ISTITUTO DI MATEMATICA APPLICATA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DE L'AQUILA

GIUSEPPE TALLINI

k-INSIEMI E BLOCKING SETS IN PG(r,q) E IN AG(r,q)

QUADERNO n 1

DICEMBRE 1982

SEMINARIO DI GEOMETRIE COMBINATORIE

SEMINARIO DI GEOMETRIE COMBINATORIE

ISTITUTO DI MATEMATICA APPLICATA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA

QUADERNO n 1 DICEMBRE 1982

GIUSEPPE TALLINI

k-INSIEMI E BLOCKING SETS IN PG(r,q) E IN AG (r,q)

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro espongo risultati da me recentemente ottenuti sui k-insiemi e i blocking sets, rispetto alle rette, di PG(r,q) ed AG(r,q). Tali risultati sono stati oggetto di tre Conferenze da me tenute presso l'Università dell'Aquila nel Dicembre 1982. Ringrazio i Professori Berardi, Eugeni, Ferri, che hanno curato egregiamente la stesura del lavoro e l'Istituto di Matematica Applicata della Facoltà di Ingegneria che ha permesso la stampa del presente volume.

QUADERNO n. 1

DICEMBRE 1982

PUBBLICAZIONE A CURA DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA
APPLICATA DELL'UNIVERSITA' DE L'AQUILA
(DEPOSITATO A NORMA DI LEGGE)

1.– SUI k-INSIEMI IN PG(r,q)

Sia $S_r = PG(r,q)$ uno spazio proiettivo di Galois di-dimensione $r \geq 2$ e di ordine $q=p^h$ (p primo). Se S_d è un sottospazio di S_r si ha:

$$|S_d| = \sum_{i=0}^{d} q^i = \theta_d. \tag{1.1}$$

E' noto che il numero di sottospazi S_d di S_r è dato da:

$$\gamma_{r,d} = \prod_{i=0}^{d} \theta_{r-i} / \theta_{d-i} \tag{1.2}$$

Sia K un qualsiasi k-insieme di $PG(r,q)$ con $K \neq \emptyset$ e $K \neq PG(r,q)$. Denotiamo con m ed n rispettivamente il minimo ed il massimo numero di punti nei quali un sottospazio S_d $(1 \leq d \leq r-1)$ di S_r, con $|S_d \cap K| \neq \emptyset$, interseca K.

Poniamo cioè:

$$m = \min_{S_d \,|\, K \cap S_d \neq \emptyset} |K \cap S_d| \tag{1.3}$$

ed

$$n = \max_{S_d \,|\, K \cap S_d \neq \emptyset} |K \cap S_d| \tag{1.4}$$

Si ha ovviamente:

$$1 \leq m \leq n \leq |S_d| = \theta_d. \tag{1.5}$$

Si definisce carattere di indice s di un k-insieme K, nella dimensione d, il numero $t_s^d = t_s$ $(s=0,1,\dots,\theta_d)$ degli S_d ciascuno dei quali contenga esattamente s punti di K. Un k-insieme K si dice di classe $[m_o, m_1, \dots, m_1]_d$ con $0 \le m_o < m_1 < \dots < m_1 \le \theta_d$, nella dimensione d, se è $t_s = 0$ per ogni s diverso da $m_o, \dots, m_1$. Se K è di classe $[m_o, m_1, \dots, m_1]_d$ nella dimensione d ed inoltre $t_s \neq 0$ per ogni $s=m_o,\dots, m_1$ allora K si dice di tipo $(m_o,\dots,m_1)_d$ nella dimensione d, [4].

Osserviamo che, se $m = n$, K è intersecato da un S_d o in zero punti (se S_d è esterno a K) o in m punti. Ne segue che per $r = 2$ $K = \emptyset$ oppure $K = S_2$ ovvero K è un insieme di tipo $(o,m)_1$ con $m = p^1$ $(o \le 1 \le h)$ [7]; per $r \ge 3$ se K non possiede spazi S_d esterni allora o $K = \emptyset$ oppure $K = S_r$, in caso contrario K o è un punto ovvero il complementare di un iperpiano ([4] prop.I, XIV). Supporremo pertanto nel seguito:

$$(1.6) \qquad 1 \le m < n \le \theta_d.$$

Definiamo $(k;\, o,m,n)_d$- insieme un k-insieme K di S_r tale che m ed n siano rispettivamente il minimo ed il massimo numero di punti in cui esso è intersecato da un S_d non esterno a K.

Tra i caratteri di un k-insieme K sussistono le seguenti relazioni, [4]:

$$(1.7)\begin{cases} t_o + \sum\limits_{s=m}^{n} t_s = \gamma_{r,d} \\ \sum\limits_{s=m}^{n} s\, t_s = k\, \gamma_{r-1,d-1} \\ \sum\limits_{s=m}^{n} s\,(s-1)\, t_s = k\,(k-1)\, \gamma_{r-2,\, d-2} \end{cases}$$

Dalle $(1.7)_{II}$ e $(1.7)_{III}$ si ottiene:

$$(1.8) \qquad \sum_{s=m}^{n} s^2\, t_s = k \left[(k-1)\, \gamma_{r-2,d-2} + \gamma_{r-1,d-1}\right].$$

Fissati comunque due interi M ed N, dalle (1.7), (1.8) risulta:

$$\sum_{s=m}^{n} (N-s)(s-M)\, t_s = (M+N) \sum_{s=m}^{n} s\, t_s - \sum_{s=m}^{n} s^2\, t_s - MN \sum_{s=m}^{n} t_s =$$

$$= -\Big\{ k^2 \gamma_{r-2,d-2} - k\left[(M+N-1)\, \gamma_{r-1,d-1} + \gamma_{r-2,d-2}\right] +$$

$$+ MN\,(\gamma_{r,d} - t_o) \Big\}.$$

Posto

$$(1.9) \quad F = F(k,M,N,t_o,r,d,q) = k^2\, \gamma_{r-2,d-2} - k\left[(M+N-1) \cdot \gamma_{r-1,d-1} + \gamma_{r-2,d-2}\right] + MN\,(\gamma_{r,d} - t_o)$$

si ha:

$$(1.9') \qquad \sum_{s=m}^{n} (N-s)\,(s-M)\, t_s = -F.$$

Se $N \geqslant n$, $M \leqslant m$, risulta evidentemente:

$$(1.10) \qquad F \leqslant 0.$$

Si ha inoltre:

$$(1.11) \qquad F=0 \Longleftrightarrow N=n,\ M=m,\ t_{m+1} = \dots = t_{n-1} = 0$$

Infatti se $N > n$ risulta $F \neq 0$ (essendo $t_n \neq 0$) e se $M < m$ risulta ancora $F \neq 0$ (essendo $t_m \neq 0$).
Pertanto se $F = 0$ è necessariamente $N = n$ ed $M = m$ e di conseguenza $t_{m+1} = \dots = t_{n-1} = 0$. Il viceversa è ovvio.
Dalla (1.11) si ha:

$$(1.12) \qquad F = 0 \Longleftrightarrow N = n,\ M = m,\ X \text{ di classe } [0,m,n]_d.$$

Essendo $F \leqslant 0$ per $N \geqslant n$ e $M \leqslant m$ si ha:

$$(1.13) \qquad \Delta = \left[(M+N-1)\gamma_{r-1,d-1} + \gamma_{r-2,d-2}\right]^2 - 4MN\gamma_{r-2,d-2}\left(\gamma_{r,d} - t_o\right) \geqslant 0,$$

da cui, se $N \geqslant n$ e $M \leqslant m$, si ha:

$$(1.14) \qquad t_o \geqslant \gamma_{r,d} - \left[(M+N-1)\gamma_{r-1,d-1} + \gamma_{r-2,d-2}\right]^2 / 4MN\gamma_{r-2,d-2}$$

Nella (1.14) vale il segno di eguaglianza se, e solo se, $\Delta = 0$ e poichè $F \leqslant 0$, risulta che:

Nella (1.14) <u>vale il segno di eguaglianza se e solo se</u> $F = 0$ <u>e</u> $k = k_o = \left[(m+n-1)\,\gamma_{r-1,d-1} + \gamma_{r-2,d-2}\right] / 2\gamma_{r-2,d-2}$; <u>cioè se, e solo se, vale la</u> (1.12) <u>con</u> $k = k_o$.

