UNIVERSITA' DI L'AQUILA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA E APPLICATA

SEMINARIO DI GEOMETRIE COMBINATORIE

Giuseppe TALLINI

INSIEMI DI RETTE DI TIPO PARI IN PG(3,q)

Quaderno N° 10

Ottobre 1987

Centro Stampa "La Tecnica" L'Aquila

INSIEMI DI RETTE DI TIPO PARI IN PG(3,q)

G. Tallini (Roma)

1. Codici lineari associati ad uno spazio di rette.

Sia $(S,\mathscr{R})$ uno spazio di rette tale che per ogni suo punto passi un numero dispari di rette, (per esempio un sistema di Steiner $S(2,k,v)$ con $\rho=(v-1)/(k-1)$ dispari). Posto $n=|\mathscr{R}|\geq 2$ si ordinino le rette di $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}=(r_1, r_2,\dots,r_n)$.

Si consideri l'applicazione:

$$f:X\in\mathbb{P}(\mathscr{R})\longrightarrow f(X)\in Z_2^n, \tag{1.1}$$

ove $f(X)$ e\` la funzione caratteristica ordinata di $X\subseteq\mathscr{R}$.

Posto:

$$\begin{cases} X,Y\in\mathbb{P}(\mathscr{R}), & X\cup Y-X\cap Y=X\oplus Y \text{ (diff.simmetrica)} \\ X\in\mathbb{P}(\mathscr{R}), & 0.X=\emptyset,\ 1.X=X\ (0,1\in Z_2). \end{cases} \tag{1.2}$$

si ha:

$$X,Y\in\mathbb{P}(\mathscr{R}),\ \begin{cases} f(X\oplus Y) = f(X)+f(Y) \\ f(\lambda\cdot X) = \lambda f(X),\ \lambda\in Z_2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ne segue che la (1.1) e' un isomorfismo tra lo spazio vettoriale $\mathbb{P}(\mathscr{R})=(\mathbb{P}(\mathscr{R}), \oplus, \cdot, Z_2)$ e Z_2^n.

Sia $\mathscr{P}$ il sottoinsieme di $\mathbb{P}(\mathscr{R})$ costituito dalle famiglie di rette di tipo pari (cioe' tali che per ogni punto di S passi un numero pari di rette della famiglia) e $\mathscr{D}$ quello costituito dalle famiglie di rette di tipo dispari, onde $\{F_P\}_{P\in S} \subset \mathscr{D}$ (F_P insieme delle rette di $(S,\mathscr{R})$ per $P\in S$). Si ha subito che:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \forall\ X,Y \in \mathscr{P} \Longmapsto X\oplus Y \in \mathscr{P} \\ \forall\ X,Y \in \mathscr{D} \Longmapsto X\oplus Y \in \mathscr{P} \\ \forall\ X\in\mathscr{P},\ Y\in\mathscr{D} \Longmapsto X\oplus Y \in \mathscr{D} \end{cases}$$

Ne segue che $\mathscr{H}=\mathscr{P} \cup \mathscr{D}$ e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{P}(\mathscr{R})$ e $\mathscr{P}$ e' un sottospazio di $\mathscr{H}$ di indice due in $\mathscr{H}$ (si noti che $\mathscr{D}\neq\emptyset$, onde $\mathscr{P}\neq\mathscr{H}$).

Posto $\mathscr{F} = \{F_P\}_{P\in S}$, sia $V=[\mathscr{F}]$ lo spazio generato da $\mathscr{F}$ in $\mathbb{P}(\mathscr{R})$. Poiche' $\mathscr{F} \subset \mathscr{D}$, sara' $V \subset \mathscr{H}$.

Un elemento H di $\mathscr{H}$ sara' detto rappresentabile se appartiene a V, cioe' se $H = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{P_i}$. Per la (1.4) $H = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{P_i}$ e' di tipo pari o di tipo dispari a seconda che s sia pari o dispari. Osserviamo che -come subito in prova- $H = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{P_i}$ e' l'insieme delle rette di $(S,\mathscr{R})$ che incontrano $X=\{P_1,P_2,\dots,P_s\}$ in un numero dispari di punti. Un insieme di vettori di $\mathscr{F}$, dato da $(F_{P_1}, F_{P_2},\dots,F_{P_t})$, sono dipendenti se esiste un sottoinsieme $(F_{P_{i_1}},F_{P_{i_2}},\dots,F_{P_{i_s}})$

tale che l'insieme $X=\{P_{i_1}, P_{i_2},\dots,P_{i_s}\}$ sia di tipo pari cioe' intersecato da ogni retta in un numero pari di punti). La dipendenza o l'indipendenza di vettori di $\mathscr{F}(\subset \mathbb{P}(\mathscr{R}))$ si traduce allora nella seguente nozione di dipendenza o indipendenza di punti in S. Un insieme X di punti di S saranno detti dipendenti se esiste un sottoinsieme Y di X, con $Y\neq\emptyset$ e Y di tipo pari (cioe' intersecato da ogni retta in un numero pari di punti). Quindi un sottoinsieme l di S sara' detto indipendente se non contiene sottoinsiemi, non vuoti, di tipo pari. Denotato con $\mathscr{I}$ l'insieme degli indipendenti di S, si ha che $(S,\mathscr{I})$ e' una matroide $\mathscr{M}$ isomorfa ad $\mathscr{F}(\subseteq \mathbb{P}(\mathscr{R}))$.

