UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA
LA SAPIENZA

Giuseppe Tallini

Dimensioni negli ipergruppi

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini

n.107 Marzo 1993

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
ISTITUTO "G. CASTELNUOVO„
QUADERNI DEL SEMINARIO DI GEOMETRIE COMBINATORIE

Dimensioni negli ipergruppi

Giuseppe Tallini (Roma)

Alla cara memoria del mio amico **Giovanni Melzi**

1 Introduzione e premesse.

Ci occuperemo in questo Lavoro delle varie nozioni di dimensioni e delle relazioni tra esse, che si possono dare per un ipergruppo. Quanto esporremo però si trasporta facilmente alle altre strutture multivoche (ed anche alle strutture univoche) algebriche, quali gli ipergruppoidi, i quasipergruppi, i semipergruppi [1], [10], [14], gli iperanelli [3], [4], gli spazi ipervettoriali [5], [6], [7], [8], [9].

Sia $(G, \circ)$ un ipergruppo, [1]. Chiameremo *"sottostruttura"* di $(G, \circ)$ un sottoinsieme non vuoto T di G tale che:

$$\forall x, y \in T \quad \Rightarrow \quad x \circ y \subseteq T. \tag{1.1}$$

In generale T sarà un semipergruppo, come caso particolare un ipergruppo. Denoteremo con $\mathcal{T}$ la famiglia di tutte le sottostrutture di $(G, \circ)$. Due casi sono possibili:

$$(I) \qquad \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T \neq \emptyset,$$

$$(II) \qquad \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T = \emptyset.$$

Nel caso (I), $\mathcal{T}$ è un sistema di chiusura (perché $G \in \mathcal{T}$ e l'intersezione di elementi di $\mathcal{T}$ è un elemento di $\mathcal{T}$). Nel caso (II), $\mathcal{T} \cup \{\emptyset\}$ è un sistema di chiusura. Porremo $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ nel primo caso ed $\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \{\emptyset\}$ nel secondo caso. Se T è una sottostruttura di $(G, \circ)$, denotermo con $\mathcal{S}_T$ l'insieme degli elementi di $\mathcal{S}$ contenuti in T, esso è un sistema di chiusura che penseremo associato a T (quindi nel caso II risulta $\emptyset \in \mathcal{S}_T$).

Essendo $\mathcal{S}$ un sistema di chiusura si può introdurre la nozione di *chiusura*, $\overline{X}$, di un sottoinsieme X di G ($\overline{X}$ essendo l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ che contengono X), quella di insieme X *indipendente* (se $\forall x \in X$ si ha: $x \notin \overline{X - \{x\}}$), *dipendente*, *generatore* (se $\overline{X} = G$), *base* (se $\overline{X} = G$ e X è indipendente). Osserviamo che i casi (I) e (II) si presentano effettivamente, per esempio si ha il caso (I) se G è un gruppo finito , il caso (II) se G è uno spazio proiettivo (cfr. Esempio 2 del n. **3**), oppure se G è il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ [in tal caso $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$ sono due sottostrutture ad intersezione vuota].

Un ipergruppo $(G, \circ)$, o più in generale un ipergruppoide, sarà detto *monico* se non ammette sottostrutture proprie, cioè se $\mathcal{S} = \{G\}$. Per esempio se G è un insieme non vuoto e si pone: $\forall x, y \in G$, $x \circ y = G$, si ha che $(G, \circ)$ è un ipergruppo monico, che dicesi *banale*. Daremo ora una vasta classe di esempi di ipergruppi monici non banali.

ESEMPIO 1.- Sia $(G, .)$ un gruppo, con $|G| \geq 3$. Si ponga:

$$\forall x, y \in G, \qquad x \circ y = G - \{xy\}. \tag{1.2}$$

Mostriamo che $(G, \circ)$ è un ipergruppo. Si ha per la (1.2):

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x \circ y) \circ z = \bigcup_{t \in G - \{xy\}} G - \{tz\}. \tag{1.3}$$

Per ogni $c \in G$, poiché $|G| \geq 3$, esiste $t' \in G - \{xy, cz^{-1}\}$; si ha: $c \in G - \{t'z\}$, con $t' \in G - \{xy\}$, onde per la (1.3), $c \in (x \circ y) \circ z$; quindi $(x \circ y) \circ z = G$. In modo analogo si prova che $x \circ (y \circ z) = G$. Ne segue la proprità associativa di $(G, \circ)$. Proviamo la proprietà di riproducibilità :

$$\forall a, b \in G, \quad \exists x \in G \quad : \quad b \in a \circ x. \tag{1.4}$$

Per ogni $a, b \in G$, esiste $x \in G - \{a^{-1}b\}$; si ha: $b \in G - \{ax\} = a \circ x$, onde la (1.4). Dunque $(G, \circ)$ è un ipergruppo. Mostriamo che $(G, \circ)$ è monico. Sia S una sottostruttura di $(G, \circ)$ ed $a \in S$, si ha: $a \circ a = G - \{a^2\} \subseteq S$, quindi $|S| \geq 2$ (in quanto $|G| \geq 3$). Sia allora $b \in S$ con $b \neq a$, risulta: $a \circ b = G - \{ab\} \subseteq S$, onde, se $S \neq G$, sarà $S = G - \{ab\} = G - \{a^2\}$, ma ciò è escluso perché $a \neq b$. Quindi $S = G$, ne segue che S è monico.

Chiameremo *catena* di lunghezza n di $(G, \circ)$ una n-pla $(S_1, S_2, ..., S_n)$ di sottostrutture di $(G, \circ)$ tale che:

$$S_i \subseteq S_{i+1}, \quad S_i \neq S_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1. \tag{1.5}$$

Una catena la diremo *satura* o *massimale* se non è contenuta propriamente in un'altra catena. Se $(S_1, S_2, ..., S_n)$ è satura allora: nel (I) caso $S_1 = \overline{\emptyset}$, mentre nel (II) caso S_1 è una sottostruttura *monica* [cioè non contiene propriamente altre sottostrutture, ossia è un atomo del reticolo $(\mathcal{S}, \subseteq)$], inoltre in ogni caso $S_n = G$ ed S_{i+1} *copre* S_i [cioè non esiste nessuna sottostruttura contenente propriamente S_i e contenuta propriamente in S_{i+1}] per $i = 1, 2, ..., n-1$. Viceversa se sono verificate le suddette proprietà la catena $(S_1, S_2, ..., S_n)$ risulta satura.