La (1.14) è indipendente da k e fornisce una limitazione inferiore per t_o se il suo secondo membro è positivo; in tal caso è possibile escludere l'esistenza di particolari k-insiemi.

Se in particolare $M = m$, $N = n$ risulta $F \leqslant 0$ ed è verificata la (1.13) ovvero la (1.14); se ne deduce la limitazione per k:

$$(1.15) \qquad k_1 \leqslant k \leqslant k_2$$

<u>essendo</u> k_1 <u>e</u> k_2 <u>le radici della</u> $F = 0$ (ove si ponga $M = m$ e $N = n$). <u>Nella</u> (1.15) <u>è</u> $k = k_1$ <u>ovvero</u> $k = k_2$ <u>se, e solo se,</u> $F = 0$ <u>e cioè se, e solo se, vale la</u> (1.12).

Osserviamo ancora che, se $N = n$, $M = m$ la (1.14) diventa:

$$(1.16) \qquad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4mn}\left\{4mn\frac{\gamma_{r,d}}{\gamma_{r-2,d-2}} - \left[(m+n-1)\frac{\gamma_{r-1,d-1}}{\gamma_{r-2,d-2}} + 1\right]^2\right\}$$

Posto

$$(1.17) \qquad D = 4mn - (m+n-1)^2$$

e tenuto conto che è (cfr.(1.2)):

$$\gamma_{r-1,d-1}/\gamma_{r-2,d-2} = \theta_{r-1}/\theta_{d-1} \cdot \gamma_{r,d}/\gamma_{r-2,d-2} = \theta_r\theta_{r-1}/\theta_d\theta_{d-1}$$

la (1.16) può scriversi:

$$(1.18) \qquad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4mn\,\theta_d\theta_{d-1}^2}\left[D\,q^{2r+d-2} + P(q)\right].$$

ove P (q) è il polinomio in q di grado inferiore a $2r+d-2$ dato da:

$$(1.19)\quad P(q) = D\left[\theta^2_{r-1}\,\theta_{d-1} + q^d\,\theta_{r-2}(\theta_{r-2} + 2\,q^{r-1})\right] - $$
$$- 4\,m\,n\,q^d\,\theta_{r-1}\,\theta_{r-d-1} - \theta_d\theta_{d-1}\left[2(m+n-1)\,\theta_{r-1} + \theta_{d-1}\right]$$

Ponendo:

$$(1.20)\qquad A(q) = Dq^{2r+d-2} + P(q),$$

la (1.18) diventa:

$$(1.21)\qquad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4\,mn\,\theta_d\,\theta^2_{d-1}}\ A\,(q)$$

Tenuto conto che è $A\,(o) = -\,(n-m)^2 < 0$, se è $D = 4\,m\,n - (m + n-1)^2 > 0$ l'equazione $A\,(q) = 0$ ammette radici reali positive. Sia q_o la massima radice reale positiva della equazione $A(q) = 0$. Risulta allora $A\,(q) > 0$ per ogni $q > q_o$. Si ha:

$$D = 4\,m\,n - (m+n-1)^2 = -\left[n - (\sqrt{m} - 1)^2\right]\left[n - (\sqrt{m} + 1)^2\right],$$

da cui, essendo sempre $n - (\sqrt{m} - 1)^2 > 0$, segue

$$(1.22)\qquad n < (\sqrt{m} + 1)^2 \Longleftrightarrow D > 0 \Longrightarrow t_o > 0,\ \ \forall q > q_o$$

Dalla (1.22) si deduce che:

I.- <u>In</u> PG(r,q) <u>non esistono</u> $(k;0,m,n)_d$-<u>insiemi con</u> $t_o=0$ <u>ed</u> $n < (\sqrt{m}+1)^2$, <u>per ogni</u> $q>q_o$ <u>(ove</u> q_o <u>è la massima radice reale positiva dell'equazione</u> $A\,(q) = 0$, <u>essendo</u> $A\,(q)$ <u>il polinomio</u> (1.20)).

Per $r = 2$ e $d = 1$ la (1.21) diventa:

$$(1.23)\qquad t_o \geqslant \frac{A\,(q)}{\theta_1} = \left\{4\,m\,n\,\theta_2 - \left[(m+n-1)\,\theta_1 + 1\right]^2\right\} / 4\,m\,n\,.$$

L'importanza delle (1.21),(1.22), (1.23) si può mettere in luce in svariati casi particolari. Mostreremo qualche esempio. In PG (2,q) sia K un k-insieme con $m = 1$ ed $n = 3$; per esso è soddisfatta la (1.22) e risulta $q_o = 4{,}309\ldots$, ne segue che (cfr. (1.23)):

II.- <u>In</u> PG (2,q) <u>un</u> k-<u>insieme con</u> $m = 1$ <u>ed</u> $n = 3$, <u>in particolare una cubica irriducibile, ammette sempre rette esterne, se è</u> $q > 4$, <u>in numero di</u> $t_o \geqslant [3\,q^2 - 12\,q - 4] / 12$. <u>(Si noti che se è</u> $q \leqslant 4$ <u>esistono cubiche irriducibili prive di rette esterne, per esempio in</u> PG (2,4) <u>la cubica</u> $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ <u>non ammette rette esterne</u>). <u>Se ne deduce che in</u> PG (r,q), <u>con</u> $q > 4$, <u>ogni</u> k-<u>insieme di classe</u> $[0,1,2,3]_1$, <u>rispetto alle rette ammette sempre rette esterne</u>.

In PG (2,q) sia K un k-insieme con $m = 2$ ed $n \leqslant 5$; per esso è soddisfatta la (1.22) e risulta $q_o = 11{,}20$, ne segue che (cfr.(1.23)):

III.- <u>In</u> PG (2 , q) <u>un</u> k-<u>insieme di classe</u> $[0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]_1$ <u>ammette sempre rette esterne, se è</u> $q>11$, <u>in numero di</u> $t_o > [4\,q^2 - 44\,q - 9] / 40$. <u>Se ne deduce che in</u> PG (r,q), <u>con</u> $q > 11$, <u>un</u> k-<u>insieme di classe</u> $[0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]_1$ <u>rispetto alle rette ammette sempre rette esterne</u>.

In particolare dalla prop. III si ha che in PG (2,q), con q pari e $q > 11$, se K_1 e K_2 sono due $(q+2)$ - archi allora $K_1 \cup K_2$ ammette sempre qualche retta esterna. Inoltre in $PG(2,q)$, con $q>11$, ogni quintica, non contenente rette come componenti, se non ammette rette esterne deve ammettere qualche retta 1 - secante.

2.- I k-INSIEMI DI AG(r,q)

Sia $A_r = AG(r,q)$ uno spazio affine di Galois di dimensione $r \geqslant 2$ ed ordine q. Sia K $(\neq \emptyset, A_r)$ un qualsiasi k-insieme di A_r. Denotiamo con m ed n rispettivamente il minimo ed il massimo numero di punti nei quali un d-sottospazio A_d di A_r, tale che $A_d \cap K \neq \emptyset$, interseca K. Poniamo cioè:

$$m = \min_{A_d \mid K \cap A_d \neq \emptyset} |K \cap A_d| \tag{2.1}$$

e

$$n = \max_{A_d \mid K \cap A_d \neq \emptyset} |K \cap A_d| . \tag{2.2}$$

Si ha ovviamente

$$1 \leqslant m \leqslant n \leqslant |A_d| = q^d .$$

Si definisce <u>carattere</u> di indice s di un k-insieme K di $AG(r,q)$ nella dimensione d il numero t_s $(s=0,1,\dots,q^d)$ di sottospazi A_d ciascuno dei quali contenga esattamente s punti di K. Un k-insieme K si dice di <u>classe</u> $[m_0, m_1, \dots, m_l]_d$ nella dimensione d, con $0 \leqslant m_0 < m_1 < \dots < m_l \leqslant q^d$, se è $t_s = 0$ per ogni $s \neq m_0, m_1, \dots, m_l$. Se K è di <u>classe</u> $[m_0, m_1, \dots, m_l]_d$ nella dimensione d ed inoltre $t_s \neq 0$ per ogni $s = m_0, m_1, \dots, m_l$, si dice che K è di <u>tipo</u> $(m_0, m_1, \dots, m_l)_d$ nella dimensione d.