Osserviamo che denotato con $\tilde{\mathscr{P}}$ (con $\tilde{\mathscr{D}}$) l'insieme dei sottoinsiemi di S di tipo pari (di tipo dispari) e posto $\tilde{\mathscr{K}}=\tilde{\mathscr{P}}\cup\tilde{\mathscr{D}}$, si ha che $\tilde{\mathscr{K}}$, rispetto alla differenza simmetrica, $\oplus$, e al prodotto per un coefficiente in Z_2 $(0\cdot X=0,\ 1\cdot X=X;\ \forall X\in\tilde{\mathscr{K}})$ e' uno spazio vettoriale, $\tilde{\mathscr{K}}=(\tilde{\mathscr{K}},\oplus,\cdot,Z_2)$ di cui $\tilde{\mathscr{P}}$ e' sottospazio di indice due, $\tilde{\mathscr{D}}\neq\emptyset$.

Porremo:

(1.5) $d=\dim\mathscr{K}$, $\qquad \delta=\dim V=\dim \mathscr{M}(S,\mathscr{I})$.

onde

(1.6) $$\dim\mathscr{P}=d-1.$$

Tenuto conto che:

(1.7) $$2^{d-1} = |\mathscr{P}| = |\mathscr{D}| \geqslant |\mathscr{F}| = |S| \geqslant 4$$

si prova subito che:

(1.8) $$d \geqslant 4,$$

esempi di spazi di rette per cui d=4 sono AG(2,2) e PG(2,2).

Si puo' provare che (cfr. [5]):

(1.9) $$\begin{cases} d \geqslant (n+1)/2, \qquad |S| \leqslant \delta \leqslant (n+1)/2 \\ \delta = |S| \Longleftrightarrow S \text{ non ammette sottoinsiemi } (\neq \emptyset) \text{ di tipo pari} \\ \delta = (n+1)/2 \Longleftrightarrow d = \delta \Longleftrightarrow \mathscr{H} = V \end{cases}$$

ed inoltre che:

(1.10) $$\delta = |S| - \dim \tilde{\mathscr{P}}$$

Lo spazio vettoriale V e' un (n,w,δ)-codice lineare binario, ove $n=|\mathscr{R}|$, $\delta=\dim V=\dim \mathscr{M}(S,\mathscr{T})$, $w=\min_{X\in V-\{\emptyset\}}|X|$. Lo spazio vettoriale $\mathscr{H}$ e' un (n,w',d)-codice lineare binario ove $w'=\min_{X\in\mathscr{H}-\{\emptyset\}}|X|$, (cfr. [5]). Ha interesse quindi di determinare, dato uno spazio di rette $(S,\mathscr{R})$, gli insiemi di punti di tipo pari e gli insiemi di rette di tipo pari. Tale problema presenta gia' delle difficolta' nei casi piu' semplici degli spazi di Galois. Ci occuperemo nei numeri successivi appunto dello studio degli insiemi di rette di tipo pari in PG(3,q).

2. Generalita' sugli insiemi di rette di tipo pari in PG(3,q).

Sia $\mathcal{F}$ un insieme di rette di PG(3,q). Denoteremo con F l'unione delle rette di $\mathcal{F}$ e con N il numero delle rette di $\mathcal{F}$. Se t_s(t^*_s) denota il numero dei punti di PG(3,q) per ciascuno dei quali passano s rette di $\mathcal{F}$, (il numero dei piani ciascuno dei quali contiene s rette di $\mathcal{F}$), denotato con τ il numero delle coppie di rette sghembe di $\mathcal{F}$ si ha (cfr. [2], [4]):

$$(2.1)\quad \begin{cases} \Sigma t_s = \theta_3 = \Sigma t^*_s , \\ \Sigma s t_s = N(q+1) = \Sigma s t^*_s , \\ \Sigma s(s-1)t_s = N(N-1) - 2\tau = \Sigma s(s-1)t^*_s . \end{cases}$$

Diremo che $\mathcal{F}$ e' di tipo pari (di tipo dispari) rispetto alle stelle di rette, se per ogni punto di PG(3,q) passa un numero pari (dispari) di rette di $\mathcal{F}$. Poiche' le rette per un punto sono $\theta_2 = q^2+q+1$ e tale numero e' in ogni caso dispari, si ha:

(2.2) Il complementare di un insieme di rette di tipo pari e' di tipo dispari e viceversa.

Lo studio degli insiemi di rette di tipo pari equivale dunque a quello degli insiemi di rette di tipo dispari.

