2\theta_1^2 \;.$$

Si è così provato che:

VIII. Esistono almeno $2\theta_1^2$ piani di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{G}_{3,q}$ tutti contenuti in F.

Per la prop. IV ogni piano $\pi \notin H^*$ in PG(3,q) contiene almeno due rette non di K. Ne segue che ogni piano α di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{G}_{3,q}$, tutto contenuto in F, proviene da un piano rigato π di PG(3,q) che appartiene ad H^* e quindi α contiene una retta di $\mathcal{F}$. Da ciò e dalle prop. VIII si ha:

IX. Ogni piano $\alpha \in \mathcal{P}$, contenuto in F, proviene da un piano rigato $\pi \in H^*$. Esistono almeno $2(\theta_1)^2$ piani di H^* in PG(3,q) le cui rette appartengono tutte a K. Per ciascuno, π, di essi si ha $|\pi \cap H|=q^2+1$ e quindi $|\pi - H|=q$; ne segue che π contiene una retta ℓ tutta contenuta in H (ed inoltre $\ell \in K$).

Fissato un tale piano π e una retta ℓ di π, con $\ell \subseteq H$ ed $\ell \in K$, sia Γ l'insieme delle rette non di K incidenti ℓ e $\gamma = |\Gamma|$. Denotiamo con u_j **il numero dei piani per ℓ che contengono** j **rette di** Γ, $j=0,1,2,..,\gamma$. Sarà:

(6.16) $$u_0 \geq 1,$$

perchè, per ipotesi, ogni retta di π appartiene a K.

Poniamo:

u'_j = n° piani per ℓ di H^* contenenti j rette di K,

u''_j= n° piani per ℓ di $PG^*(3,q)-H^*$ contenenti j rette di K,

onde risulta:

(6.17) $$u_j=u'_j+u''_j, \qquad j = 0, 1, .., \gamma .$$

Per la prop. IV si ha:

(6.18) $$u''_0 = 0, \qquad u''_1 = 0.$$

Sia α un piano per ℓ contenente j rette di Γ, se $\alpha \notin H^*$ risulta $|\alpha \cap H|= \theta_2-j$, se $\alpha \in H^*$ risulta $|\alpha \cap H|=q^2+1-j$ (cfr. (6.4), (6.5)), onde:

$$\sum_{j=0}^{\gamma} [u'_j(q^2+1-\theta_1-j)+u''_j(\theta_2-\theta_1-j)]=|H| - \theta_1$$

e quindi:

(6.19) $$\sum_{j=0}^{\gamma} u_j =q+1, \quad \sum_{j=0}^{\gamma} [u'_j(q^2-q-j)+u''_j(q^2-j)]=q^3+a- \theta_1.$$

Inoltre risulta evidentemente

(6.20) $$\sum_{j=1}^{\gamma} ju_j = \gamma .$$

Dalla (6.19) e (6.17) si ha:

$$q^3+a-\theta_1 = q^3-q+q\sum_{j=0}^{\gamma} u''_j - \sum_{j=1}^{\gamma} ju_j,$$

Da ciò e dalla (6.20) otteniamo:

$$(6.21) \qquad a = 1-\gamma+q\sum_{j=0}^{\gamma} u''_j.$$

Dalle (6.21),(6.18) si ha

$$\gamma \geq 2$$

Ma non può essere $\gamma=2$, altrimenti dalle (6.20) si avrebbe $u_1+2u_2=\gamma=2$ e quindi $u_2\leq 1$, dalle (6.21) e (6.18) si otterrebbe allora $a\leq q-1$ e ciò è escluso. Non può essere $\gamma=3$, altrimenti dalla (6.20) si avrebbe $u_1+2(u_2+u_3)+u_3=\gamma=3$ e quindi $u_2+u_3\leq 1$, dalle (6.21) e (6.18) si otterrebbe allora $a\leq q-2$ e ciò è escluso. Si è così provato che:

$$(6.22) \qquad \gamma \geq 4.$$

Il piano π contiene q punti di π-H (cfr. prop. IX), non su ℓ (perchè $\ell\subseteq H$). Per ciascuno di essi passano due rette almeno, non di K (cfr. prop. III) e quindi non appartenenti a π. In tal modo si ottengono $2q$ rette di C tutte distinte tra loroe distinte dalle rette di Γ. Dalla (6.22) segue allora che:

X. Esistono almeno $2q+\gamma\geq 2q+4$ rette di C in PG(3,q), cioè:

$$(6.23) \qquad |C|\geq 2q+4.$$

Dalle (6.23) e (6.3) si ha:

$$(6.24) \qquad a\leq 2q-3, \qquad (a\geq q+2).$$

Si è così provato che:

XI. Se $q\geq 5$ per ogni fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ si ha $|\mathcal{F}|\leq q^3+2q-3$.

Una fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ con $|\mathcal{F}|\geq q^3+q+2$, se $q=3$, in forza della (4.2), è tale che $|\mathcal{F}|=32$ e quindi:

(6.25) $\quad |H|=|H^*|=32, \qquad |PG(3,3)-H| = 8.$

Dalla (6.11) si ha:

(6.26) $\quad \alpha \in PG^*(3,3)-H^*, \qquad |\alpha \cap H| \geq 12.$

Inoltre dalla prop. IX si ricava, avendosi $32 \leq 2\theta_1^2 \leq r_{\theta_2} \leq |H^*| = 32$, che ogni piano di H^* è tale che tutte le sue rette appartengono a K, onde (cfr. (6.5)):

(6.27) $\quad \alpha \in H^*, \qquad |\alpha \cap H| = 10.$

Siano P_1 e P_2 due punti di $PG(3,3)-H$. Ciascuno, α, dei quattro piani per la retta $r=P_1P_2$, in forza della (6.26), appartiene ad H^*, onde, per la (6.27), contiene 10 punti di H e quindi tre punti di $\alpha-H$. Ne segue che $H \cap r = \{P_1, P_2\}$ (se fosse $|H \cap r| \geq 3$ sarebbe $|PG(3,3)-H|=3$ e ciò contraddice la $(6.25)_{II}$). Dunque α ha un sol punto in comune con $PG(3,3)-H-r$. Se ne deduce che $|PG(3,3)-H|=6$ e ciò è assurdo per la $(6.25)_{II}$. Si è così provato che:

(6.28) $\quad M(\mathcal{G}_{3,3}) \leq q^3+q+1 = 31.$

7. Fibrazioni mediante rette in una quadrica, Q_{2s}, non singolare di PG(2s,q), s >2.

Ricordiamo che in $PG(2s,q)$ le quadriche non singolari sono tutte proiettivamente equivalenti. Sia Q_{2s} una di esse.

Se $P \in Q_{2s}$ e τ_P è l'iperpiano tangente in P a Q_{2s}, risulta: $|Q_{2s}| = q^{2s-1}+q|Q_{2s-2}|+1$ e quindi per induzione rispetto ad s si ha (essendo $|Q_1|=q+1$):

(7.1) $$|Q_{2s}| = \theta_{2s-1}$$

Gli spazi massimali situati su Q_{2s} hanno dimensione $s-1$ (come si può facilmente provare procedendo per induzione rispetto ad s). Ci proponiamo di determinare il numero D_{2s} di tali spazi, S_{s-1} su Q_{2s}. Sia $P \in Q_{2s}$, gli S_{s-1} di Q_{2s} per P sono tanti quanti gli S_{s-2} di una $Q_{2(s-1)}$ sezione di Q_{2s} con un $S_{2s-2} \subset \tau_P$, con $P \notin S_{2s-2}$, cioè sono in numero di:

(7.2) $$D_{2s}(P) = D_{2s-2}.$$

Consideriamo l'insieme delle coppie (P, S_{s-1}), ove $P \in Q_{2s}$ e S_{s-1} è uno spazio di Q_{2s} per P. La cardinalità N di tale insieme è data da: $N = |Q_{2s}|\ D_{2s}(P) = D_{2s}\ \theta_{s-1}$, da cui, tenuto conto delle (7.1), (7.2) si ha:

(7.3) $$D_{2s} = \theta_{2s-1}\ D_{2s-2}/\ \theta_{s-1}.$$

Dalla (7.3) per induzione si ha (essendo $D_2 = \theta_1$):

$$D_{2s} = \prod_{i=1}^{s} \theta_{2s-2i+1}/\ \theta_{s-i}$$

e quindi, risultando $\theta_{2n+1}/\theta_n = q^{n+1}+1$, si ha:

(7.4) $$D_{2s} = \prod_{i=1}^{s} (q^{s-i+1}+1).$$

Sia ora $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in Q_{2s}. Deve aversi (tenuto conto che $\theta_{2s-1}/\theta_1 = \sum_{i=0}^{s-1} q^{2i}$):

(7.5) $$\begin{cases} |\mathcal{F}| \leq |Q_{2s}|/\ \theta_1 = \sum_{i=0}^{s-1} q^{2i} \\ |\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{s-1} q^{2i} \iff \mathcal{F} \text{ è totale.} \end{cases}$$

Supponiamo la $\mathcal{F}$ **massimale**, non totale. Allora $F = \bigcup_{\ell \in \mathcal{F}} \ell$ è un insieme intersezione su Q_{2s} e quindi, per ogni $S_{s-1} \subset Q_{2s}$, l'insieme $F \cap S_{s-1}$ è un insieme intersezione rispetto alle rette, onde:

(7.6) $$|F \cap S_{s-1}| \geq \theta_{s-2};\quad |F \cap S_{s-1}| = \theta_{s-2} \iff F \cap S_{s-1} = S_{s-2}.$$

Consideriamo l'insieme delle coppie (P, S_{s-1}) ove $P \in F$, $S_{s-1} \subset Q_{2s}$ e $P \in S_{s-1}$. Computando il numero di tali coppie nei due modi possibili si ha:

$$\begin{cases} |F|\ D_{2s}(P) \geq D_{2s}\ \theta_{s-2}, \\ |F|\ D_{2s}(P) = D_{2s}\ \theta_{s-2} \iff F \cap S_{s-1} = S_{s-2},\ \forall S_{s-1} \subset Q_{2s}, \end{cases}$$

cioè, tenuto conto che per le (7.4), (7.2) è: $D_{2s}/D_{2s-2} = q^s+1$,

$$(7.7)\quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \geq (q^s+1)\ \theta_{s-2}/\ \theta_1 \\ |\mathcal{F}| = (q^s+1)\theta_{s-2}/\theta_1 \Longleftrightarrow F\cap S_{s-1}=S_{s-2},\ \forall S_{s-1}\subset Q_{2s} \Longleftrightarrow \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ **ogni retta di Q_{2s} o appartiene ad F o incontra F in un punto**

Osserviamo che se s è pari la quantità a secondo membro della $(7.7)_I$ non è mai un intero. Ne segue che:

(7.8) **s pari, $\mathcal{F}$ massimale** $\Longrightarrow$ $|\mathcal{F}| > (q^s+1)\theta_{s-2}/\theta_1$.

Se s è dispari e vale la $(7.7)_{II}$, ogni retta di Q_{2s} o incontra F in un punto ovvero è tutta contenuta in F. Da ciò si prova subito che:

(7.9) **L'S_3 congiungente due rette sghembe di F (per esempio due rette di $\mathcal{F}$) è tale che: $S_3\cap Q_{2s}\subset F$. Inoltre sia S_d un sottospazio d-dimensionale $(d\geq 3)$ di PG(2s,q) per il quale $S_d\cap Q_{2s}\subset F$, allora per ogni $P\in Q_{2s}-S_d$, l'S_{d+1} congiungente P e l'S_d è tale che $S_{d+1}\cap Q_{2s}\subset F$.**

Dalla (7.9) si ha che lo spazio congiungente F, interseca Q_{2s} in F. Tale spazio non può essere PG(2s,q), altrimenti $F=Q_{2s}$ e ciò è escluso perchè $|F|=(q^s+1)\theta_{s-2}=\theta_{2s-2}-q^{s-1}<|Q_{2s}|=\theta_{2s-1}$; nè può avere dimensione $<2s-1$, altrimenti Q_{2s} ammetterebbe rette ad intersezione vuota con F. Dunque lo spazio congiungente F è un iperpiano S_{2s-1} e risulta $S_{2s-1}\cap Q_{2s}=F$.