Se $m = n$ può aversi: $t_0 = 0$ onde K è di tipo $(m)_d$ e quindi $K = \emptyset$ ovvero $K = AG(r,q)$ il che è escluso; oppure $t_0 > 0$ ma allora K è di tipo $(0,m)_d$ per cui, se è $r \geqslant 3$, K è un punto P, cioè $K = \{P\}$, (cfr. [4]).

Nel seguito quindi supporremo:

$$1 \leqslant m < n \leqslant q^d . \tag{2.3}$$

Tra i caratteri di un k-insieme K sussistono le seguenti relazioni, la cui dimostrazione è analoga a quella delle (1.7):

$$\begin{cases} t_0 + \sum_{s=m}^{n} t_s = \gamma_{r,d} - \gamma_{r-1,d} = q^{r-d}\,\gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{s=m}^{n} s\, t_s = k\,\gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{s=m}^{n} s(s-1)\, t_s = k(k-1)\,\gamma_{r-2,d-2} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dalle $(2.4)_{III}$ e $(2.4)_{II}$ si deduce:

$$\sum_{s=m}^{n} s^2 t_s = k\left[(k-1)\,\gamma_{r-2,d-2} + \gamma_{r-1,d-1}\right] \tag{2.5}$$

Fissati comunque due interi M ed N risulta:

$$\sum_{s=m}^{n} (N-s)(s-M)\, t_s = (M+N) \sum_{s=m}^{n} s\, t_s - \sum_{s=m}^{n} s^2 t_s - M N \sum_{s=m}^{n} t_s =$$

$$= - \gamma_{r-2,d-2} \left\{ k^2 - k \left[(M+N-1)\, \gamma_{r-1,d-1} / \gamma_{r-2,d-2} + 1 \right] + \right.$$

$$\left. + M N \left(q^{r-d}\, \gamma_{r-1,d-1} / \gamma_{r-2,d-2} - t_o / \gamma_{r-2,d-2} \right) \right\} =$$

$$= - \gamma_{r-2,d-2} \left\{ k^2 - k \left[(M+N+1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1 \right] + \right.$$

$$\left. + M N \left(q^{r-d}\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} - t_o / \gamma_{r-2,d-2} \right) \right\}$$

Posto

$$(2.6)\quad F = F(k,M,N,q,r,d,t_o) = k^2 - k \left[(M+N-1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1 \right] +$$

$$+ M N \left(q^{r-d}\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} - t_o / \gamma_{r-2,d-2} \right),$$

si ottiene:

$$(2.7)\quad \sum_{s=m}^{n} (N-s)(s-M)\, t_s = - \gamma_{r-2,d-2}\, F.$$

Nel seguito supporremo sempre $N \geq n$ e $M \leq m$. In tale ipotesi risulta:

$$0 \leq \sum_{s=m}^{n} (N-s)(s-M)\, t_s = - \gamma_{r-2,d-2}\, F,$$

da cui segue:

$$(2.8)\quad F \leq 0.$$

Si ha subito (come per la (1.11)):

$$(2.9)\quad F = 0 \Longleftrightarrow N = n,\ M = m \ \text{e}\ t_{m+1} = \dots = t_{n-1} = 0$$

cioè

(2.10) $F = 0 \Longleftrightarrow N = n$, $M = m$, K di tipo $(o,m,n)_d$ ovvero di tipo $(m,n)_d$ a seconda che sia $t_o > 0$ ovvero $t_o = 0$.

Essendo $F \leq 0$ si ha:

$$(2.11)\quad \Delta = \left[(M+N-1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1 \right]^2 - 4 M N \left[q^{r-d}\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} - t_o / \gamma_{r-2,d-2} \right] \geq 0$$

da cui

$$(2.12)\quad t_o \geq \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4 M N} \left\{ 4 M N q^{r-d}\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} - \left[(M+N-1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1 \right]^2 \right\}.$$

Le (2.11) e (2.12) valgono in particolare se $M = m$ ed $N = n$. Nella (2.12) vale il segno di eguaglianza se, e solo se, è $\Delta = 0$, e poichè è $F \leqslant 0$, risulta che: nella (2.12) vale il segno di eguaglianza se e solo se $F = 0$ con $k = k_o =$ $= \left[(m + n - 1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1\right] / 2$, e cioè se, e solo se, vale la (2.10) con $k = k_o$.

La (2.12), che è indipendente da k, fornisce una limitazione inferiore per t_o se il secondo membro è positivo, in tal caso è possibile escludere l'esistenza di particolari k-insiemi.

Se in particolare $M = m$ ed $N = n$ risulta $F \leqslant 0$ ed è verificata la (2.11), ovvero la (2.12), si deduce per k la limitazione:

$$(2.13) \qquad k_1 \leqslant k \leqslant k_2$$

essendo k_1 e k_2 le radici della $F = 0$ (ove si ponga $M = m$ ed $N = n$). Nella (2.13) è $k = k_1$ ovvero $k = k_2$ se e solo se $F = 0$ e cioè se, e solo se, vale la (2.10).

Osserviamo ancora che, se $N = n$ ed $M = m$ la (2.12) diventa

$$(2.14) \quad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4\, m\, n} \left\{ 4\, m\, n\, q^{r-d}\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} - \left[(m + n - 1)\, \theta_{r-1} / \theta_{d-1} + 1\right]^2 \right\} .$$

Tenuto conto della (1.17) la (2.14) si può scrivere:

$$(2.15) \quad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4\, m\, n\, \theta^2_{d-1}} \left[D\, q^{2r-2} + P'(q)\right] ,$$

ove $P'(q)$ è il polimonio in q di grado inferiore a $2\,r-2$ dato da:

$$(2.16) \quad P'(q) = D\, \theta_{r-2}\, (q^{r-1} + \theta_{r-1}) - 2\, \theta_{r-1}\, (2\, m\, n\, \theta_{r-d-1} + (m+n-1)\, \theta_{d-1}) - \theta^2_{d-1} .$$

Ponendo

$$(2.17) \quad B(q) = D\, q^{2r-2} + P'(q) \ , \quad D = 4\, m\, n - (m+n-1)^2,$$

la (2.15) diventa:

$$(2.18) \quad t_o \geqslant \frac{\gamma_{r-2,d-2}}{4\, m\, n\, \theta^2_{d-1}}\, B(q),$$

che per $r = 2$ e $d = 1$ risulta:

$$(2.19) \quad t_o \geqslant B(q) / 4\, m\, n = \left[D\, q\, \theta_1 - \theta_1 \left((m+n)^2 - 1\right) - 1\right] / 4\, m\, n.$$

Tenuto conto che è $B(0) = -(n-m)^2 < 0$, se è $D = 4\, m\, n - (m+n-1)^2 > 0$, l'equazione $B(q) = 0$ ammette radici reali positive. Sia q'_o la massima radice reale positiva di $B(q) = 0$. Risulta allora $B(q) > 0$ per ogni $q > q'_o$.

Si ha: $D = 4\, m\, n - (m + n - 1)^2 =$

$$= -\left[n - (\sqrt{m} - 1)^2\right]\left[n - (\sqrt{m} + 1)^2\right] .$$

da cui, essendo sempre $n - (\sqrt{m} - 1)^2 > 0$, segue:

$$(2.20) \qquad n < (\sqrt{m} + 1)^2 \Longleftrightarrow D > 0 \Longrightarrow t_o > 0, \ \forall q > q'_o .$$

Dalla (2.20) otteniamo che:

II.– In $A\,G\,(r,q)$ non esistono k-insiemi con $t_o = 0$ ed $n < (\sqrt{m} + 1)^2$, per ogni $q > q'_o$ (ove q'_o è la massima radice reale positiva della equazione $B\,(q)=0$, essendo $B\,(q)$ dato dalla (2.17)).

3.– FIBRAZIONI MEDIANTE RETTE IN PG(r,q)

Sia $S_r = PG\,(r,q)$ uno spazio proiettivo di Galois di dimensione r e di ordine q, $q = p^h$ (p primo).

Una fibrazione mediante rette in $PG\,(r,q)$ è una famiglia $\mathcal{F}\ (\neq \emptyset)$ di rette di $PG\,(r,q)$ a due a due sghembe. Se l'unione F delle rette di $\mathcal{F}$ coincide con $PG\,(r,q)$ si dice che $\mathcal{F}$ è una fibrazione totale o di $PG\,(r,q)$, in caso contrario essa è detta parziale. Una fibrazione $\mathcal{F}$ in $PG\,(r,q)$ è detta massimale se non esiste in $PG\,(r,q)$ una fibrazione $\mathcal{F}'$ nella quale essa sia contenuta propriamente.