Denotiamo con $\mathscr{P}$, $\mathscr{D}$ rispettivamente la famiglia degli insiemi di rette di tipo pari a quella degli insiemi di rette di tipo dispari, poniamo poi $\mathscr{H} = \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$. Posto:

$$(2.3) \qquad \mathscr{F}_1\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{H} \qquad \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 - \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$$

si prova subito che:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \in \mathscr{P} \\ \mathscr{F}_1 \in \mathscr{P},\ \mathscr{F}_2 \in \mathscr{D} \Longrightarrow \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \in \mathscr{D} \\ \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \mathscr{D} \Longrightarrow \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \in \mathscr{P} \end{cases}$$

Ne segue che $\mathscr{H}$ e\` un gruppo abeliano, in cui lo zero e\` $\emptyset$ ed ogni elemento ha periodo due, $\mathscr{P}$ e\` un sottogruppo d'indice due di $\mathscr{H}$ (le due classi laterali indotte da $\mathscr{P}$ in $\mathscr{H}$ essendo $\mathscr{P}$ e $\mathscr{D}$).

Esempi di insiemi di rette di tipo pari non banali sono:

Es. I - Le rette di una quadrica iperbolica di PG(3,q), per esse N = 2q + 2.

Es.II - Se q e\` pari, il duale in un piano di un (q+2)-arco, N=q+2.

Es.III- La differenza simmetrica delle rette di due quadriche iperboliche Q_1, Q_2 di PG(3,q), q >2, aventi un quadrangolo sghembo in comune: $Q_1: xy-zt=0$, $Q_2: xy-azt=0$ $(a\neq 0,1)$; $N=4q-4$.

Es.IV - Si considerino le quadriche del fascio $xy-\lambda zt=0$ con $\lambda\neq 0,\infty$. Sia $\mathcal{F}_i$ $(i=1,2,\dots,q-1)$ l'insieme delle rette della i-esima di tali quadriche e T il quadrangolo sghembo comune a tutte le quadriche del fascio.

Si consideri la differenza simmetrica $\bigoplus_{i=1}^{q-1}\mathcal{F}_i=\mathcal{F}$. Si ha che se q e\` pari allora $T\subset\mathcal{F}$ mentre se q e\` dispari $T\not\subset\mathcal{F}$.

Per la $(2.4)_1$ l'insieme $\mathcal{F}$ e\` di tipo pari e precisamente se q e\` pari $\mathcal{F}$ e\` di tipo $(0,2,q)$, se q e\` dispari $\mathcal{F}$ e\` di tipo $(0,2,q-1)$. Inoltre se q e\` pari e\` $N=|\mathcal{F}|=(2q-2)(q-1)+4 = 2(q-1)^2+4$, se q e\` dispari e\` $N=|\mathcal{F}|= 2(q-1)^2$.

A partire dagli esempi precedenti ed in forza della $(2.4)_1$ possono ottenersi svariati altri esempi di insiemi di rette di tipo pari.

Dalla (2.1) si ha:

$$(2.1)' \qquad \Sigma s^2 t_s=N(N+q)-2\tau$$

Dalle (2.1) e (2.1)' se $\mathcal{F}$ e\` di tipo pari si ha:

$$(2.5) \qquad \Sigma s\, t_{2s}=N(q+1)/2$$

$$(2.6) \qquad \Sigma s^2\, t_{2s}= (N(N+q)-2\tau)/4$$

e quindi:

$$(2.7) \qquad \Sigma(s^2-s)t_{2s} = N(N-q-2)/4-\tau/2$$

Dalla (2.5) si ha:

$$(2.8) \qquad q \text{ pari} \Longrightarrow N \text{ pari}, \; N = |\mathscr{F}| = 2N_1.$$

Dalla (2.5) e (2.7) si ha:

$$(2.9) \qquad q \text{ pari}, \; q>2 \Longrightarrow \tau \equiv 0 \text{ mod. } 4$$

(Dimostrazione: $q=4q_1$, dalla (2.7) tenuto conto che il primo membro e\` pari, si ha: $N_1(N_1-2q_1-1)-\tau/2 \equiv 0 \text{ mod } 2 \Rightarrow \tau \equiv 0 \text{ mod } 4$)

Computando le coppie (P,r), ove P e\` punto di F ed r una retta di $\mathscr{F}$, si ha:

$$(2.10) \qquad 2|F| \leq N(q+1)$$

$$(2.11) \qquad 2|F| = N(q+1) \Longleftrightarrow \mathscr{F} \text{ e\` di classe } [0,2]$$

Se F = PG(3,q) si ha allora:

$$(2.12) \; F=PG(3,q) \Rightarrow \left[N \geq 2(q^2+1); \; N=2(q^2+1) \Leftrightarrow \mathscr{F} \text{ e\` di classe } [0,2]\right]$$

Gli insiemi di rette di tipo pari che per primi si presentano in ordine di difficolta` sono quelli di classe $[0,2]$. Essi saranno studiati nel prossimo numero.

Proviamo ora che:

I - Se $\mathcal{F}$ e` un insieme di rette di tipo pari, non vuoto, di PG(3,q) risulta:

(2.13) $N=|\mathcal{F}|\geq q+2$,

(2.14) $N=|\mathcal{F}|=q+2 \Leftrightarrow q$ e` pari ed $\mathcal{F}$ e` il duale in un piano di un (q+2)-arco.