Tale S_{2s-1} non può essere tangente a Q_{2s} (perchè un iperpiano tangente, τ_P, in P a Q_{2s} contiene degli S_{s-1} di Q_{2s}, i quali intersecano F in S_{s-2}, cfr. $(7.7)_{II}$, onde $\tau_P\cap Q_{2s}\not\subset F$). Dunque $S_{2s-1}\cap Q=F$ è una quadrica Q_{2s-1} non singolare di S_{2s-1} e quindi o è $|Q_{2s-1}|=\theta_{2s-2}+q^{s-1}$ (quadrica iperbolica) ovvero $|Q_{2s-1}|=\theta_{2s-2}-q^{s-1}$ (quadrica ellittica), cfr. n.8; deve presentarsi necessariamente il secondo caso, essendo $|Q_{2s-1}|=|F|=$ $=\theta_1|\mathcal{F}|=(q^s+1)\theta_{s-2}=\theta_{2s-2}-q^{s-1}$. Si è così provato che:

I. Se s è dispari per una fibrazione massimale $\mathcal{F}$ di Q_{2s} si ha

$$|\mathcal{F}|\geq (q^s+1)\ \theta_{s-2}/\theta_1 = (\theta_{2s-2}-q^{s-1})/\ \theta_1,$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, la $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di una quadrica ellittica sezione iperpiana di Q_{2s}.

Osserviamo che, se q è pari, la quadrica Q_{2s} di $PG(2s,q)$ ammette un punto nucleo cioè un punto $N(\notin Q_{2s})$ per cui passano tutti gli iperpiani tangenti alla Q_{2s}, onde ogni retta per N è tangente a Q_{2s}. Proiettando da N la Q_{2s} su un iperpiano $PG(2s-1, q)$ non per N, si ottiene la biezione:

$$\varphi : Q_{2s} \to PG(2s-1, q)$$

che muta le rette di Q_{2s} nelle rette di un complesso lineare K, relativo alla polarità nulla seguente: per ogni $P \in PG(2s-1,q)$ sia $P'=PN \cap Q_{2s}$, $\tau_{P'}$ l'iperpiano tangente in P' a Q_{2s} e π l'iperpiano di $PG(2s-1 q)$ sezione di $\tau_{P'}$ con $PG(2s-1,q)$; la biezione $p:P\in PG(2s-1, q)\to \pi\in PG^*(2s-1,q)$ è la polarità nulla richiesta. Ogni fibrazione $\mathcal{F}$ di Q_{2s} si proietta in una fibrazione $\mathcal{F}'$, di $PG(2s-1,q)$ aderente a K (cioè contenuta in K) e viceversa. Se $\mathcal{F}$ è massimale o totale la $\mathcal{F}'$ è massimale o totale e viceversa. Dunque lo studio delle fibrazioni in Q_{2s} equivale, se q è pari, a quello delle fibrazioni aderenti a K in $PG(2s-1, q)$.

8. Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare di $PG(2s+1, q)$, $s>2$.