Nel seguito supporremo che l'insieme delle lunghezze delle catene sia limitato superiormente. In tali ipotesi introdurremo la nozione di dimensione di $(G, \circ)$ e ne studieremo le proprietà . Inoltre daremo le nozioni di dimensioni geometriche massima, minima e di dimensioni lineari massime e minime di $(G, \circ)$ e stabiliremo relazioni tra esse. Tali quattro dimensioni permettono di dare una classificazione degli ipergruppi. Tra l'altro proveremo che esse coincidono se, e soltanto se, $(G, \mathcal{S})$ risulta *matroidale* (cfr. [11]), cioè il sistema di chiusura $\mathcal{S}$ soddisfa l'assioma dello scambio:

$$(\sigma) \qquad \forall X \subseteq G, \forall x, y \in G : x \notin \overline{X}, x \in \overline{X \cup y} \implies y \in \overline{X \cup x}.$$

2 Dimensione di $(G, \circ)$.

Diremo che $(G, \circ)$ ha *dimensione* d se ogni catena di $(G, \circ)$ ha lunghezza $\leq d + 1$ ed esiste qualche catena di lunghezza $d + 1$. Diremo che $(G, \circ)$ ha *dimensione infinita* se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste qualche catena di lunghezza $> n$. Osserviamo che denotato con N l'insieme degli interi che sono lunghezze di catene, due eventualità sono possibili a seconda che N sia limitato superiormente oppure no. Nella prima eventualità , detto $d+1$ il massimo di N, $(G,\circ)$ ha dimensione d, nella seconda $(G,\circ)$ ha dimensione infinita. Nel seguito supporremo sempre che $(G,\circ)$ abbia dimensione finita d. Proviamo il seguente Teorema che, oltre ad avere un interesse a sé , ci sarà utile nel seguito.

Teorema 2.1 *Sia G un gruppo ed u la sua unità . Se $dim(G)$ è finita, ogni sottostruttura di G deve contenere u.*

Dimostrazione: Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una sottostruttura H di G tale che $u \notin H$. Sia $a \in H$, allora $a^n \neq u$ per ogni intero $n > 0$. Si fissi comunque un intero $s \geq 1$. Per ogni $i \in \{0, 1, ..., s\}$ si consideri la sottostruttura di G seguente (porremo $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$):

$$T_i = \{a^{2^{s-i}n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Evidentemente si ha:

$$T_i \subseteq T_{i+1}, \quad T_i \neq T_{i+1}.$$

Quindi $(T_0, T_1, T_2, ..., T_s)$ è una catena di lunghezza $s+1$. Dunque per ogni $s \geq 1$ esiste in G una catena di lunghezza $> s$, cioè $dim(G) = \infty$, onde l'asserto.

Se $(G,\circ)$ ha dimensione d ogni sua catena di lunghezza $d+1$ è evidentemente satura. Inoltre se $T \in \mathcal{S}$ (con $T \neq \emptyset$), poiché ogni catena di T è anche una catena di $(G,\circ)$, si ha che T ha dimensione: $dim\ T \leq d$ e se $dim\ T = d$ allora $T = G$. Se $T = \emptyset \in \mathcal{S}$, porremo $dim\ T = -1$. Rimane allora definita l'applicazione:

$$dim: \quad T \in \mathcal{S} \quad \rightarrow \quad dimT \in \{0, 1, ..., d\}, \qquad caso \quad (I) \tag{2.6}$$

$$dim: \quad T \in \mathcal{S} \quad \rightarrow \quad dimT \in \{-1, 0, 1, ..., d\}, \qquad caso \quad (II) \tag{2.7}$$

Si ha nel caso (I):

$dim\ T = 0 \iff T = \overline{\emptyset}$;

$dim\ T = 1 \iff$ l'unica sottostruttura propria di T è $\overline{\emptyset}$;

$dim\ T = 2 \iff$ esistono sottostrutture proprie diverse da $\overline{\emptyset}$, ciascuna di esse ha dimensione 1 e due di esse s'incontrano in $\overline{\emptyset}$.

Si ha nel caso (II):

$dim\ T = -1 \iff T = \emptyset$;

$dim\ T = 0 \iff T$ è monica;

$dim\ T = 1 \iff$ esistono sottostrutture proprie di T e ciascuna di esse è monica e quindi due di esse sono ad intersezione vuota;

$dim\ T = 2 \iff$ ogni sottostruttura propria o è monica oppure ha dimensione 1 ed esistono sottostrutture di dimensione 1.

Proviamo che:

Teorema 2.2 *Le applicazioni (2.6), (2. 7) sono surgettive.*

Dimostrazione: Sia $(S_0, S_1, ..., S_d)$ una catena di lunghezza $d+1$ di $(G, \circ)$. Essa allora è satura e $S_0 = \overline{\emptyset}$ nel caso (I), S_0 è monica nel caso (II); quindi in ogni caso $dim\ S_0 = 0$ (per quanto si è sopra visto), inoltre nel caso (II) $dim\ \emptyset = -1$. Proviamo che $dim\ S_i = i$, per ogni $i \in \{1, 2, ..., d\}$, ne seguirà l'asserto. Si ha :

$$i \leq dimS_i, \tag{2.8}$$

perché in S_i la catena $(S_0, S_1, ..., S_i)$ ha lunghezza $i+1$. Sia $n = dim S_i$. Se fosse $n \geq i+1$, in S_i vi sarebbe una catena satura di lunghezza $n+1 \geq i+2$, sia essa $(T_0, T_1, ..., T_{n-1}, T_n = S_i)$, ma allora la catena $(T_0, T_1, ..., T_{n-1}, S_i, S_{i+1}, ..., S_d)$ di $(G, \circ)$ avrebbe lunghezza $d-i+1+n \geq d+2$ e ciò è escluso. Dunque $dim\ S_i \leq i$. Da (2.8) si ha allora $dim\ S_i = i$, ne segue l'asserto.