Dimostrazione. Sia $\ell \in \mathcal{F}$, per ogni $P\in \ell$ passa almeno una retta di $\mathcal{F}$ diversa da ℓ e per punti distinti di ℓ passano rette di $\mathcal{F}$, diverse da ℓ, distinte. Si ha cosi` la (2.13). Se $|\mathcal{F}|=q+2$, per ogni $P\in \ell$ passa una sola retta $\ell'$ di $\mathcal{F}$ con $\ell'\neq \ell$ ed ogni retta di $\mathcal{F}$ incontra $\ell$; data l'arbitrarieta` di ℓ, si ha che le rette di $\mathcal{F}$ sono a due a due incidenti e quindi necessariamente appartengono ad uno stesso piano π e costituiscono ivi il duale di un (q+2)-arco. Si ha cosi` la (2.14) (cfr. Es. II).

3. Gli insiemi di rette di classe $[0,2]$ di PG(3,q).

In tutto questo numero $\mathcal{F}$ denotera` sempre un insieme, non vuoto, di rette di PG(3,q) di classe $[0,2]$.

Esempi di tali insiemi sono gli Es. I,II,III, del n. 2. Un altro esempio e\` il seguente.

Es. I - Siano S ed S' due fibrazioni (totali) di PG(3,q). Ciascuna di esse e\` un insieme di rette di tipo dispari quindi la differenza simmetrica $\mathcal{F} = S \oplus S'$ e\` di tipo pari, anzi evidentemente e\` di tipo (0,2). Se n e\` il numero delle rette comuni alle due fibrazioni risulta $|\mathcal{F}| = 2q^2+2-2n$.

Si noti che non ogni insieme di rette di classe $[0,2]$ puo\` ottenersi nel modo precedente, basti l'esempio II del n. 2.

Sia $\mathcal{F}$ $(\neq \emptyset)$ un qualsiasi insieme di rette di PG(3,q) di classe $[0,2]$, posto $N = |\mathcal{F}|$ e\` denotato con F l'unione delle rette di $\mathcal{F}$, risulta evidentemente:

(3.1) $$t_1 = |F| \ , \ t_0 = \theta_3 - |F| \geq 0.$$

Dalla (2.1) si ha allora:

(3.2) $$2|F| = N(q+1),$$

(3.2') $$q \text{ pari} \Longrightarrow N \text{ e\` pari},$$

(3.3) $$2\tau = N(N-1)-2|F| = N(N-(q+2)),$$

da cui si riottiene immediatamente la prop. I n. 2 (nel nostro caso).

Da $(3.1)_{11}$ e (3.2) si ha (cfr. prop. I):

$$(3.4) \qquad q+2 \leqslant N \leqslant 2(q^2+1),$$

$$(3.5) \qquad N=2(q^2+1) \Leftrightarrow t_o=0 \Leftrightarrow |F|=\theta_3 \Leftrightarrow F=PG(3,q) \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ e' di tipo } (2).$$

Un esempio di $\mathcal{F}$ soddisfacente la (3.5) si ottiene considerando l'unione di due fibrazioni di PG(3,q) prive di rette in comune (cfr. Es. I n. 3).

Sia ora π un piano di PG(3,q), K l'insieme delle rette di $\mathcal{F}$ su π e $k = |K|$. Evidentemente K e' il duale in π di un k-arco. I punti di $F \cap \pi$ si dividono in tre classi: la prima, costituita da $\binom{k}{2}$ punti, e' quella per ciascun punto della quale passano due rette di K (e nessuna retta di $\mathcal{F}$ non su π); la seconda, costituita da $k(q+2-k)$ punti, e' quella per ciascun punto della quale passa una retta di K e una retta di $\mathcal{F}$ non in π ; la terza, costituita da $|F \cap \pi| - \binom{k}{2} - k(q+2-k)$ punti, e' quella per ciascun punto della quale passano due rette di $\mathcal{F}$ non su π . Ne segue che:

$$N=2\left[|F \cap \pi| - \binom{k}{2} - k(q+2-k)\right] + k(q+2-k) + k$$

cioe':

(3.6) $$N = 2\,|F \cap \pi| - qk,$$

(3.6') $$q \text{ dispari} \Longrightarrow N \equiv k \mod 2$$

Da (3.3) e (3.4) si ha (cfr. (3.5)):

(3.7) $$\tau \leqslant q(2q-1)(q^2+1)$$

(3.8) $$\tau = q(2q-1)(q^2+1) \Longleftrightarrow N=2(q^2+1) \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ e' di tipo (2).}$$

Proviamo che:

II - Se ogni piano contiene un numero fissato k di rette di $\mathcal{F}$ allora $\mathcal{F}$ e' di tipo (2) e k=2. Viceversa se $\mathcal{F}$ e' di tipo (2) ogni piano contiene esattamente due rette di $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Se ogni piano di PG(3,q) contiene k rette di $\mathcal{F}$ dalle (3.6) si ha che F e' ad un sol carattere rispetto ai piani (perche' $|F \cap \pi| = (N+qk)/2$ e' fisso).Quindi F=PG(3,q) (cfr.[2]), cioe', per la (3.5), $\mathcal{F}$ e' di tipo (2).

Ma allora: $\theta_2 = |F \cap \pi| = (N+qk)/2 = [2(q^2+1)+qk]/2$, onde k=2. Ne segue l'asserto.