Ricordiamo che in $PG(2s+1, q)$ esistono esattamente due tipi di quadriche non singolari proiettivamente distinte, quelle iperboliche e quelle ellittiche. Denoteremo con Q^I_{2s+1} una quadrica iperbolica e con Q^E_{2s+1} una quadrica ellittica. Tenuto conto che un iperpiano tangente τ_P in un punto P di Q^I_{2s+1} (o di Q^E_{2s+1}) incontra Q^I_{2s+1} (o Q^E_{2s+1}) in un cono proiettante da P una quadrica Q^I_{2s-1} (o Q^E_{2s-1}) di un S_{2s-1} di τ_P, con $P\notin S_{2s-1}$, si prova subito induttivamente rispetto ad s che:

$$(8.1) \qquad |Q^I_{2s+1}| = \theta_{2s}+q^s, \qquad |Q^E_{2s+1}| = \theta_{2s}-q^s,$$

ed inoltre che gli spazi massimali di Q^I_{2s+1} hanno dimensione s, quelli di Q^E_{2s+1} hanno dimensione $s-1$.

Determiniamo il numero D^I_{2s+1} degli spazi massimali, S_s, di Q^I_{2s+1}. Consideriamo le coppie (P, S_s), ove $P\in Q^I_{2s+1}$, $S_s\subset Q^I_{2s+1}$ e $P\in S_s$. Computando nei due modi possibili il numero delle coppie suddette si ha la formula ricorrente:

(8.2) $$\theta_s D^I_{2s+1} = (\theta_{2s}+q^s)D^I_{2s-1},$$

che permette di ricavare D^I_{2s+1}.

In modo analogo si prova che, denotato con D^E_{2s+1} il numero degli spazi massimali, S_{s-1}, di Q^E_{2s+1}, risulta:

(8.3) $$\theta_{s-1} D^E_{2s+1} = (\theta_{2s}-q^s)D^E_{2s-1}.$$

Sia ora $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in Q^I_{2s+1}. Deve aversi, essendo $|F|=\theta_1|\mathcal{F}|\leq |Q^I_{2s+1}|$:

(8.4) $$|\mathcal{F}|\leq (\theta_{2s}+q^s)/\theta_1$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, la $\mathcal{F}$ è totale. Risultando: $(\theta_{2s}+q^s)/\theta_1 = \sum_{i=0}^{s-1} q^{2i+1} + (q^s+1)/\theta_1$, si ha che il secondo membro della (8.4) non è mai un intero se s è pari, mentre se $s=2\ell+1$ esso è dato da:

$\sum_{i=0}^{2\ell} (q^{2i+1}+(-1)^i q^i)$, ne segue che:

(8.5) $$s \text{ pari} \implies \begin{cases} |\mathcal{F}| < (\theta_{2s}+q^s)/\theta_1, \\ \text{non esistono fibrazioni totali di } Q^I_{2s+1}, \end{cases}$$

(8.6) $$s=2\ell+1 \implies \begin{cases} |\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{2\ell} (q^{2i+1}+(-1)^i q^i), \\ |\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{2\ell} (q^{2i+1}+(-1)^i q^i) \iff \mathcal{F} \text{ è totale.} \end{cases}$$

Supponiamo ora la $\mathcal{F}$ massimale, allora F è un insieme intersezione e quindi:

(8.7) $$\forall S_s \subset Q^I_{2s+1},\ |F\cap S_s| \geq \theta_{s-1};\ |F\cap S_s| = \theta_{s-1} \iff$$
$$\iff F\cap S_s = S_{s-1}.$$

Consideriamo l'insieme delle coppie (P, S_s) ove $P\in F$, $S_s\subset Q^I_{2s+1}$ e $P\in S_s$. Computando nei due modi possibili il numero delle coppie suddette, si ha per la (8.7): $|F|D^I_{2s-1} \geq \theta_{s-1}D^I_{2s+1}$ il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, per ogni $S_s\subset Q^I_{2s+1}$ si ha $F\cap S_s = S_{s-1}$. Per la (8.2) si ha allora:

$$(8.8)\quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \geq (\theta_{2s}+q^s)\theta_{s-1}/\theta_1\theta_s = \theta_{2s-1}/\theta_1 = \sum_{i=0}^{s-1} q^{2i} \\ |\mathcal{F}| = \theta_{2s-1}/\theta_1 \iff F \cap S_s = S_{s-1},\ \forall S_s \subset Q^I_{2s+1} \iff \\ \iff \text{per ogni retta } r \subset Q^I_{2s+1} \text{ si ha } r \subset F \text{ ovvero } |r \cap F| = 1. \end{cases}$$