Da quanto precede si ha che, per ogni $T, T' \in \mathcal{S}$:

$$T \subseteq T' \Rightarrow [dimT \leq dimT'; \quad dimT = dimT' \iff T = T']. \tag{2.9}$$

Siano ora $(G, \circ)$ e $(G', \circ')$ due ipergruppi ed

$$f: \quad G \to G'$$

un omomorfismo tra essi, cioè una applicazione tale che:

$$\forall x, y \in G, \quad f(x \circ y) \subseteq f(x) \circ' f(y). \tag{2.10}$$

Proviamo che se la f è surgettiva valgono le seguenti implicazioni:

$$T' \in \mathcal{S}' \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(T') \in \mathcal{S}. \tag{2.11}$$

$$S', T' \in \mathcal{S}', S' \subset T' \Rightarrow f^{-1}(S') \subset f^{-1}(T'). \tag{2.12}$$

<u>Dimostrazione</u>: Si ha:

$$x, y \in f^{-1}(T') \quad \Rightarrow \quad x' = f(x), y' = f(y) \in T' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x' \circ' y' \subseteq T' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x \circ y) \subseteq f(x) \circ' f(y) = x' \circ' y' \subseteq T' \quad \Rightarrow \quad x \circ y \in f^{-1}(T'),$$

ne segue la (2.11). Proviamo la (2.12): è evidente che $f^{-1}(S') \subseteq f^{-1}(T')$, mostriamo che $f^{-1}(S') \neq f^{-1}(T')$; poiché $S' \subset T'$, esiste $x' \in T' - S'$; si ha:

$$x' \in T' - S' \Rightarrow [\forall x \in f^{-1}(x') \Rightarrow x \notin f^{-1}(S'), x \in f^{-1}(T')] \Rightarrow$$
$$f^{-1}(S') \neq f^{-1}(T'),$$

onde l'asserto.

L'omomorfismo f dicesi *forte* se nella (2.10) vale il segno di uguaglianza. Si prova subito che:

$$f \quad forte \quad \Longrightarrow \quad [\forall S \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad f(S) \in \mathcal{S}']. \tag{2.13}$$

Dalle (2.11) e (2.12) otteniamo:

Teorema 2.3 *Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo surgettivo tra gli ipergruppi $(G, \circ)$ e $(G', \circ')$. Se $(S'_1, S'_2, ..., S'_n)$ è una catena di $(G', \circ')$, allora $(f^{-1}(S'_1), f^{-1}(S'_2), ..., (f^{-1}(S'_n))$ è una catena di $(G, \circ)$. Ne segue che se $dim(G, \circ) = d$, allora $dim(G', \circ') \leq d$. Se ne deduce che due ipergruppi isomorfi hanno la stessa dimensione.*

3 Interpretazione geometrica della relazione β^*. Esempi.

Sia $(G, \mathcal{B})$ uno spazio geometrico (cioè G è un insieme non vuoto, i cui elementi chiameremo punti, e $\mathcal{B}$ è una famiglia non vuota di parti di G, i cui elementi chiameremo blocchi, cfr.[15], parte I). Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia un ricoprimento di G. Una ***poligonale*** di $(G, \mathcal{B})$ è una n-pla di blocchi $(B_1, B_2, ..., B_n)$ tale che : $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $(i = 1, 2, ..., n-1)$. Se $x, y \in G$ diremo che x è in relazione k con y e scriveremo xky, se esiste una poligonale $(B_1, B_2, ..., B_n)$ tale che $x \in B_1$ e $y \in B_n$. In G rimane così definita la relazione k che risulta evidentemente di equivalenza (essendo $\mathcal{B}$ un ricoprimento di G). La classe di equivalenza determinata da x, $k(x) = \{y \in G : xky\}$, prende il nome di ***componente connessa*** di x in G. Rimane inoltre definita l'applicazione:

$$k : x \in G \to k(x) \in G/k. \tag{3.14}$$

Osserviamo che: $B \in \mathcal{B}$, $B \cap k(x) \neq \emptyset \Rightarrow B \subseteq k(x)$. Denotato con $\mathcal{B}[k(x)]$ la famiglia dei blocchi contenuti in $k(x)$ si ha che $(k(x), \mathcal{B}[k(x)])$ è uno spazio geometrico, componente connessa di $(G, \mathcal{B})$, e che $(G, \mathcal{B})$ è unione disgiunta di tali componenti connesse. Lo spazio $(G, \mathcal{B})$ si dice connesso se ammette una sola componente connessa.

Per esempio se G è un aperto di $\mathbf{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è la famiglia degli intervalli chiusi contenuti in G, $k(x)$ è la componente connessa di x nel senso elementare. Come ulteriore esempio sia $(V, \mathcal{R})$ uno ***spazio semilineare*** [cioè , chiamate *rette* gli elementi di $\mathcal{R}$, si abbia che $\mathcal{R}$ sia un ricoprimento di V tale che ogni retta abbia almeno due punti e per due punti passi al più una retta], in particolare una varietà algebrica rigata rispetto alle sue rette, oppure un grafo, allora $k(x)$ è la componente connessa di x nel senso classico.

Sia $(G, \circ)$ un ipergruppo e sia $\mathcal{B}$ la famiglia di parti di G costituita da tutti i possibili prodotti di n-ple di elementi di G al variare di n. Rimane allora determinato lo spazio geometrico $(G, \mathcal{B})$. Poiché in $(G, \circ)$ vale la proprietà di riproducibilità , si ha che $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di G. Se $x, y \in G$ diremo che x è in relazione β con y se esiste un $B \in \mathcal{B}$ contenente x e y. La relazione β è evidentemente riflessiva e simmetrica. Sia β^* la chiusura transitiva di β, cfr. [1] [si tenga conto che in G le relazioni di equivalenze costituiscono un sistema di chiusura, qualora si interpretino come sottoinsiemi di GxG]. Se ϱ è una relazione di equivalenza di G che contiene β [cioè tale che: $x\beta y \Rightarrow x\varrho y$] allora ϱ contiene la relazione k su definita. Ne segue che :