III - Sia $\mathcal{F}$ un insieme di rette di PG(3,q) di classe [0,2]. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) $\mathcal{F}$ e' di tipo (2).

(b) $|\mathcal{F}| = N = 2(q^2+1)$.

(c) $\tau = q(2q-1)(q^2+1)$.

(d) Ogni piano contiene due rette di $\mathcal{F}$.

(e) Ogni retta non contenuta in F incontra F in un fissato numero n di punti.

Dimostrazione: Le (a), (b), (c), (d) sono equivalenti per la (3.5), la (3.8) e la prop. II. Proviamo che (e) e' equivalente alla (a). Se vale la (e), l'insieme F e' di classe $[n,q+1]$ rispetto alle rette e quindi o F = PG(3,q), cioe' vale la (a) (cfr. (3.5)), oppure (cfr. [2], prop. XIV) $F = PG(3,q)-\{P\}$ (ove $P \in PG(3,q)$), ovvero F e' un piano. Se $F=PG(3,q)-\{P\}$ risulta $|F| = q\theta_2$, dalla (3.2) si ha allora l'assurdo $N=2q\theta_2/(q+1)= =2(q^2+1)-2/(q+1)$. Se F e' un piano, si ha $|F| = \theta_2$ e quindi, per la (3.2) l'assurdo $N = 2\theta_2/(q+1)=2q+2/(q+1)$. Dunque la (e) implica la (a), il viceversa e' evidente, si ha cosi' l'asserto.

Porremo $z_s=t_s^*$ = numero dei piani di PG(3,q) che contengono s rette di $\mathcal{F}$, s = 0,1,2,...,q+2 (tenuto conto che le rette di $\mathcal{F}$ su un piano π costituiscono un arco di π^*). Da (2.1) si ha:

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \Sigma z_s = \theta_3 , \\ \Sigma s z_s = N(q+1), \\ \Sigma s(s-1)z_s = N(N-1)-2\tau . \end{cases}$$

Inoltre si ha:

(3.10) $$\Sigma\, s(s-1)z_s = 2\,|F| = N(q+1)$$

La (3.10) si ottiene contando nei due modi diversi le coppie (P,α) ove $P\in F$ e α e\` il piano per P determinato dalle due rette di $\mathcal{F}$ per P (piano tangente ad F in P).

Dalla $(3.9)_{II}$, (3.10) si ha:

(3.11) $$\Sigma\, s^2 z_s = 2N(q+1)$$

e quindi, per la $(3.9)_{II}$:

(3.12) $$\Sigma\, s(s-2)z_s = 0 \Longleftrightarrow z_1 = \sum_{3}^{q+2} s(s-2)z_s$$

Dalla (3.12) otteniamo:

(3.13) $z_1=0 \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ e\` di classe $[0,2]$ rispetto ai piani.

Dalla (3.6) segue che se q e\` dispari ed N e\` pari ogni piano ha un numero pari di rette a comune con $\mathcal{F}$, onde $z_1=0$; dalla (3.13) si ha allora che:

(3.14) q dispari, N pari $\Longrightarrow \mathcal{F}$ e\` di classe $[0,2]$ rispetto ai piani.

Dalla (3.13) si ha:

(3.15) $\mathcal{F}$ di tipo pari rispetto ai piani $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ di classe $[0,2]$ rispetto ai piani.

Proviamo che:

(3.16) N dispari $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ e\` di tipo dispari rispetto ai piani.

Dimostrazione. Se N e\` dispari, dalla (3.2') si ha che q e\` dispari e quindi dalla (3.6') otteniamo che $\mathcal{F}$ e\` di tipo dispari rispetto ai piani. Viceversa, in tale ipotesi dalla $(3.9)_{II}$ si ha:

$$\Sigma\ (2s+1)z_{2s+1}=N(q+1) \Longrightarrow 2\ \Sigma\ sz_{2s+1}+\Sigma\ z_{2s+1}=N(q+1),$$

onde dalla $(3.9)_I$ otteniamo:

$$(3.17)\qquad \Theta_3=N(q+1)-2\ \Sigma\ sz_{2s+1}\ .$$

Non puo\` essere q pari, perche\` in tal caso Θ_3 e\` dispari mentre N e\` pari per la (3.2') e dalla (3.17) si avrebbe l'assurdo. Dunque q e\` dispari e poiche\` $\mathcal{F}$ e\` di tipo dispari rispetto ai piani dalle (3.6') si ha che N e\` dispari.

Come corollario della (3.16) e della (3.6') si ha:

IV. - Se q e\` dispari ed esiste un piano $\pi$ avente un numero dispari, k, di rette in comune con $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ e\` di tipo dispari rispetto ai piani.