Denotiamo rispettivamente con m ed n il minino ed il massimo numero di rette che un sottospazio S_3 di $PG(r,q)$, $r \geq 4$, contenente almeno una retta di $\mathcal{F}$, ha in comune con $\mathcal{F}$. Poniamo cioè (denotando con $\mathcal{F} \cap S_3$ l'insieme delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti ad un S_3):

$$(3.1) \qquad m = \min_{S_3 \mid S_3 \cap \mathcal{F} \neq \emptyset} |\mathcal{F} \cap S_3| .$$

$$(3.2) \qquad n = \max_{S_3 \mid S_3 \cap \mathcal{F} \neq \emptyset} |\mathcal{F} \cap S_3| .$$

Si ha ovviamente:

$$(3.3) \qquad 1 \leq m \leq n \leq 1 + q^2$$

Si definisce carattere di indice s di una fibrazione $\mathcal{F}$ mediante rette in $PG\,(r,q)$ nella dimensione 3 il numero t_s ($s = 0,1,\dots,1+q^2$) di sottospazi S_3 ciascuno dei quali contenga esattamente s rette di $\mathcal{F}$ (cfr. [5]).

Una fibrazione $\mathcal{F}$ si dice di classe $[m_o, m_1, \dots, m_1]$ nella dimensione 3, con $0 \leq m_o < m_1 < \dots < m_1 \leq 1+q^2$ se è $t_s = 0$ per ogni s diverso da $m_o, \dots, m_1$. Se $\mathcal{F}$ è di classe $[m_o, m_1, \dots, m_1]$ nella dimensione 3 ed inoltre $t_s \neq 0 \ \forall s = m_o, \dots, m_1$, allora la $\mathcal{F}$ si dice di tipo $(m_o, \dots, m_1)$ nella dimensione 3.

Se nella (3.3) è $m = n$, necessariamente $\mathcal{F}$ è di classe $[o,m]$ nella dimensione 3; ricordato allora (cfr. G.Tallini [5]) che non esistono fibrazioni in $PG(r,q)$ ad un sol carattere rispetto agli S_3 e che fibrazioni di tipo (o,m) rispetto agli S_3 possono esistere solo se $r = 4$, segue che per $r \geq 5$ nella (3.3) è $m < n$. Tra i caratteri di una fibrazione $\mathcal{F}$, posto $|\mathcal{F}| = k$, sussistono le seguenti relazioni (cfr. [5]):

$$
(3.4)\begin{cases}
t_o + \sum_{s=m}^{n} t_s = \gamma_{r,3} = \theta_r\,\theta_{r-1}\theta_{r-2}\theta_{r-3}/\theta_3\theta_2\,\theta_1 \\[2ex]
\sum_{s=m}^{n} s\, t_s = k\, \gamma_{r-2,1} \\[2ex]
\sum_{s=m}^{n} s\,(s-1)\, t_s = k\,(k-1)
\end{cases}
$$

Dalle $(3.4)_{III}$ e $(3.4)_{II}$ segue:

$$
(3.5) \qquad \sum_{s=m}^{n} s^2\, t_s = k\left[k-1+\gamma_{r-2,1}\right].
$$

Fissati comunque due interi M ed N risulta:

$$
\sum_{s=m}^{n} (N-s)\,(s-M)\, t_s = (M+N)\sum_{s=m}^{n} s\, t_s - \sum_{s=m}^{n} s^2\, t_s - M\,N\sum_{s=m}^{n} t_s =
$$

$$
= -\left\{k^2 - k\left[1+(M+N-1)\,\gamma_{r-2,1}\right] + MN\,(\gamma_{r,3} - t_o)\right\}.
$$

Posto :

$$
(3.6) \quad \varphi = \varphi(k,M,N,q,r,t_o) = k^2 - k\left[1+(M+N-1)\,\gamma_{r-2,1}\right] + M\,N\,(\gamma_{r,3} - t_o)
$$

si ha:

$$
(3.7) \quad \sum_{s=m}^{n} (N-s)\,(s-M)\, t_s = -\varphi\,.
$$

Nel seguito supporremo sempre $N \geqslant n$ ed $M \leqslant m$. In tale ipotesi risulta:

$$
\sum_{s=m}^{n} (N-s)\,(s-M)\, t_s \geqslant 0
$$

da cui segue per la (3.7):

$$
(3.8) \qquad \varphi \leqslant 0\,.
$$

Supposto $m<n$, si ha subito, analogamente alle (1.11) e (2.9):

$$
(3.9) \quad \varphi = 0 \Longleftrightarrow N = n,\ M = m,\ t_{m+1} = \dots = t_{n-1} = 0
$$

cioè

$$
(3.10)\begin{cases}
\varphi = 0 \Longleftrightarrow N = n,\ M = m,\ \mathcal{T} \text{ di tipo } (o,m,n) \text{ se } t_o > 0, \text{ o} \\
\text{di tipo } (m,n) \text{ se } t_o = 0, \text{ essendo necessariamente } r=4,5.
\end{cases}
$$

Dalle (3.6) e (3.8) per $N = n$, $M = m$ si deduce:

$$
(3.11) \quad t_o \geqslant \frac{1}{mn}\left\{k^2 - k\left[1+(m+n-1)\,\gamma_{r-2,1}\right] + m\,n\,\gamma_{r,3}\right\},
$$

valendo il segno di eguaglianza se e solo se vale la (3.10). Essendo $\varphi \leqslant 0$, si ha:

$$
(3.12) \quad \Delta = \left[(M+N-1)\,\gamma_{r-2,1} + 1\right]^2 - 4\,M\,N\,(\gamma_{r,3} - t_o) \geqslant 0
$$

da cui:

$$(3.13)\qquad t_0 \geqslant \frac{1}{4MN}\left\{4MN\gamma_{r,3} - \left[1 + (M+N-1)\gamma_{r-2,1}\right]^2\right\}.$$

Le (3.12) e (3.13) valgono in particolare se $M = m$, $N \doteq n$.

Nella (3.13) vale il segno di eguaglianza se e solo se $\Delta = 0$; essendo $\varphi \leq 0$ risulta che : nella (3.13) vale il segno di eguaglianza se, e solo se, $\varphi = 0$ con

$$(3.14)\qquad k = \frac{1 + (m+n-1)\gamma_{r-2,1}}{2}$$

cioè se, e solo se, valgono le (3.10) e (3.14).

Notiamo ancora che se in particolare nella (3.7) si pone $N = n$, $M = m$, risultando $\varphi \leqslant 0$ ed essendo verificata la (3.12) ovvero la (3.13), si deduce per k la limitazione:

$$(3.15)\qquad k_1 \leqslant k \leqslant k_2$$

essendo k_1 e k_2 le radici di $\varphi = 0$. Nella (3.15) è $k=k_1$ ovvero $k = k_2$ se, e solo se, $\varphi = 0$, cioè se, e solo se, vale la (3.10).