$$k = \beta^*. \tag{3.15}$$

Si ha: $\forall x, y \in G$, $x \circ y \in \mathcal{B}$ e quindi tutti gli elementi di $x \circ y$ appartengono ad una stessa componente connessa di $(G, \mathcal{B})$, che denoteremo $k(x \circ y)$. Se $x\beta x'$, cioè se $x, x' \in B_1 \in \mathcal{B}$ e $y\beta y'$, cioè se $y, y' \in B_2 \in \mathcal{B}$, allora $x \circ y \subseteq B_1 \circ B_2$ e $x' \circ y' \subseteq B_1 \circ B_2$, onde $k(x \circ y) = k(x' \circ y')$. Ne segue che se xkx' e yky' allora $k(x \circ y) = k(x' \circ y')$. Nell'insieme, $G/k = G/\beta^*$, delle componenti connesse di $(G, \mathcal{B})$, può dunque definirsi un prodotto univoco, ponendo :

$$\forall x, y \in G, \quad k(x) \circ k(y) = k(x \circ y). \tag{3.16}$$

$(G/k, \circ)$ è associativo, perché tale è $(G, \circ)$, inoltre in esso vale la proprietà del quoziente, perché in $(G, \circ)$ vale la proprietà di riproducibilità . Dunque $(G/k, \circ)$ risulta un gruppo, che dicesi *associato* a $(G, \circ)$. Inoltre l'applicazione (3.14) è un omomorfismo forte surgettivo tra $(G, \circ)$ e

$(G/k, \circ)$. Sia u l'unita del gruppo $(G/k, \circ)$. Allora $\omega = k^{-1}(u)$ è un sottoipergruppo di $(G, \circ)$ che prende il nome di *cuore* di $(G, \circ)$, cfr.[1]. Esso è una componente connessa di $(G, \mathcal{B})$, inoltre:

$\omega = G \iff (G, \mathcal{B})$ *è connesso.*

Ne segue che:

$$G \in \mathcal{B} \implies \omega = G \tag{3.17}$$

$$\forall x, y \in G \quad x, y \in x \circ y \implies \omega = G. \tag{3.18}$$

Dal Teorema 2.3 si ha che:

$$dim(G, \circ) \geq dim(G/k, \circ). \tag{3.19}$$

Se ne deduce che:

$$dim(G, \circ) = 0 \iff G \quad monico \implies G = \omega. \tag{3.20}$$

Da quanto precede si prova facilmente che [tenuto conto della (2.13) e che un gruppo di dimensione 1 non ammette sottostrutture non banali]:

Teorema 3.1 *Sia $dim(G, \circ) = 1$. Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I, n.1), allora se $dim(G/k, \circ) = 0$, $\omega = G$, se $dim(G/k, \circ) = 1$, $\omega = \overline{\emptyset}$. Se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (caso II, n.1), allora se $dim(G/k, \circ) = 0$, $\omega = G$, se $dim(G/k, \circ) = 1$, l'unica sottostruttura propria di $(G, \circ)$ risulta ω. Viceversa, qualsiasi sia $(G, \circ)$, se l'unica sottostruttura propria di $(G, \circ)$ è ω allora $dim(G, \circ) = dim(G/k, \circ) = 1$.*

Dalle (2.12) e (2.13) e dal Teorema 2.1, facillmente si ottiene che:

Teorema 3.2 *Sia $(T_1, T_2, ..., T_m)$ una catena satura di ω, onde $T_m = \omega$, e $(S_1, S_2, ..., S_n)$ una catena satura di $(G/k, \circ)$, onde $S_1 = \mathbf{u}$, ove u è l' unità di G/k (cfr. Teorema 2.1). Allora $(T_1, T_2, ..., T_m, k^{-1}(S_2), ..., k^{-1}(S_n))$ è una catena satura di G. Ne segue che:*

$$dim(G/k) \quad + \quad dim(\omega) \quad \leq \quad dim(G). \tag{3.21}$$

Tenuto conto dei Teoremi 2.1 e 2.3 e della (2.13) relativa all'omomorfismo forte (3.14) si ha:

Teorema 3.3 *Se $(G, \circ)$ è un ipergruppo di dimensione finita,d, ogni sua sottostruttura T è tale che $T \cap \omega \neq \emptyset$.*

Si osservi che se $dim\ (G, \circ) = \infty$ esiste una vasta classe di esempi di ipergruppi $(G, \circ)$ che ammettono sottostrutture T tali che $T \cap \omega = \emptyset$ [cfr. Esempio 3 che segue, ove si ponga $(G_1, .) = (\mathbb{Z}, +)$].

Daremo ora alcuni esempi di ipergruppi che illustrano quanto esposto in questo numero.

ESEMPIO 2.- Diamo esempi di ipergruppi G di dimensione qualsiasi per i quali è $G = \omega$. Sia $G = \mathbf{R^n}$, per ogni $x, y \in \mathbf{R^n}$, con $x \neq y$, poniamo $x \circ x = x$ e $x \circ y$ uguale al segmento chiuso di estremi x, y. Si prova subito che $(\mathbf{R^n}, \circ)$ è un ipergruppo. Ogni sfera (piena) con centro l'origine e raggio r è un sottoipergruppo. Ne segue che $dim(\mathbf{R^n}, \circ) = \infty$, inoltre per la (3. 18) si ha $G = \omega$ ed è $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Sia $G = P_{d,K}$ uno spazio proiettivo di dimensione d su un corpo K e si ponga, per ogni $x, y \in P_{d,K}$, con $x \neq y$, $x \circ x = x$ e $x \circ y$ uguale alla retta per x e y. Si ha subito che $(G, \circ)$ è un ipergruppo di dimensione d e per la (3.18) risulta $G = \omega$ ed è $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Sia $G = V_{d,K}$ uno spazio vettoriale di dimensione d su un corpo K. Si ponga:

$$\forall u, v \in G, \qquad u \circ v = \{a(u+v) : a \in K\}.$$

Si ha che $(G, \circ)$ è un ipergruppo, le sottostrutture di $(G, \circ)$ sono i sottospazi di $V_{d,K}$, risulta $\omega = G$, $dim(G, \circ) = d$, $\overline{\emptyset} = (0)$ $[\neq \emptyset]$.