Denoteremo con m il massimo numero di rette di $\mathcal{F}$ su un piano, onde $m \geqslant 2$ e $m \leqslant q+1$ se q e\` dispari, $m \leq q+2$ se q e\` pari. Da $(3.9)_I$, $(3.9)_{II}$, (3.11) si ha:

$$(3.18) \qquad 0 \leqslant \sum_{2}^{m-1} (m-s)(s-1)z_s = mz_o - (q+1)\left[(q^2+1)m - N(m-1)\right].$$

Dalla (3.18) si ha:

$$(3.19) \qquad mz_o \geq (q+1)\left[(q^2+1)m - N(m-1)\right].$$

ed inoltre:

$$(3.20) \begin{cases} mz_o = (q+1)\left[(q^2+1)m - N(m-1)\right] \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ e\` di classe } [0,1,m] \\ \text{rispetto ai piani} \Longleftrightarrow z_o = (q+1)\left[(q^2+1) - N(m-1)/m\right]; \\ z_1 = N(q+1)(m-2)/(m-1),\ z_m = N(q+1)/m(m-1);\ z_s = o, s \neq 0,1,m. \end{cases}$$

Da (3.20) si ha:

V - Sia $\mathcal{F}$ un insieme di rette di PG(3,q) di classe [0,2] rispetto alle stelle tale che ogni piano abbia qualche retta in comune con $\mathcal{F}$ ($z_o=0$), denotato con m il massimo numero di rette che un piano ha in comune con $\mathcal{F}$, si ha:

$$(3.21) \qquad N \geqslant (q^2+1)m/(m-1),$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, $\mathcal{F}$ e' di classe $[1,m]$, cioe' di tipo (1,m) con $m \geqslant 3$ o di tipo (2), rispetto ai piani.

Dalla (3.21) si ha (essendo $2 \leqslant m \leqslant q+2$):

(3.22) $$N \geqslant q^2 + q + 1.$$

Se $\mathcal{F}$ e' di tipo (1,m) rispetto ai piani si ha:

(3.23) $$N=(q^2+1)m/(m-1), \quad z_1 = \theta_3\, m(m-2)/(m-1)^2 \;, \quad z_m = \theta_3 /(m-1)^2$$

Ne segue che condizioni necessarie per l'esistenza di insiemi di tipo (1,m) rispetto ai piani e' che:

(3.24) $$m-1 \text{ divida } q^2+1 \quad \text{e} \quad (m-1)^2 \text{ divida } \theta_3 .$$

Le (3.24) sono sempre soddisfatte per m=3 e q dispari.
Non sono mai soddisfatte per $m \equiv 1 \bmod 3$ (in quanto in tal caso 3 non divide $q^2 + 1$), ne per $m=p^{\ell}+1$ (ove $q=p^h$, $h \geq \ell$, p primo).
Per $q \leq 101$ si puo' provare direttamente che gli unici casi in cui e' soddisfatta la (3.24), con $m>3$, si hanno per q=43 ed m=11 e q=32 ed m=6.

Dalla prop. V e dalla (3.16) si ha:

(3.25) N dispari $\Longrightarrow N \geq (q^2 +1)m/(m-1)$, il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, $\mathcal{F}$ e' di tipo (1,m), (m dispari).

Qualsiasi sia $\mathcal{F}$, sia π_k un piano contenente k rette di $\mathcal{F}$. I punti di $F \cap \pi_k$ che appartengono a tali rette sono in numero di $k(q+2-k)+\binom{k}{2}$ (tenuto conto che tali rette costituiscono in π_k^* un k-arco). Ne segue che:

(3.26) $|F \cap \pi_k| = k(q+2-k)+\binom{k}{2} \Longleftrightarrow \forall P \in F \cap \pi_k$ passa almeno una retta di $\mathcal{F}$ su π_k.

Le rette di $\mathcal{F}$ non su π_k che incidono le k rette di $\mathcal{F}$ su π_k sono in numero di $k(q+2-k)$, onde e': $k(q+2-k)+k \leqslant N$, il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, vale la (3.26). Dunque si ha:

(3.27) $$k^2 -k(q+3)+N \geqslant 0$$

(3.28) $$k^2-k(q+3) + N=0 \Longleftrightarrow (3.26).$$

Il discriminante Δ del polinomio $k^2-k(q+3)+N$ e' dato da:

(3.29) $$\Delta = (q+3)^2- 4N.$$

Se $\Delta>0$, cioe' $4N<(q+3)^2$, siano k_1, k_2 $(k_1< k_2)$ le due radici reali positive dell'equazione a primo membro della (3.28). Dalla

(3.27) si ha allora:

(3.30) $4N<(q+3)^2 \Longrightarrow z_s = 0$ per ogni s tale che $k_1 < s < k_2$

Supponiamo ora:

(3.31) $$N \leq 2q+2$$

Dalla (3.27) si ha allora:

$$k(q+3)-k^2 \leq N \leq 2q+2$$

e quindi (cfr. (3.28)):

(3.32) $$k^2-k(q+3)+2q+2 \geq 0.$$

(3.33) $$k^2-k(q+3)+2q+2 = 0 \Longleftrightarrow N=2q+2 \text{ \underline{e vale} } (3.26).$$

Le radici dell'equazione a primo membro della (3.33) sono $k_1 = 2$, $k_2 = q+1$. Ne segue che (cfr. (3.30)):

(3.34) $N \leq 2q+2 \Longrightarrow \mathscr{F}$ di classe $[0,1,2,q+1,q+2]$ rispetto ai piani.

(3.35) $N < 2q+2 \Longrightarrow \mathscr{F}$ di classe $[0,1,q+2]$ rispetto ai piani.