Notiamo inoltre che, se $N = n$, $M = m$, $m < n$, $r \geqslant 4$, la (3.13) diventa:

$$(3.16)\qquad t_0 \geqslant \frac{1}{4mn}\left\{4mn\,\gamma_{r,3} - \left[1 + (m+n-1)\,\gamma_{r-2,1}\right]^2\right\}.$$

La (3.16) è significativa quando il suo secondo membro è positivo. Al riguardo osserviamo che tale membro può scriversi (cfr. (1.17)) ;

$$\frac{1}{4mn\,\theta_1\theta_2\theta_3}\left[D\,q^{4r-6} + \overline{P}(q)\right],$$

ove $\overline{P}(q)$ è un polimonio in q di grado inferiore a $4r-6$ (che si può facilmente determinare esplicitamente). Ponendo:

$$(3.17)\qquad C(q) = D\,q^{4r-6} + \overline{P}(q),$$

si ha:

$$(3.18)\qquad t_0 \geqslant \frac{C(q)}{4mn\,\theta_1\theta_2\theta_3}$$

Tenuto conto che è:

$$C(q) = \theta_1\theta_2\theta_3\left\{4mn\,\gamma_{r,3} - \left[1+(m+n-1)\,\gamma_{r-2,1}\right]^2\right\}$$

e quindi che $C(0) = -(n-m)^2 < 0$, se è $D = 4mn-(m+n-1)^2 > 0$ l'equazione $C(q) = 0$ ammette radici reali positive. Sia $\overline{q}_0$ la massima radice reale positiva di $C(q)=0$. Risulta allora $C(q) > 0$ per ogni $q > \overline{q}_0$. Si ha $D = 4mn-(m+n-1)^2 = -\left[n-(\sqrt{m}-1)^2\right]\cdot\left[n-(\sqrt{m}+1)^2\right]$, da cui, essendo $n-(\sqrt{m}-1)^2 > 0$, otteniamo:

$$(3.19)\qquad n < (\sqrt{m}+1)^2 \Longleftrightarrow D > 0 \Longrightarrow t_0 > 0,\ \forall q > \overline{q}_0$$

Dalla (3.19) segue che:

III.- In PG (r,q), $r \geqslant 4$, non esistono fibrazioni mediante rette con $t_0 = 0$ ed $n < (\sqrt{m}+1)^2$, per ogni $q > \overline{q}_0$ (ove $\overline{q}_0$ è la massima radice reale positiva dell'equazione $C(q)=0$).

4.- BLOCKING SETS, RISPETTO ALLE RETTE, IN PG(r,q)

Sia PG (r,q) uno spazio proiettivo di Galois di dimensione r e di ordine q. Si definisce "blocking set" rispet=

to alle rette un sottoinsieme S di PG (r,q) che soddisfi le seguenti condizioni:

i) Ogni retta di PG (r,q) ha intersezione non vuota con S.

ii) S non contiene rette di PG (r,q).

Segue subito che:

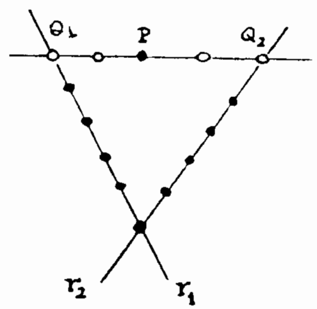
IV.– <u>Il complementare di un blocking set è ancora un blocking set.</u>

V.– <u>Se H è un qualsiasi sottospazio di PG (r,q), l'insieme $H\cap S$ è un blocking set di H rispetto alle rette di H.</u>

Un blocking set S dicesi <u>irriducibile</u> se ogni punto $P\in S$ è tale che S–P non è un blocking set o, equivalentemente, se per ogni punto P di S passa almeno una tangente. Evidentemente ogni blocking set contiene qualche blocking set irriducibile.

VI.– <u>Il complementare di un blocking set irriducibile di PG(2,q) è un blocking set riducibile.</u>

<u>Dimostrazione</u>. Sia S un blocking set irriducibile di PG(2,q) tale che il suo complementare S' sia anche irriducibile. Se $P \in S$, esiste almeno una tangente t in P ad S. Siano Q_1, $Q_2 \in t-\{P\}$, con $Q_1 \neq Q_2$. Per Q_i deve passare una tangente r_i ad S', cioè una q-secante di S ed è $r_1 \neq r_2$ e $r_i \neq t$. Ma allora, S essendo irriducibile, deve aversi $S = (r_1-Q_1)\cup(r_2-Q_2)\cup P$ (v. fig.), onde è $q>2$ ed $S' = PG\,(2,q) - S$ e quindi S' è riducibile, contro il supposto. L'assurdo prova l'asserto.



Un'altra dimostrazione della prop. VI è la seguente. Se S ed S' = PG(2,q) – S sono blocking sets irriducibili, per ogni punto P di S passa almeno una tangente in P ad S e per ogni punto P' di S' passa almeno una q-secante di S' e per punti distinti di tali rette ne passano di distinte. Onde, denotato con t_s il carattere di indice s di S (cfr. n.1), risulta $t_1+t_q \geq \theta_2$. Essendo $\sum_{s=1}^{q} t_s=\theta_2$ si ha: $t_1+t_q=\theta_2$, $t_2=\ldots=t_{q-1}=0$, cioè S è di tipo (1,q); ma, come è noto [7], non esistono insiemi di tipo (1,q). L'assurdo prova l'asserto.

<u>Problema</u>: In PG (r,q), con $r\geq 3$, esistono blocking sets irriducibili i cui complementari siano ancora irriducibili?

Un esempio di blocking set irriducibile di PG (2,q) con q quadrato è costituito da un subpiano di Baer di PG(2,q), cioè da un subpiano di ordine $\sqrt{q}$. Infatti PG(2,$\sqrt{q}$) è, come subito si prova, un $(q+\sqrt{q}+1)$-insieme di tipo $(1,1+\sqrt{q})_1$. Altri esempi si trovano nella dimostrazione della prop. XX.

Per i blocking sets di PG (2,q) si ha il seguente teorema di Bruen, [1]:

VII.– <u>Sia</u> S <u>un blocking set di</u> PG (2,q). <u>Risulta</u>:

$$q+\sqrt{q}+1 \leq |S| \leq q^2-\sqrt{q}, \tag{4.1}$$

<u>valendo il segno di eguaglianza a sinistra se e solo se S è un sub-piano di Baer e quello a destra se e solo se S è il complementare di un subpiano di Baer.</u>

In PG (2,2) non esistono blocking set, come si può provare direttamente ovvero in base alla (4.1).

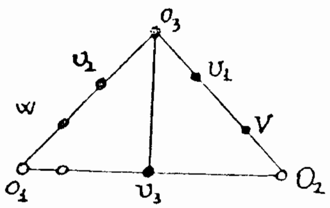
Dalla prop. V segue che:

VIII.- In PG $(r,2)$, $r \geqslant 2$, non esistono blocking sets.

Proviamo ora che:

IX.- In PG(2,3) esistono esattamente due blocking sets, a meno di omografie, l'uno con 6 punti l'altro con 7 punti.

Dimostrazione.- In PG (2,3) un qualsiasi blocking set deve avere 6 o 7 punti per la (4.1). Poichè PG(2,3) ha 13 punti, si ha che il complementare di un eventuale blocking set S con $|S| = 6$ è un blocking set S' con $S' = 7$ e viceversa. L'esistenza di blocking Sets S con $|S| = 6$ è provata dal seguente esempio. Consideriamo, fissato un riferimento proiettivo, i punti O_1 (1, 0, 0,), O_2(0,1,0), O_3 (0,0,1), U_1(0,1,1), U_2 (1,0,1), U_3 (1,1,0), V(0,1,-1), W (1,0,-1) che risultano disposti come in figura. I 6 punti O_3, U_1, U_2, U_3, V, W costituiscono un blocking set irriducibile, S (6), come subito si verifica.



Proviamo che ogni altro blocking set di 6 punti è proiettivamente equivalente al precedente. Allo scopo è sufficiente dimostrare, come vedremo, che in ogni blocking set S, di 6 punti, esistono necessariamente due rette 3-secanti le quali si incontrano in S. Poichè S è irriducibile, in quanto non esistono blocking set con 5 punti, fissato un suo qualsiasi punto O_3 per esso passa almeno una tangente . Per O_3 non possono passare 2 tangenti in quanto i rimanenti 5 punti di S dovrebbero appartenere alle altre due rette per O_3 e ciò è assurdo perchè S conterrebbe una retta. Dunque ciascuna retta per O_3, diversa dalla tangente , contiene almeno un punto di S, distinto da O_3, e almeno un punto del complementare di S. I due rimanenti punti di S, allora, appartengono necessariamente a due rette distinte per O_3 che risultano così trisecanti. Se si assume un riferimento proiettivo con i punti O_1 e O_2 coincidenti con i punti delle trisecanti esterni ad S (6) e se si fissa il punto U_3 (e di conseguenza il punto unità) coincidente con il punto di S (6) appartenente alla retta per O_3 non trisecante , si ottiene, come subito si verifica, il blocking set dell'esempio precedente.

Si prova, cfr [3], il seguente:

TEOREMA DI MAZZOCCA - TALLINI. Esiste un intero $b_p(q)$ tale che, per ogni $r > b_p(q)$ in PG (r,q) non esistono blocking set ed in PG $(b_p(q),q)$ ne esistono.