ESEMPIO 3.- Siano $(G_1, .)$ un gruppo e $(G_2, \circ)$ un ipergruppo connesso, il prodotto cartesiano $(G = G_1 \times G_2, \bullet)$, ove:

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2, \quad x \bullet y = (x_1 y_1, x_2 \circ y_2)$$

è un ipergruppo le cui componenti connesse sono date da: $\{a \times G_2\}_{a \in G_1}$. Ne segue che ω è isomorfo a $(G_2, \circ)$ e $(G/k, \bullet)$ è isomorfo a $(G_1, .)$ e che $dim(G) = dim(\omega) + dim(G/k)$.

ESEMPIO 4.- Sia $\{(G_i, \circ_i)\}_{i \in I}$, con $|I| \geq 2$, una famiglia di ipergruppi con

$$G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Si ponga:

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i,$$

$$\forall i \in I, \quad \forall x, y \in G_i, \qquad x \circ y = x \circ_i y$$

$$\forall i, j \in I, i \neq j, \quad \forall x \in G_i, \forall y \in G_j, \qquad x \circ y = G.$$

Evidentemente $(G, \circ)$ è un ipergruppo e per la (3.17) $\omega = G$. Inoltre le sottostrutture proprie di $(G, \circ)$ sono tutte e sole le sottostrutture di

$(G_i, \circ_i)$, per ogni $i \in I$. Ne segue che se per qualche $i \in I$ $dim(G_i) = \infty$ allora $dim(G) = \infty$, se per ogni $i \in I$ $dim(G_i) = d_i$ e l'insieme $\{d_i\}_{i \in I}$ non è superiormente limitato allora $dim(G) = \infty$, se è superiormente limitato, denotato con d il suo massimo, risulta $dim(G) = d + 1$. Se ne deduce per esempio che:

$$dim(G) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I, \quad dim(G_i) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall i \in I, \quad (G_i, \circ_i) \quad risulta \quad monico.$$

Ricordiamo che $(G, \circ)$ dicesi matroidale se il suo sistema di chiusura, $\mathcal{S}$, soddisfa l'assioma dello scambio (σ) (cfr. n.1, ultimo capoverso). Proviamo che:

$$(G, \circ) \quad matroidale \quad \Longleftrightarrow \quad dim(G) = 1.$$

<u>Dimostrazione</u>: Se $dim(G) \geq 2$, esiste un $i \in I$ tale che $dim(G_i) \geq 1$, onde in $(G_i, \circ_i)$ esiste qualche sottostruttura propria H_i. Per ogni $x \in G_i - H_i$ ed $y \in G_j$ con $j \neq i$, si ha:

$$x \notin \overline{H_i} = H_i, \quad x \in \overline{H_i \cup y} = G, \quad y \notin \overline{H_i \cup x} \subseteq G_i.$$

cioè $(G, \circ)$ non è matroidale. Si è così provata la $\Longrightarrow$.

Se $dim(G) = 1$, cioè se, per ogni $i \in I$, $(G_i, \circ_i)$ risulta monico, si ha

$$\forall X \subseteq G_i \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} = G_i$$

e quindi

$$\forall X \subseteq G, X \neq \emptyset, \quad \forall x, y \in G: \quad x \notin \overline{X}, \quad x \in \overline{X \cup y} \Longrightarrow$$

$$\exists i,j,l\in I, i\neq j, i\neq l: \quad X\subseteq G_i, x\in G_j, y\in G_l \quad \Longrightarrow y\in \overline{X\cup x}=G,$$

onde la $\Longleftarrow$ [per $X=\emptyset$ la (σ) è immediata]. Si ha così l'asserto.

Se $dim(G)\geq 2$, $(G,\circ)$, per quanto ora provato, non è matroidale. Si ottiene così una vasta classe di esempi di ipergruppi non matroidali.

4 Dimensioni geometriche e lineari.

Sia $(G,\circ)$ un ipergruppo di dimensione d. Denoteremo con d_m e d_M gli interi tali che d_m+1 e d_M+1 siano rispettivamente la minima e la massima lunghezza di una catena satura di $(G,\circ)$, onde $d_M=d$. Chiameremo d_m e $d_M=d$ *dimensioni geometriche* minima e massima di $(G,\circ)$. Evidentemente se $d\leq 1$ risulta $d_m=d$, se $d=2$ e $\overline{\emptyset}\neq\emptyset$ si ha $d_m=d=2$, se $d\geq 2$ e $\overline{\emptyset}=\emptyset$ esiste una vasta classe di esempi in cui $d_m<d$, precisamente nell'Esempio 4 del n.3, nell'ipotesi che l'insieme $\{d_i\}_{i\in I}$ sia limitato, risulta $d_m=[\ \min\{d_i\}_{i\in I}+1]$ e $d=[\ \mathrm{Max}\ \{d_i\}_{i\in I}+1]$ e quindi $d_m<d$ se esiste qualche $d_i=dim(G_i,\circ_i)<d$.

Evidentemente se $d_m=d$ tutte le catene sature di $(G,\circ)$ hanno la stessa lunghezza $d+1$. Dal Teorema 3.2 segue allora che:

Teorema 4.1 *Se per un ipergruppo $(G,\circ)$ risulta $d_m=d$ allora si ha:*

$$dim(G/k) \quad + \quad dim(\omega) \quad = \quad dim(G),$$

$$d_m(G/k) = dim(G/k), \qquad d_m(\omega) = dim(\omega).$$

Sia $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un indipendente di $(G, \circ)$. Si ponga:

$$S_i = \overline{\{x_1, x_2, ..., x_i\}}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Essendo X indipendente risulta: $S_i \subset S_{i+1}$, cioè $(S_1, S_2, ..., S_n)$ è una catena di lunghezza n di $(G, \circ)$, che diremo *associata* ad X. Ne segue che: $n \leq d + 1$. Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I, n.1), tale catena certamente non è satura, in quanto $x_1 \notin \overline{\emptyset}$ e quindi $\overline{\emptyset} \subset S_1$, cioè S_1 non è monica. Se ne deduce che:

Teorema 4.2 *Ogni base B di $(G, \circ)$ è finita e ha cardinalità $|B| \leq d$ se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I, n.1), $|B| \leq d + 1$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (caso II, n.1).*

Siano R_m e R_M rispettivamente la minima e la massima cardinalità di una base di $(G, \circ)$. Chiameremo R_m e R_M minimo e massimo *rango* di $(G, \circ)$. Dal Teorema 4.2 si ha che:

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad (casoI, n.1): \qquad R_m \leq R_M \leq d \tag{4.22}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset \quad (casoII, n.1): \qquad R_m \leq R_M \leq d + 1. \tag{4.23}$$

Sia $(S_1, S_2, ..., S_n)$ una catena satura di $(G, \circ)$. Si consideri l'insieme $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ definito da:

$$x_1 \in S_1, \quad x_i \in S_i - S_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Essendo $(S_1, S_2, ..., S_n)$ satura, sarà : $\overline{\{x_1\}} = S_1$, $\overline{\{x_1, x_2\}} = S_2$ [in quanto: $S_1 \subset \overline{\{x_1, x_2\}} \subseteq S_2$ ed S_2 copre S_1], $\overline{\{x_1, x_2, x_3\}} = S_3$ [in quanto:

$S_2 \subset \overline{\{x_1, x_2, x_3\}} \subseteq S_3$ ed S_3 copre S_2]. Così procedendo induttivamente si ha che:

$$\overline{\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}} = S_n = G,$$

cioè $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ è un generatore di $(G, \circ)$, che diremo ***associato*** a $(S_1, S_2, ..., S_n)$. Sia $X = \{x_0, x_1, ..., x_{d_m}\}$ un generatore associato ad una catena satura di lunghezza $d_m + 1$. Esiste allora una base $B \subseteq X$ e quindi $|B| \leq d_m + 1$. Ne segue che:

$$R_m \quad \leq \quad d_m + 1 \quad \leq \quad d + 1. \tag{4.24}$$

Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ (caso I, n.1) ogni generatore $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ associato ad una qualsiasi catena satura $(S_1, S_2, ..., S_n)$ è certamente dipendente [perché $x_1 \in S_1 = \overline{\emptyset}$ e quindi $x_1 \in \overline{\{x_2, x_3, ..., x_n\}}$], onde se B è una base contenuta in X, sarà : $|B| < n$. Se ne deduce che:

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad R_m \quad \leq d_m \quad \leq d. \tag{4.25}$$

Porremo

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset \quad (casoI, n.1): \qquad \delta_m = R_m, \quad \delta_M = R_M, \tag{4.26}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset \quad (casoII, n.1): \qquad \delta_m = R_m - 1, \quad \delta_M = R_M - 1. \tag{4.27}$$

Chiameremo δ_m e δ_M ***dimensioni lineari*** minima e massima di $(G, \circ)$. Dalle (4.26), (4.22), (4.25), (4.27), (4.23), (4.24) si ottiene in ogni caso:

$$\delta_m \quad \leq \quad \delta_M \quad \leq \quad d, \tag{4.28}$$

$$\delta_m \quad \leq \quad d_m \quad \leq d. \tag{4.29}$$

Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo surgettivo tra gli ipergruppi $(G, \circ)$ e $(G', \circ')$ (cfr.n.2) e sia $X \subseteq G$, $X \neq \emptyset$. L'insieme $f^{-1}(\overline{f(X)})$, per la (2.11), è una sottostruttura di $(G, \circ)$ che contiene X e quindi $\overline{X}$, ne segue che:

$$f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}.$$

Se ne deduce che se X è un generatore di $(G, \circ)$, $f(X)$ è un generatore di $(G', \circ')$ e quindi se B è una base di cardinalità minima di $(G, \circ)$, $f(B)$ è un generatore di $(G', \circ')$, onde esiste una base B' di $(G', \circ')$ contenuta in $f(B)$. Si ha allora:

$$R_m(G') \quad \leq \quad |B'| \quad \leq \quad |f(B)| \quad \leq |B| \quad = \quad R_m(G).$$

Si è così provato che:

Teorema 4.3 *Se $f : G \to G'$ un omomorfismo surgettivo di $(G, \circ)$ in $(G', \circ')$ si ha:*

$$R_m(G') \leq R_m(G), \qquad \delta_m(G') \leq \delta_m(G)$$

e quindi se f è un isomorfismo risulta: $R_m(G') = R_m(G)$ e $\delta_m(G') = \delta_m(G)$. In particolare si ha:

$$R_m(G/k) \leq R_m(G), \qquad \delta_m(G/k) \leq \delta_m(G).$$

Nel numero successivo esamineremo e caretterizzeremo completamente il caso in cui le quattro dimensioni geometriche e lineari coincidono.

5 Ipergruppi per i quali $\delta_m = d$.

Sia $(G, \circ)$ un ipergruppo di dimensione d e sia S è una sua sottostruttura. Chiameremo catena *semisatura di origine* S una catena $(S, S_1, S_2, ..., S_n)$ tale che: S_1 copre S e, per ogni $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, S_{i+1} copre S_i. Evidentemente per ogni sottostruttura S esiste una catena semisatura di origine S. Denoteremo poi con $\delta_m(S)$, $\delta_M(S)$, $d_m(S)$, $d(S)$ le dimensioni lineari e geometriche della sottostruttura S. Evidentemente si ha:

$$S \quad monico \quad \Longrightarrow \quad \delta_m(S) = \delta_M(S) = d_m(S) = d(S) = 0. \qquad (5.30)$$

$$\overline{\emptyset} \neq \emptyset, \quad d(S) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \delta_m(S) = \delta_M(S) = d_m(S) = d(S) = 1. \quad (5.31)$$

In questo numero studieremo e caratterizzeremo gli ipergruppi per i quali $\delta_m = d$, cioè tali che [cfr. (4.28), (4.29)]:

$$\delta_m \quad = \quad \delta_M \quad = \quad d_m \quad = \quad d. \qquad (5.32)$$

Proviamo che:

Teorema 5.1 *Nell'ipotesi che valga la (5.32), data comunque una catena satura $(S_0, S_1, ..., S_d)$ di $(G, \circ)$, ogni $X = \{x_0, x_1, .., x_d\}$ associato a $(S_0, S_1, ..., S_d)$ (cfr. n.4) risulta una base se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$, $X - \{x_0\}$ è una base.*

<u>Dimostrazione</u>: La catena $(S_0, S_1, ..., S_d)$ è satura, quindi X è un generatore di $(G, \circ)$. Se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e X fosse dipendente esisterebbe una base $B \subset X$ con $|B| < d+1$, onde sarebbe $\delta_m < d$, ma ciò è escluso per la

(5.32). Se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$, si ha $S_0 = \overline{\emptyset}$ e quindi $x_0 \in \overline{X - \{x_0\}}$, onde $X - \{x_0\}$ è un generatore di $(G, \circ)$; se $X - \{x_0\}$ fosse dipendente esisterebbe in $X - \{x_0\}$ una base B di cardinalià minore di $|X - \{x_0\}| = d$, quindi $\delta_m < d$, ma ciò è escluso per la (5.32). Si ha così l'asserto.

Proviamo ora che:

Teorema 5.2 *Se vale la (5.32) per ogni sottostruttura S di $(G, \circ)$ si ha:*

$$\delta_m(S) = \delta_M(S) = d_m(S) = d(S) \tag{5.33}$$

Dimostrazione: Sia S una qualsiasi sottostruttura di $(G, \circ)$ e sia

$$n = dim(S)$$

Esiste allora una catena di lunghezza $n+1$ in S, ivi satura, $(S_0, S_1, ..., S_n = S)$. Essa è contenuta in una catena satura di $(G, \circ)$, necessariamente di lunghezza $d+1$, per la (5.32). Dunque esiste in $(G, \circ)$ una catena semisatura di origine S data da $(S, S_{n+1}, ..., S_d)$ tale che: $(S_0, S_1, ..., S_n = S, S_{n+1}, ..., S_d)$ sia una catena satura di $(G, \circ)$. Sia ora $(S'_0, S'_1, ..., S'_m = S)$ una qualsiasi catena satura di S. La catena $(S'_0, S'_1, ..., S'_m = S, S_{n+1}, ..., S_d)$ è satura in $(G, \circ)$ ed ha lunghezza :$d+1-(n+1)+(m+1)$, onde per la (5.32) deve aversi: $d+1-(n+1)+(m+1) = d+1$, cioè $n = m$. Ne segue che:

$$d_m(S) = d(S) = n. \tag{5.34}$$

Osserviamo che ogni $X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ..., x_d\}$ associato (cfr.n.4) alla catena satura $(S_0, S_1, ..., S_n = S, S_{n+1}, ..., S_d)$ di $(G, \circ)$, per il Teorema 5.1, è una base per $(G,\circ)$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre, se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$, allora $\{x_1, ..., x_n, ..., x_d\}$ è una base. Dunque $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ è una base per S se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ è $\{x_1, ..., x_n\}$ una base per S. Quindi S ammette basi di cardinalità $n + 1 = d(S) + 1$ se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, ovvero basi di cardinalità $n = d(S)$ se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$.

Sia ora $B = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\}$ una qualsiasi base di S e sia $(T_0, T_1, T_2, ..., T_m = S)$ la catena ad essa associata (cfr. n.4), onde è $T_i = \overline{\{x_0, x_1, ..., x_i\}}$. Si consideri la catena di $(G,\circ)$ data da $(T_0, T_1, T_2, ..., T_m = S, S_{n+1}, ..., S_d)$. Essa è contenuta in una catena satura di $(G,\circ)$ (di lunghezza $d + 1$):

$$(S_0^*, S_1^*, S_2^*, ..., S_n^* = T_m = S, S_{n+1}, ..., S_d). \tag{5.35}$$

Si consideri un $Y = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_d\}$ associato alla catena (5.35) (cfr. n.4), scelto in modo che

$$S_i^* = T_j, \quad j \leq i \quad \Longrightarrow \quad y_i = x_j.$$

Per il Teorema 5.1, $Y = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_d\}$ è una base se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ si ha che $\{y_1, y_2, ..., y_d\}$ è una base di $(G,\circ)$, quindi $\{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}$ è una base se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, mentre se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$ si ha che $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ è una base di S. Ma $B = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_m\} \subseteq \{y_0, y_1, y_2, ..., y_n\}$, onde se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ si ha $m + 1 = n + 1$ e quindi $\delta_m(S) = \delta_M(S) = n = d(S)$, se $\overline{\emptyset} = \emptyset$ si ha $m + 1 = n$ e quindi $\delta_m(S) = \delta_M(S) = n = d(S)$. Si ha così l'asserto.

Consideriamo le seguenti proprietà che possono o non valere in un ipergruppo $(G,\circ)$:

$$(a) \qquad \delta_m = \delta_M = d_m = d,$$

$$(b) \qquad \forall S \in \mathcal{S}, \quad \forall x \in G - S \quad \Longrightarrow \quad dim(\overline{S \cup \{x\}}) = d(S) + 1,$$

$$(c) \qquad \forall S \in \mathcal{S}, \quad \forall x \in G - S \quad \Longrightarrow \quad \overline{S \cup \{x\}} \quad copre \quad S,$$

$$(\sigma) \qquad \forall X \subseteq G, \forall x, y \in G : x \notin \overline{X}, x \in \overline{X \cup y} \quad \Longrightarrow \quad y \in \overline{X \cup x}.$$

Mostreremo ora che esse sono equivalenti. Proviamo che:

$$(a) \quad \Longrightarrow \quad (b). \tag{5.36}$$

<u>Dimostrazione</u>: La (5.36) è evidente se $S = \emptyset$ (nel caso che: $\emptyset \in \mathcal{S}$). Supponiamo dunque $S \neq \emptyset$. Per il Teorema 5.2 vale la (5.33). Sia $n = d(S)$ e sia $x \in G - S$. Per la (5.33) ogni base di S è costituita da $n+1$ elementi se $\overline{\emptyset} = \emptyset$, da n elementi se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. Supposto che $\overline{\emptyset} = \emptyset$ (in modo analogo si procede se $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$), sia $B = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una base di S. Si consideri la sottostruttura $S' = \overline{S \cup \{x\}}$. Essa ammette come generatore l'insieme $X = \{x, x_0, x_1, ..., x_n\}$ costituito da $n+2$ elementi. Ne segue che S' ammette una base B' ($\subseteq X$) con $|B'| \leq n+2$. Ma allora per la (5.33), $d(S') \leq n+1$. Daltra parte $d(S') > n$, onde: $d(S') = n+1$, cioè : $dim(\overline{S \cup \{x\}}) = n + 1 = d(S) + 1$. Si ha così l'asserto.