Nel caso (3.35), non potendo essere $\mathcal{F}$ di classe $[0,1]$ dovra' essere $z_{q+2}\neq 0$, onde q deve essere pari. Si e' cosi' provato che in ogni caso e':

(3.36) q dispari $\Longrightarrow N\geq 2q+2$.

Sia $N=2q+2$, se $\mathcal{F}$ e' di tipo (0,2) rispetto ai piani, per esempio se q e' dispari (cfr.(3.14)), per i piani Π_k con k=2 vale la (3.28) e quindi la (3.26), cioe' ogni piano Π_2 incontra F esattamente nelle due rette di $\mathcal{F}$ in Π_2. Se ne deduce che $\mathcal{F}$ e' costituito dalle rette di una quadrica iperbolica di PG(3,q), cioe'.

(3.37) $N=2q+2$, $\mathcal{F}$ di tipo (0,2) rispetto ai piani $\Longrightarrow \mathcal{F}$ e' l'Es. I n. 2.

(3.38) $N=2q+2$, q dispari $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ e' l'Es. I n. 2.

Proviamo ora che:

VI - Qualsiasi sia l'insieme $\mathcal{F}$, se q e' pari ed esiste un piano con q+1 rette di $\mathcal{F}$ (cioe' $z_{q+1}\geq 1$), allora si ha: $N\geq 2q+2$ il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, $\mathcal{F}$ e' la differenza simmetrica di due iperovali una in Π_1^* ed una in Π_2^*, ove Π_1^*, $\Pi_2^*\in PG^*(3,q)$, aventi in comune la retta $\ell=\Pi_1\cap\Pi_2$.

Dimostrazione. Sia Π_1 un piano contenente q+1 rette di $\mathcal{F}$. Esse in Π_1^* costituiscono un (q+1)-arco K, il quale ammette una retta nucleo ℓ in Π_1. Per ogni punto di ℓ passa una sola retta di K e quindi una retta di $\mathcal{F}$ non su Π_1, onde $|\mathcal{F}| \geq 2q+2$.

Se $|\mathcal{F}| = 2q+2$, $\mathcal{F}$ si compone delle rette di K e delle q+1 rette non su Π_1, ciascuna uscente da un punto di ℓ, e sia L l'insieme di tali ultime rette.

Sia $r \in L$, per ciascuno dei suoi q punti non su ℓ deve passare un'altra retta r', di $\mathcal{F}$ e quindi di L, onde $r' \cap \Pi_1$ e' un punto di ℓ, cioe' r' appartiene al piano Π_2 determinato da ℓ ed r. Ne segue che L e' costituito da rette del piano Π_2; inoltre $L \cup \{\ell\}$ costituisce un'iperovale di Π_2^* ed $\mathcal{F}$ e dunque la differenza simmetrica delle iperovali $K \cup \{\ell\}$ di Π_1^* ed $L \cup \{\ell\}$ di Π_2^*. Si ha cosi' l'asserto.

VII - Qualsiasi sia $\mathcal{F}$, se esiste un piano Π contenente q+2 rette di $\mathcal{F}$ (cioe' $z_{q+2} \geq 1$ e q e' pari) allora $\mathcal{F}$ e' il duale di una iperovale di Π ovvero e' $N \geq 2q+4$.

Dimostrazione. Le q+2 rette di Π costituiscono una iperovale K_o in Π^*. Se $|\mathcal{F}| = q+2$ allora $\mathcal{F} = K$. Se $|\mathcal{F}| > q+2$, sia $\ell \in \mathcal{F} - K$ ed $A = \ell \cap \Pi$. Per A non possono passare rette di K e quindi passa una retta ℓ' di $\mathcal{F}$, con $\ell' \neq \ell$. Per ogni $P \in \ell - A$ passa un'altra retta di $\mathcal{F}$, oltre ℓ, che e' diversa da ℓ' e dalle rette di K. Ne segue che e' $N \geq 2(q+2)$. Si ha cosi' l'asserto.

Siamo ora in grado di provare che:

VIII - Se $|\mathcal{F}| \leq 2q+2$, $\mathcal{F}$ e' necessariamente uno dei seguenti insiemi:

(3.39) Il duale di una iperovale di un piano π (q pari N=q+2).

(3.40) Le rette di una quadrica iperbolica di PG(3,q) (q pari o dispari, N=2q+2).

(3.41) La differenza simmetrica di una iperovale in π_1^* e di una iperovale in π_2^*, ove π_1^*, $\pi_2^* \in$ PG*(3,q) aventi la retta $\ell = \pi_1^* \cap \pi_2^*$ in comune (q pari, N=2q+2).

Dimostrazione. Se q e\` dispari l'asserto segue da (3.36) e (3.38). Supponiamo dunque q pari. Se $z_{q+2} \geq 1$, per la prop. VII, $\mathcal{F}$ coincide necessariamente con l'insieme (3.39) (supponendosi $|\mathcal{F}| \leq 2q+2$).