Per le prop. VIII e IX risulta:

$$b_p(2) = 1, \qquad b_p(3) \geqslant 2. \tag{4.2}$$

Si ha:

X.- In PG $(2,q)$ con $q \geqslant 3$, esistono sempre blocking sets.

Dimostrazione.- Per ogni $q \geqslant 3$ diamo vari esempi di blocking sets.

a) Siano O_1, O_2, O_3 tre punti indipendenti di PG $(2,q)$. L'insieme S costituito da :

$$S = \left[PG(2,q) - \left\{ O_1O_2 \cup O_2O_3 \cup O_3O_1 \right\} \right] \cup \left\{ O_1, O_2, O_3 \right\}$$

é, come subito si verifica, un blocking set con

$$|S| = q^2 - 2q + 4.$$

Il complementare di S é un blocking set irriducibile.

b) Sia C una conica, T un suo punto e t la tan= gente in T a C. Allora

$$S = C \cup t - \{T\}$$

è un blocking set con $|S| = 2q$, di tipo (1,2,3,q) ri= spetto alle rette. Esso è irriducibile.

c) Se q è dispari i punti esterni ad una conica C costituiscono un insieme di tipo $\left(\frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}, q\right)$

e quindi un blocking set S con $|S| = \binom{q+1}{2} = \frac{q(q+1)}{2}$.

d) Se q è un quadrato, una forma hermitiana di PG(2,q) e un subpiano di Baer, costituiscono, rispet= tivamente , esempi di blocking set S con

$$|S| = q\sqrt{q} + 1 \quad \text{oppure} \quad |S| = q + \sqrt{q} + 1.$$

Essi sono irriducibili.

e) L'insieme dei punti dei lati di un triangolo, esclusi due dei tre vertici, come subito si prova, è, in PG (2,q), un blocking set con 3 q − 2 punti.

Dalla prop. X segue che:

(4.3) $$q \geqslant 3 \Longrightarrow b_p(q) \geqslant 2.$$

Proviamo che:

XI.- <u>In</u> PG(r,3) <u>non esistono blocking sets per</u> r$\geqslant$3, <u>onde è</u>

(4.4) $$b_p(3) = 2$$

<u>Dimostrazione</u>.- E' sufficiente provare, in forza della prop.V, che in PG (3,3) non esistono blocking sets. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un blocking set S in PG (3,3). Ogni pia no, per la prop. V, incontra S in un blocking set e quindi, per la prop. IX, S è di tipo $(6,7)_2$ rispet= to ai piani. Siano t_6, t_7 i caratteri di S rispetto ai piani. Si ha:

(4.5) $$\begin{cases} t_6 + t_7 = \theta_3 = 40 \\ 6\, t_6 + 7\, t_7 = |S|\, \theta_2 = 13\,|S| \\ 30\, t_6 + 42\, t_7 = 4\,|S|\,(\,|S| - 1\,). \end{cases}$$

Da $(4.5)_I$, $(4.5)_{II}$ si ha:

(4.6) $$\begin{cases} t_6 = 280 - 13\,|S| \\ t_7 = 13\,|S| - 240, \end{cases}$$

che, sostituite in $(4.5)_{III}$, danno

(4.7) $$|S|^2 - 40\,|S| + 420 = 0$$

Poichè la (4.7) non ha radici reali si ha l'assurdo e quindi l'asserto.

Osserviamo che in PG (2,4) un blocking set S è tale che $7 \leqslant |S| \leqslant 14$, inoltre dalla dimostrazione della prop. X, segue che per ogni $|S|$ soddisfacente alla suddetta limitazione esistono blocking sets.

XII.- <u>In</u> PG(3,q) <u>con</u> q <u>pari e</u> q>4 <u>esistono blocking</u> sets, onde:

(4.8) $\quad q > 4, \quad q \text{ pari} \Longrightarrow b_p(q) \geq 3$

<u>Dimostrazione</u>.- Diamo un esempio di blocking set in PG (3,q) con $q > 4$ e q pari. Sia $\mathcal{C}$ un (q+2) - arco di un piano Π ed O_1, O_2, O_3 tre suoi punti. Scelto un punto O_4 non appartenente a Π, si consideri il cono Γ proiettante da O_4 il (q+2) - arco $\mathcal{C}$. Si consideri il sottinsieme K costituito da:

a) i punti di Π non sulle rette O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 con l'aggiunta dei punti O_1, O_2, O_3;

b) i punti di Γ esclusi quelli delle rette O_iO_4 (i= 1,2,3), con l'aggiunta di O_1, O_2, O_3;

c) i punti dei piani $O_1O_2O_4$, $O_2O_3O_4$, $O_3O_1O_4$ privati dei punti, precedentemente esclusi, delle rette spigoli del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$;

si ponga cioè:

$$K = \Big[\Gamma \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3 \cup \Pi_4 - (O_1O_2 \cup O_2O_3 \cup O_3O_1 \cup$$

$$\cup\, O_4O_1 \cup O_4O_2 \cup O_4O_3)\Big] \cup \{O_1, O_2, O_3\},$$

ove Π_i è la faccia del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ opposta al vertice O_i.

Proviamo che, se $q > 4$, K è un blocking set. Cominciamo ad osservare che nessuna retta può appartenere a K: ciò è evidente per le rette delle facce del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ e per le rette del cono; le altre rette hanno in comune con K non più di sei punti onde, essendo $q \geq 8$, nessuna di tali rette può appartenere a K. Inoltre ogni retta ha in comune qualche punto con K: ciò è evidente per le rette delle facce del tetraedro, quelle del cono ed anche per le rette che incontrano le facce del tetraedro in punti non sugli spigoli: se poi l è una retta appoggiata agli spigoli O_1O_2, O_3O_4 (e non passa per O_4) il piano determinato da O_3O_4 e da l contiene una retta l' di Γ, onde $l' - \{O_4\}$ è contenuto in K e quindi $l \cap l' \in K$. Analogamente si ragiona per le coppie di spigoli O_2O_3, O_1O_4 e O_3O_1, O_2O_4. Ne segue l'asserto.

XIII.- <u>In</u> PG(3,q), <u>con</u> q <u>dispari e</u> q≥7, <u>esistono blocking sets, onde</u>:

(4.9) $\quad q \geq 7, \quad q \text{ dispari} \Longrightarrow b_p(q) \geq 3.$

<u>Dimostrazione</u>.- Diamo un esempio di blocking set in PG (3,q), con q dispari e $q \geq 7$. Sia Π un piano di PG (3,q), $\mathcal{C}$ una sua conica, O_1, O_2, O_3 tre punti di $\mathcal{C}$ e siano rispettivamente t_1, t_2, t_3, le tangenti a $\mathcal{C}$ in tali punti. Sia $T_1 = t_2 \cap t_3$, $T_2 = t_1 \cap t_3$, $T_3 = t_1 \cap t_2$. Si consideri l'insieme K costituito da:

a) i punti di Π non sulle rette O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1, ma con l'aggiunta dei punti O_1, O_2, O_3;

b) i punti del cono Γ proiettante da un punto O_4, non appartenente a Π, l'insieme $(\mathcal{C} \cup \{T_1, T_2, T_3\}) - \{O_1, O_2, O_3\}$ privato del vertice O_4;

c) i punti dei piani $O_1O_2O_4$, $O_1O_3O_4$, $O_2O_3O_4$, privati degli spigoli del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ ma con l'aggiunta dei punti O_1, O_2, O_3.

Si prova subito, in analogia con quanto visto nella dimostrazione della prop. XII, che K è un blocking set. Si ha così l'asserto.

5.– BLOCKING SETS, RISPETTO ALLE RETTE, IN AG(r,q)

Sia AG (r,q) uno spazio affine di Galois di dimensione r e ordine q. Si definisce <u>blocking set</u> rispetto alle rette di AG(r,q) un sottoinsieme S di AG(r,q) che soddisfi alle seguenti condizioni:

i) ogni retta di AG (r,q) ha intersezione non vuota con S,

ii) S non contiene rette di AG (r,q).

Il teorema di Mazzocca-Tallini sussiste anche nel caso affine, più precisamente, per ogni q, esiste un intero $b_a(q)$ tale che in $AG(b_a(q),q)$ esistono blocking sets, mentre in AG(r,q) con $r > b_a(q)$, non ne esistono.