$$(b) \quad \Longrightarrow \quad (c). \tag{5.37}$$

<u>Dimostrazione</u>: Per ogni $S \in \mathcal{S}$ e per ogni $x \in G - S$, se esistesse $T \in \mathcal{S}$ con $S \subset T \subset S' = \overline{S \cup \{x\}}$, si avrebbe $d(S) < d(T) < d(S')$ e quindi sarebbe $d(S') \geq d(S) + 2$, mentre per la (b) risulta $d(S') = d(S) + 1$, onde l'asserto.

$$(c) \quad \Longrightarrow \quad (\sigma). \tag{5.38}$$

Dimostrazione: Osserviamo che, come subito si prova, la (σ) equivale alla seguente proprietà :

$$\forall S \in \mathcal{S}, \forall x, y \in G : x \notin S, x \in \overline{S \cup \{y\}} \implies y \in \overline{S \cup \{x\}}. \qquad (5.39)$$

Dalla (c) si ha:

$$\forall S \in \mathcal{S}, \forall x, y \in G : x \notin S, x \in \overline{S \cup \{y\}} \implies$$

$$\implies S \subset \overline{S \cup \{x\}} \subseteq \overline{S \cup \{y\}} \implies$$

$$\implies \overline{S \cup \{y\}} = \overline{S \cup \{x\}} \implies y \in \overline{S \cup \{x\}},$$

cioè la (5.39) che, come è stato osservato, equivale alla (σ). Ne segue l'asserto.

$$(\sigma) \implies (a). \qquad (5.40)$$

Dimostrazione: Proveremo l'asserto nel caso che $\overline{\emptyset} = \emptyset$ in modo analogo si prova nel caso che $\overline{\emptyset} \neq \emptyset$. Se vale la (σ), cioè se $(G, \mathcal{S})$ è matroidale, si prova subito che:

$$X \subseteq G, \quad X \quad indipendente, \quad X \cup \{y\} \quad dipendente \implies y \in \overline{X}. \quad (5.41)$$

Inoltre da (σ) ed essendo $(G, \mathcal{S})$ finitamente generato segue che tutte le basi di $(G, \mathcal{S})$ hanno la stessa cardinalità , $\delta + 1$, e che ogni insieme di $\delta + 1$ elementi indipendenti è una base. Dunque $\delta_m = \delta_M = \delta$.

Si consideri una qualsiasi catene satura $(S_0, S_1, ..., S_n = G)$ di $(G, \circ)$ e sia $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un insieme ad essa associata (cioè $S_0 = \{x_0\}, x_{i+1} \in S_{i+1} - S_i, i = 0, 1, ..., n-1$). Si ha $\overline{X} = S_n = G$. Inoltre dalla (5.41) si ha subito che X è un indipendente e quindi una base di $(G, \circ)$. Ma allora $n+1 = \delta + 1$. Dunque tutte le catene sature di $(G, \circ)$ hanno la stessa lunghezza $\delta + 1$. Ne segue la (a), cioè l'asserto.

Si è così provata l'equivalenza delle (a), (b), (c), (σ). Se ne deduce che:

Teorema 5.3 *Le quattro dimensioni di $(G, \circ)$ coincidono se, e solamente se, $(G, \circ)$ è matroidale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] P.G. Corsini, *Prolegomena of hypergroups theory.* Aviani Editore, Udine, 1993.

[2] D. Freni, *Sur les hypergroupes cambistes.* Rend. Ist. Lombardo, A 119, 1985.

[3] R. Rota, *Sugli iperanelli moltiplicativi.* Rend. Mat. , Roma, 4 (2) VII (1982) 711-724.

[4] R. Rota, *Congruenze sugli iperanelli moltiplicativi.* Rend. Mat. , Roma, 1 (3) VII (1983) 17-31.

[5] M. Scafati Tallini, *A-ipermoduli e spazi ipervettoriali.* Rivista di Mat. pura e Appl. Univ. Udine, n.3 (1988) 39-48.

[6] M. Scafati Tallini, *Hypervector spaces.* Proc. fourth int.

Congress on AHA (1990) 167-174.

[7] M. Scafati Tallini, *Spazi ipervettoriali fortemente distributivi a sinistra.* Rend. Mat., Roma, (11) VII (1991) 1-16.

[8] M. Scafati Tallini, *Matroidal hypervector spaces.* Journal of Geometry, 42 (1991) 132-140.

[9] M. Scafati Tallini, *La categoria degli spazi ipervettoriali.* Rivista di Mat. pura e Appl. Univ.Udine, 1992.

[10] G. Tallini, *Ipergruppoidi di Steiner e Geometrie combinatorie.* Atti Convegno "Sistemi binari e loro applicazioni", Taormina (Me), novembre 1978.

[11] G. Tallini, *Geometrie d'incidenza e matroidi.* Quaderno n.127, I.A.C. del C.N.R. , III (1981) 1-34.

[12] G. Tallini, *Geometric hyperquasigroups and line spaces.* Acta Univ. Carolinae Math. Phys., (25) 1 (1984) 69-73.

[13] G. Tallini, *On Steiner hypergroups and linear codes.* Atti Convegno "Ipergruppi, altre strutture multivoche e loro applicazioni", Univ. Udine (1985) 87-91.

[14] G. Tallini, *General multivalued algebraic structures and geometric spaces.* Proc. Fourth Int. Congress on "Algebraic Hyperstructures and Applications", Xanthi, Greece, (1990) 197-202.

[15] G. Tallini, *Strutture geometriche.* Liguori Editore, Napoli, 1991.