Se vale la $(8.8)_{II}$, ragionando come nel n.7, si prova che:

I. Per una fibrazione massimale $\mathcal{F}$ di Q^I_{2s+1} si ha:

$$|\mathcal{F}| \geq \theta_{2s-1}/\theta_1,$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, la $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di una quadrica non singolare sezione iperpiana di Q^I_{2s+1}.

Sia ora $\mathcal{F}$ una fibrazione di una quadrica Q^E_{2s+1}. In modo del tutto analogo a quanto precede (tenuto conto della (8.3)) si prova che:

$$(8.9)\qquad s \text{ dispari} \Longrightarrow \begin{cases} |\mathcal{F}| < (\theta_{2s}-q^s)/\theta_1, \\ \textbf{non esistono fibrazioni totali di } Q^E_{2s+1} \end{cases}$$

$$(8.10)\qquad s=2\ell \Longrightarrow \begin{cases} |\mathcal{F}| \leq (\theta_{2s}-q^s)/\theta_1 = \sum_{i=0}^{\ell-1} q^{2i} + \sum_{i=\ell}^{2\ell-1} q^{2i+1} \\ |\mathcal{F}| = (\theta_{2s}-q^s)/\theta_1 \iff \mathcal{F} \textbf{ è totale.} \end{cases}$$

$$(8.11)\qquad \mathcal{F} \textbf{ massimale in } Q^E_{2s+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\mathcal{F}| > (\theta_{2s} - q^s)\,\theta_{s-2}/\theta_1\theta_{s-1}.$$

Osserviamo infine che fissato un iperpiano S_{2s} di PG(2s+1, q) che intersechi Q^E_{2s+1} in una quadrica non singolare Q_{2s}, se $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di Q_{2s}, la $\mathcal{F}$ risulta in Q^E_{2s+1} una fibrazione massimale. E' aperto il problema di vedere se esistono fibrazioni massimali di Q^E_{2s+1} con un numero di rette inferiore a $|Q_{2s}|/\theta_1 = \theta_{2s-1}/\theta_1$.

9. Fibrazioni mediante rette in $\mathcal{G}_{r,q}$.

Sia $\mathcal{G}_{r,q}$ la varietà grassmanniana delle rette di PG(r, q) ed $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in $\mathcal{G}_{r,q}$. Essendo $|\mathcal{G}_{r,q}|=\theta_r\ \theta_{r-1}/\ \theta_1$, si ha:

$$(9.1)\qquad \begin{cases} |\mathcal{F}| \leqslant \theta_r\ \theta_{r-1}/\ \theta_1^2 \\ |\mathcal{F}| = \theta_r\ \theta_{r-1}/\ \theta_1^2 \iff \mathcal{F} \text{ è totale.} \end{cases}$$

Per $r=2s$ risulta: $\theta_r\theta_{r-1}/(\theta_1)^2 = \theta_{2s}\theta_{2s-1}/(\theta_1)^2 = q\sum_{i=0}^{s-1} q^{2i} + (\sum_{i=0}^{s-1} q^{2i})/\theta_1$, quindi il secondo membro della $(9.1)_1$ è un intero se e solo se θ_1 divide s. Per $r=2s+1$ risulta: $\theta_r\theta_{r-1}/(\theta_1)^2 = \theta_{2s+1}\theta_{2s}/(\theta_1)^2 = q(\sum_{i=0}^{s} q^{2i})(\sum_{i=0}^{s-1} q^{2i}) + (\sum_{i=0}^{s} q^{2i})/\theta_1$, quindi il secondo membro della $(9.1)_1$ è un intero se e solo se θ_1 divide s+1. Ne segue che:

(9.2) $r=2s$, θ_1 non divide s $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ non è totale cioè $|\mathcal{F}| < \theta_r\ \theta_{r-1}/\ \theta_1^2$

(9.3) $r=2s+1$, θ_1 non divide s+1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ non è totale cioè $|\mathcal{F}| < \theta_r\ \theta_{r-1}/\ \theta_1^2$.