Si prova subito che:

XIV.– <u>Sia</u> S_{r-1} <u>un iperpiano di</u> PG(r,q). <u>Se</u> $\mathcal{K}$ <u>è un blocking set di</u> $AG(r,q)=PG(r,q)-S_{r-1}$, <u>e</u> $\mathcal{K}_o$ <u>è un blocking set di</u> S_{r-1}, <u>allora</u> $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_o$ <u>è un blocking set di</u> PG(r,q).

Proviamo che:

XV.– <u>Denotato con</u> b_p (q) <u>il massimo valore di</u> r <u>per cui in</u> PG (r,q) <u>esista un blocking set (cfr.n.4)</u>, <u>risulta</u> :

$$b_a(q) \leq b_p(q). \tag{5.1}$$

<u>Dimostrazione</u>.– Supponiamo, per assurdo, che sia $b_a(q) > b_p(q)$. Si consideri in PG $(b_p(q)+1,q)$ un iperpiano $S_{b_p(q)} = PG(b_p(q),q)$ e sia $\mathcal{K}'$ un blocking set di $S_{b_p(q)}$. In $AG(b_p(q)+1,q) = PG(b_p(q)+1,q) - S_{b_p(q)}$, esiste un blocking set $\mathcal{K}$ in quanto $b_p(q)+1 \leq b_a(q)$ onde,

cfr. prop.XIV, $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$ è un blocking set di PG $(b_p(q)+1,q)$ e ciò è assurdo perchè $b_p(q)+1 > b_p(q)$, onde l'asserto.

Si prova subito che:

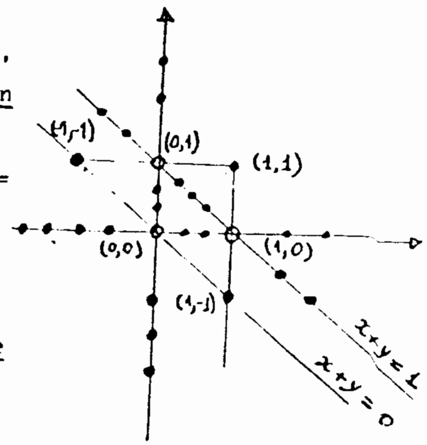
XVI.– <u>In</u> AG (2,q) <u>con</u> q = 2,3 <u>non esistono blocking sets, onde</u>:

$$b_a(2) = 1, \qquad b_a(3) = 1. \tag{5.2}$$

Proviamo che:

XVII.– <u>In</u> AG (2,q), <u>con</u> $q \geq 5$, <u>esistono blocking sets</u>.–

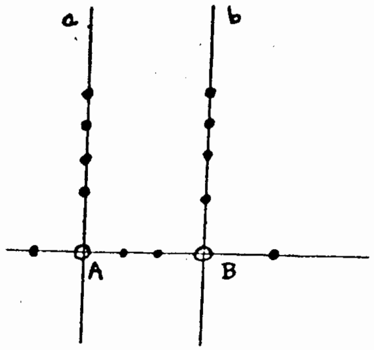
<u>Dimostrazione</u>.– L'esistenza è provata dall'esempio seguente. Nel piano $AG(2,q)=(GF(q))^2$ di coordinate (x,y) si consideri l'insieme $\mathcal{K}$ costituito dai punti degli assi x e y e della retta x + y = 1, esclusi i punti (0,0), (0,1), (1,0) ed inoltre dai punti (1,1), (-1,1), (1,-1). Esso è un (3q-3)-insieme se q è dispari ed un (3q-5)-insieme se q è pari che, se q > 4, è un blocking set, come subito si prova. Se q = 4 si ha un insieme di 7 punti che, come subito si verifica, non è un blocking set in quanto contiene, ad esempio, la retta y = ix + i + 1 (essendo <u>i</u> tale che $i^2+i+1=0$).



XVIII.– <u>In</u> AG (2,q) <u>con</u> $q \geq 4$ <u>esistono blocking sets</u>.

<u>Dimostrazione</u>.– L'esistenza è provata dall'esem=

pio seguente. Siano a e b due rette parallele ed $A\in a$, $B\in b$. Se poniamo $K = (a-\{A\})\cup(b-\{B\})\cup(AB-\{A,B\})$, K è un blocking set con $k = 3q-4$. Dalle prop. XVII, XVIII segue che:



(5.3) $$b_a(q) \geq 2 \quad \text{per } q \geq 4.$$

XIX.- <u>In</u> AG (2,4) <u>ogni blocking set ha</u> 8 <u>punti</u>.

<u>Dimostrazione</u>.- Sia K un blocking set di AG(2,4). K è un insieme di classe [1,2,3] : risulta $t_3 \neq 0$ (altrimenti K sarebbe un arco e un arco ammette sempre rette esterne), inoltre e $t_1 \neq 0$, perchè anche il complementare di K (essendo un blocking set) deve avere trisecanti.

Posto $k = |K|$ dalle (2.9),(2.10) si ha

$$k^2-16k+60 \leq 0 \Longrightarrow 6 \leq k \leq 10$$

e

$$k = 6 \quad \text{o} \quad k = 10 \Longleftrightarrow k \text{ è di tipo } (1,3).$$

Risulta poi:

$$k = 6 \Longleftrightarrow |CK| = 10 \quad (K \text{ di tipo } (1,3))$$

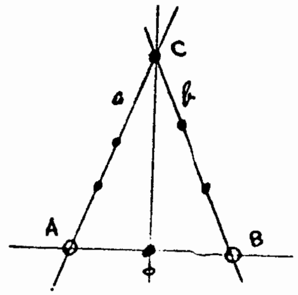
$$k = 7 \Longleftrightarrow |CK| = 9 \quad (K \text{ di tipo } (1,2,3))$$

$$k = 8 \Longleftrightarrow |CK| = 8 \quad (K \text{ di tipo } (1,2,3)).$$

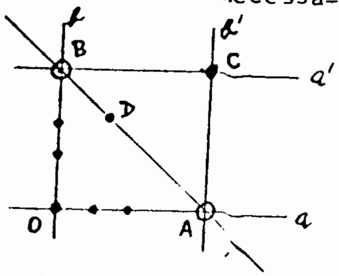
Quindi, pur di passare al complementare, possiamo supporre $k = 6,7,8$. Si ha:

(5.4) $$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 20 \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 5\cdot k \\ t_2 + 3t_3 = k(k-1)/2. \end{cases}$$

Dalle (5.4) se <u>$k = 6$</u> si ha: $t_3 = 5$, $t_2 = 0$, $t_1 = 15$. Scelte allora due rette 3-secanti a, b, esse devono incontrarsi necessariamente in un punto di K (altrimenti una qualsiasi retta passante per il loro punto di intersezione proprio o improprio sarebbe esterna a K) e quindi, essendo $k = 6$, K è costituito dai 5 punti delle due 3-secanti, a, b, e da un altro punto P che deve appartenere alla retta AB, ove $\{A\} = a-K$, $\{B\} = b-K$ Posto $C = a\cap b$, la retta CP è una 2-secante K e ciò è escluso, essendo $t_2 = 0$, onde $k=6$ conduce all'assurdo.



Dalle (4.13) se <u>$k = 7$</u> si ha: $t_3=6$, $t_2=3$, $t_1=11$. Considero due rette 3-secanti a, b. Esse devono necessariamente intersecarsi in un punto O di K. Siano $A = a-K$, $B = b-K$, a' la retta per B parallela ad a, b' la retta per A parallela a b, sia poi $C = a'\cap b'$. Poichè $k = 7$ e 5 punti di K sono su $a\cup b$, degli altri due punti uno, D, deve appartenere alla AB e l'altro deve stare su a' e su b' cioè deve essere il punto C . La retta CD è diversa dalla retta a', b' e anche dalla OC (perchè OC e AB sono parallele in quanto è sempre possibile fissare un riferimento affine nel quale sia O(0,0), A (1,0), B(0,1), C(1,1), ne segue che AB ha equazione $x+y=1$ e OB ha equazione $x-y=x+y=0$) quindi la CD incontra a e b in due punti distinti tra loro e da A e B, cioè in due punti di K, onde la CD è tutta contenuta in K, ne segue che K non è un blocking set, contro l'ipotesi, onde $k = 7$ conduce anche all'assurdo.