Se $z_{q+1} \geq 1$, per la prop. VI, $\mathcal{F}$ coincide necessariamente con l'insieme (3.41). Se $z_{q+2}=z_{q+1}=0$, o $|\mathcal{F}| < 2q+2$ ed allora $\mathcal{F}$ e\` di classe $[0,1]$ rispetto ai piani per la (3.35), e cio\` e\` assurdo; ovvero $|\mathcal{F}|=2q+2$ ed $\mathcal{F}$ e\` di classe $[0,1,2]$ rispetto ai piani (cfr. (3.34));dal sistema $(3.9)_{\Sigma}$, (3.10) si ha allora $z_1 = 0$, dunque $\mathcal{F}$ e\` di tipo (0,2) rispetto ai piani; dalle (3.37) segue allora che $\mathcal{F}$ coincide con l'insieme (3.40). Si ha cosi\` l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] P.J. Cameron and J.H. van Lint, Graph Theory, Coding Theory and Block Designs, LMS Lecture Note Series 19, 1985.

[2] G.Tallini, Problemi e risultati sulle geometrie di Galois, Relaz. n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli, 1973.

[3] G. Tallini, Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space, Atti Conv. Teorie Combinatorie (Rome, sept, 1973), Acc. Naz. Lincei, 1976, 1-7.

[4] G. Tallini, k-insiemi e blocking sets in PG(r,q) e in AG(r,q), Conferenze tenute presso l'Ist. Mat. Univ. L'Aquila (dic. 1982) 1-7.

[5] G. Tallini, Spazi parziali di rette e codici correttori, Quaderni Seminari Geometrie Combinatorie n. 62, 1986. Dipart. di Matematica, Universita` di Roma "La Sapienza".

[6] G. Tallini, Linear Codes Associated with Geometric Structures. Quaderni Seminario Geometrie Combinatorie n. 66, 1986, Dip. Matematica, Universita` di Roma "La Sapienza".

UNIVERSITA' DI L'AQUILA

Quaderni del Seminario di Geometrie Combinatorie
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
Dipartimento di matematica pura e applicata

---

n° 1 G. Tallini, k-INSIEMI E BLOCKING SETS IN PG (r,q) E IN AG(r,q). Dicembre 1982.

n° 2 A. Beutelspacher, 21-6 = 15. A CONNECTION BETWEEN TWO DISTINGUISHED GEOMETRIES. Aprile 1983.

n° 3 G. Tallini, BLOCKING SETS NEI SISTEMI DI STEINER E d-BLOCKING SETS IN PG(r,q) ED AG(r,q). Maggio 1983

n° 4 P.V. Ceccherini, G.Ghera, A VAGNER-PRESTON TYPE THEOREM FOR SEMIGROUPS WITH RIGHT IDENTITIES. Febbraio 1984.

n° 5 F. De Clerck, SUBSTRUCTURES OF PARTIAL GEOMETRIES. Marzo 1984.

n° 6 J.A. Thas, THE THEOREMS OF DEMBOWSKI AND HEISE-PERCSY FROM THE POINT OF VIEW OF GENERALIZED QUADRANGLES. Aprile 1984.

n° 7 P.V. Ceccherini, A q-ANALOGOUS OF THE CHARACTERIZATION OF HYPERCUBES AS GRAPHS. Maggio 1984.

n° 8 M.Curzio, SUL PROBLEMA DI BURNSIDE. Marzo 1985.

n° 9 M.Gionfriddo, SUI SISTEMI DI STEINER. Giugno 1986;

n° 10 G. Tallini, INSIEMI DI TIPO PARI IN PG(3,q), Ottobre 1987

Supplementi Didattici

n° 1 A. Beutelspacher, LA SCUOLA ELEMENTARE DELLA TEORIA DEI CODICI, Aprile 1985.

di rette di tipo pari. Tale problema presenta gia' delle difficolta' nei casi piu' semplici degli spazi di Galois. Ci occuperemo nei numeri successivi appunto dello studio degli insiemi di rette di tipo pari in PG(3,q).

2. Generalita' sugli insiemi di rette di tipo pari in PG(3,q).

Sia $\mathcal{F}$ un insieme di rette di PG(3,q). Denoteremo con F l'unione delle rette di $\mathcal{F}$ e con N il numero delle rette di $\mathcal{F}$. Se t_s(t^*_s) denota il numero dei punti di PG(3,q) per ciascuno dei quali passano s rette di $\mathcal{F}$, (il numero dei piani ciascuno dei quali contiene s rette di $\mathcal{F}$), denotato con τ il numero delle coppie di rette sghembe di $\mathcal{F}$ si ha (cfr. [2], [4]):

$$\text{(2.1)} \quad \begin{cases} \Sigma t_s = \theta_3 = \Sigma t^*_s \,, \\ \Sigma s t_s = N(q+1) = \Sigma s t^*_s \,, \\ \Sigma s(s-1)t_s = N(N-1) - 2\tau = \Sigma s(s-1)t^*_s \,. \end{cases}$$

Diremo che $\mathcal{F}$ e' di tipo pari (di tipo dispari) rispetto alle stelle di rette, se per ogni punto di PG(3,q) passa un numero pari (dispari) di rette di $\mathcal{F}$. Poiche' le rette per un punto sono $\theta_2=q^2+q+1$ e tale numero e' in ogni caso dispari, si ha:

(2.2) Il complementare di un insieme di rette di tipo pari e' di tipo dispari e viceversa.