E' aperto il problema di esaminare se esistono fibrazioni totali di $\mathcal{G}_{r,q}$ con r=2s e θ_1 che divida s, owero r=2s+1 e θ_1 che divida s+1. Il primo caso si ha per r=5 e q=2: esiste in $\mathcal{G}_{5,2}$ una fibrazione totale $\mathcal{F}$ (ed allora $|\mathcal{F}|=7\cdot 31 = 217$ e $|\mathcal{G}_{5,2}|=21\cdot 31=651$)?

La tabella seguente da' per $r \leq 18$ i valori di q per i quali possono esistere fibrazioni totali di $\mathcal{G}_{r,q}$.

r =	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
q =	NO	NO	2	2	3	3	4	4	2 5	2 5	NO	NO	3 7	3 7	2 8	2 8

Supponiamo ora la $\mathcal{F}$ massimale, onde $F=\bigcup_{\ell\in\mathcal{F}}\ell$ è un "insieme intersezione". Sia $\mathcal{S}$ la famiglia degli S_{r-1} di $\mathcal{G}_{r,q}$ immagini delle stelle di rette di $PG(r,q)$. Se $S_{r-1}\in\mathcal{S}$ sarà $S_{r-1}\cap F$ un insieme intersezione di S_{r-1}, e quindi:

$$(9.4)\quad \begin{cases} \forall S_{r-1}\in\mathcal{S}, & |S_{r-1}\cap F|\geq\theta_{r-2}, \\ & |S_{r-1}\cap F|=\theta_{r-2} \Longleftrightarrow S_{r-1}\cap F=S_{r-2}. \end{cases}$$

Computando nei due modi possibili il numero delle coppie (P, S_{r-1}), ove $P\in F$, $S_{r-1}\in\mathcal{S}$, $P\in S_{r-1}$, si ottiene, per le (9.4):

$$\begin{cases} |F|\,\theta_1\geq\theta_r\,\theta_{r-2} \\ |F|\,\theta_1=\theta_r\,\theta_{r-2} \Longleftrightarrow \forall S_{r-1}\in\mathcal{S},\ S_{r-1}\cap F \text{ è un } S_{r-2} \end{cases}$$

da cui, essendo $|F|=\theta_1|\mathcal{F}|$ si ha:

$$(9.5)\quad \begin{cases} |\mathcal{F}|\geq\theta_r\,\theta_{r-2}/\theta_1^2, \\ |\mathcal{F}|=\theta_r\,\theta_{r-2}/\theta_1^2 \Longleftrightarrow \forall S_{r-1}\in\mathcal{S},\ S_r\cap F \text{ è un } S_{r-2}. \end{cases}$$

Supponiamo $|\mathcal{F}|=\theta_r\,\theta_{r-2}/\theta_1^2$, allora per ogni $S_{r-1}\in\mathcal{S}$ si ha che $S_{r-1}\cap F$ è uno spazio S_{r-2}.

Ne segue che, denotato con K l'insieme delle rette di $PG(r,q)$ corrispondenti ai punti di F, per ogni punto P di $PG(r,q)$ le rette di K per P sono congiunte da un iperpiano che denoteremo $\pi(P)$. Si ottiene così l'applicazione

$$(9.6)\qquad \pi : P\in PG(r,q) \to \pi(P)\in PG^*(r,q).$$

Evidentemente si ha:

$$(9.7)\qquad Q\in\pi(P) \Longleftrightarrow P\in\pi(Q).$$

Proviamo che:

(9.8) $\quad P, Q\in PG(r,q),\ PQ\in K \Longrightarrow$ **ogni retta di $\pi(P)\cap\pi(Q)$, incidente la retta PQ, appartiene a K.**

Dimostrazione. Sia ℓ una retta incidente nel punto L la retta PQ e contenuta in $\pi(P) \cap \pi(Q)$. Sia $T \in \ell - L$; poichè $T \in \pi(P)$ e $T \in \pi(Q)$, per la (9.7), l'iperpiano $\pi(T)$ contiene P, Q; onde $\pi(T)$ contiene il piano TPQ e quindi la retta $\ell(\ni T)$, onde $\ell \in K$ (in quanto tutte le rette per T di $\pi(T)$ appartengono a K), si ha così l'asserto.