Infine se <u>$k = 8$</u> l'esistenza di blocking sets è assicurata dall'esempio contenuto nella dimostrazione della prop. XVIII.

Dalla proposizione XIX segue;

XX.- <u>In</u> AG (r,4), $r \geq 3$, <u>non esistono blocking sets e quindi</u>:

$$b_a(4) = 2. \tag{5.5}$$

<u>Dimostrazione</u>.- Se ne esistesse uno, K, esso sarebbe intersecato da ogni piano α in un blocking set e quindi, per la prop. XIX, sarebbe $|\alpha \cap K| = 8$, onde K sarebbe ad un sol carattere rispetto ai piani e allora sarebbe $K = \emptyset$ ovvero $K = AG(r,4)$ e ciò è assurdo.

Proviamo ora che:

XXI.- <u>Se in</u> AG (r,q) <u>esiste un blocking set</u> K <u>tale che ogni retta abbia almeno due punti in comune con</u> K <u>e due punti non in</u> K, <u>allora in</u> AG (r+1,q) <u>esiste un blocking set. Ne segue che in</u> $AG(b_a(q),q)$ <u>ogni blocking set è tale che</u> $t_1 \neq 0$ <u>ovvero</u> $t_{q-1} \neq 0$.

<u>Dimostrazione</u>.- In AG (r+1,q) si consideri un iperpiano $\pi = AG(r,q)$ e in π un blocking set K, con $t_1=0$ e $t_{q-1} = 0$. Per ogni $P \in \pi - K$, si consideri la retta l_P, per P, parallela ad una fissata direzione δ, con δ non parallela a π. Si consideri l'insieme

$$K' = K \cup \left(\bigcup_{P \in \pi - K} (l_P - \{P\}) \right).$$

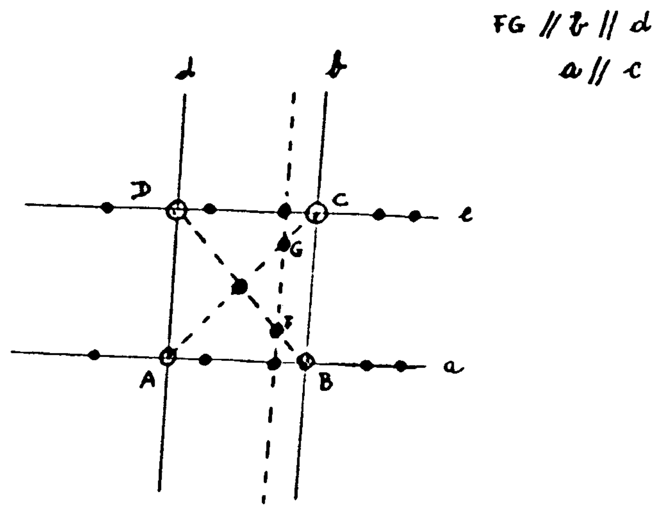
Proviamo che K' è un blocking set. Ogni retta avente la direzione δ incontra sia K' che il complementare di K' in almeno un punto. Sia s una retta qualsiasi di AG(r+1,q), non parallela a δ e sia α il piano per s parallelo a δ. Evidentemente α non è parallelo a π ed incontra π in

una retta s'. La s' incontra il complementare di K nei punti $P_1, P_2, \ldots, P_t$ e K nei rimanenti $Q_{t+1}, \ldots, Q_q$, con $2 \leq t \leq q-2$. Si ha allora

$$K' \cap \alpha = \{Q_{t+1}, \ldots, Q_q\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{t} l_{P_i}\right)$$

onde, essendo $2 \leq t \leq q-2$, $K' \cap \alpha$ è un blocking set di α e quindi s ($\subset \alpha$) incontra sia K' che il suo complementare in un punto, cioè K' è un bloching set di AG (r+1,q), onde l'asserto.

In AG (2,q) con $q \geq 7$ un esempio di blocking set K con $t_1 = 0$ e $t_{q-1} = 0$ è quello schematizzato in figura.



$$K = a \cup b \cup c \cup d \cup \{E,F,G\} - \{A,B,C,D\}$$

Ne segue, per la proposizione precedente, che:

$$b_a(q) \geq 3 \quad \text{per } q \geq 7. \tag{5.6}$$

Dalle (5.6) e (5.1) seguono di nuovo le (4.8), (4.9).

6.– UNA CARATTERIZZAZIONE DEGLI ARCHI HERMITIANI

In [5] (cfr. 4) ho dato una caratterizzazione degli archi hermitiani che qui riportiamo per completezza. Essa generalizza un risultato di Bruen e Thas relativo ai blocking sets irriducibili cfr. [2] n.2.

Sia S un s-insieme di Π_q, piano proiettivo d'ordine q (desarguesiano o no), che abbia il carattere $t_0=0$ e tale che $t_1 \geq |S|$, per esempio un qualsiasi blocking set irriducibile di Π_q. I caratteri di S soddisfano allora alle (1.7), ove n denota al solito il massimo numero di punti che una retta ha in comune con S. Moltiplicando la $(1.7)_I$ per n e sottraendo da essa la $(1.7)_{II}$, si ottiene (essendo $|S|=s$:

$$(6.1) \qquad \sum_{i=2}^{n-1}(n-i)t_i = n(q^2+q+1)-s(q+1)-(n-1)t_1 .$$

Il primo membro di (6.1) è ≥ 0 ed è $=0$ se, e solo se, risulta $t_2=\cdots=t_{n-2}=0$, cioè se, e solo se, S è di tipo (1,n). Ne segue che è

$$(6.2) \qquad t_1 \leq n(q^2+q+1)-s(q+1)/(n-1),$$

il segno = avendosi se, e solo se, S è di tipo (1,n). Poichè si suppone $t_1 \geq s$, da ciò e da (6.2) si ha:

$$(6.3) \qquad s \leq n(q^2+q+1)/(q+n),$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, $s=t_1$ e vale il segno = in (6.2) e quindi S è di tipo (1,n). Ma allora dal sistema (1.7) si ha:

$$t_n = q^2+q+1-s = sq/n = s(s-1)/n(n-1),$$

da cui si ottiene $s=q\sqrt{q}+1$, $n=\sqrt{q}+1$, cioè S è un $(q\sqrt{q}+1)$-insieme di tipo $(1,\sqrt{q}+1)$ ossia un arco hermitiano. Si è così provato che:

XXI.– Sia S un s-insieme di Π_q privo di rette esterne e tale che il numero t_1 delle tangenti sia maggiore o uguale alla cardinalità s dell'insieme. Allora risulta (denotando con n il massimo numero di punti che S ha in comune con

una retta):

$$(6.4) \qquad s \leq n(q^2+q+1)/(q+n)$$

il segno di uguaglianza avendosi se, é solo se, S è un arco hermitiano.

Poichè, come subito si prova, si ha:

$$(6.5) \qquad n(q^2+q+1)/(q+n) \leq q\sqrt{q}+1 \Leftrightarrow n \leq \sqrt{q}+1,$$

dalla proposizione XXI si ottiene:

XXII.– Sia S un s-insieme di PG(2,q) privo di rette esterne e tale che $s \leq t_1$ ed $n \leq \sqrt{q}+1$. Allora risulta:

$$(6.6) \qquad s \leq q\sqrt{q}+1$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, S è un arco hermitiano.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bruen: Blocking sets in finite projective planes, Siam J. Appl. Math.vol.21. N 3 (1971).

[2] A. Bruen, A. Thas: Blocking sets. Geometriae Dedicata 6 (1977), 193-203.

[3] F. Mazzocca, G Tallini: On the exstence of blocking sets in PG(n,q) and AG(n,q) for all large enough n, (in corso di stampa).

[4] G. Tallini: Problemi e risultati sulle geometrie di Galois, Relazione n.30, Istituto Mat. Univ. Napoli 1973.

[5] G. Tallini : Fibrazioni in rette di PG(r,q), Quaderno Sem. Geom. Combin. n.37, Novembre 1981, Ist. Matem. Univ. Roma.

[6] G. Tallini: Fibrazioni in rette di PG(r,q), Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica- Univ. de L'Aquila- Dicembre 1981.

[7] M. Tallini Scafati: Sui {k,n}- archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri, Rend. Acc. Naz. Lincei, 8 40 (1966), 812-818; 1020-1025.

Finito di stampare nel mese di giugno 1983
- L'Aquila -