(9.10) **La (9.6) è iniettiva e quindi biettiva.**

Dimostrazione. Supponiamo la (9.6) non iniettiva. Esistono allora due punti distinti P e Q tali che $\pi(P) = \pi(Q)$. Allora la retta PQ appartiene a K (perchè $Q \in \pi(P)$) e, per la (9.8), ogni retta di $\pi(P) = \pi(Q)$, incidente la PQ, appartiene a K.

Quindi per ogni punto L di PQ si ha $\pi(L) = \pi(P) = \pi(Q)$. Sia $T \in PG(r,q) - \pi(P)$, l'iperpiano $\pi(T)$ incontra la retta PQ in un punto X. La retta TX appartiene a K, quindi $\pi(X)$ contiene la TX, onde $T \in \pi(X)$. Ma ciò è assurdo perchè $T \notin \pi(P) = \pi(Q) = \pi(X)$. Si ha così l'asserto.

(9.11) **La (9.6) è una polarità nulla non degenere, onde r è dispari.**

Dimostrazione. La (9.6) è biettiva. Inoltre, per la (9.8), se un punto X descrive una retta $PQ \in K$, allora $\pi(X)$ descrive il fascio con asse $\pi(P) \cap \pi(Q)$.

Se $P, Q \in PG(r,q)$ e la retta PQ non appartiene a K, sia $X \in \pi(P) \cap \pi(Q)$; le rette XP e XQ appartengono a K (perchè, per la (9.7), $P \in \pi(X)$, $Q \in \pi(X)$, quindi $\pi(X)$ contiene la retta $s = PQ$; onde, per ogni $Y \in s$, la retta XY appartiene a K. Ne segue che, fissato $Y \in s = PQ$, $\pi(Y)$ passa per $X \in \pi(P) \cap \pi(Q)$, qualsiasi sia X in $\pi(P) \cap \pi(Q)$, cioè $\pi(Y) \supseteq \pi(P) \cap \pi(Q)$. Dunque al variare di Y sulla retta PQ, $\pi(Y)$ descrive il fascio di iperpiani di asse $\pi(P) \cap \pi(Q)$. Se ne deduce che la (9.6) è una correlazione. Essa è involutoria per la (9.7), inoltre: $\forall P \in PG(r,q)$, $P \in \pi(P)$; dunque la (9.6) è una polarità nulla non degenere e quindi r deve essere dispari.

Da quanto precede si deduce che:

I. Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale di $\mathcal{S}_{r,q}$. Risulta:

(9.12) $$|\mathcal{F}| \geq \theta_r \, \theta_{r-2} / \theta_1^2,$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, r è dispari, F è una sezione di $\mathcal{G}_{r,q}$ con un iperpiano α non tangente a $\mathcal{G}_{r,q}$, K è un complesso lineare di rette non degenere di $PG(r,q)$, $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale di $\alpha \cap \mathcal{G}_{r,q}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Tallini, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli, (1973), pp. 1-30.

[2] G. Tallini, *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Conv. Teorie Combinatorie (Roma, settembre 1973), Acc. Naz. Lincei 1976, pp. 1-7.

[3] G. Tallini, *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois. Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb., Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", Quaderno n. 64, maggio 1985, pp. 1-139.

[4] G. Tallini, *Lezioni di Geometria III, anno acc. 1986-87*. Ist. Mat. "G. Castelnuovo" Fac. Sc. Mat. Fis. Naturali Univ. Roma (1987).