UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

GIUSEPPE TALLINI

I k-insiemi di rette di PG(d,q) studiati rispetto ai fasci di rette

Parte I

Appunti redatti da P.M.Lo Re

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini
N. 28 - Giugno 1980

Istituto Matematico « Guido Castelnuovo »
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

I k-insiemi di rette di uno spazio di Galois studiati rispetto ai fasci di rette.

G. Tallini (Roma)

Conferenza tenuta a Napoli nel maggio 1980 redatta dalla dott. P.M. Lo Re

1. Introduzione

Da una decina di anni diversi autori si sono interessati di certi sottoinsiemi di rette di uno spazio proiettivo e precisamente, ad es., dei sistemi rigati, quadragoni di Tits, n goni generalizzati, geometrie parziali e semi parziali, fibrazioni di rette, ecc. E' sorta quindi l'esigenza di uno studio sistematico degli insiemi di rette di uno spazio proiettivo rispetto alle famiglie notevoli (es. i fasci, le s-stelle) o, equivalentemente, dei k-insiemi di punti della corrispondente grassmanniana delle rette rispetto ai suoi spazi subordinati. Si possono così chiarire e ridimostrare questioni già note e ottenere risultati nuovi e porre una serie di interessanti problemi al riguardo. Un'impostazione da questo punto di vista è stata già data dall'Autore (cfr.[2]). Nella presente conferenza si fa uno studio sistematico dei k insiemi di rette di uno spazio proiettivo rispetto ai fasci di rette. In successivi lavori saranno trattati i k insiemi di rette di uno spazio proiettivo rispetto alle stelle di rette, ai piani rigati e ai coni tangenti alla grassmanniana.

2. Generalità sulla grassmanniana delle rette di PG(d,q)

Riprendiamo innanzitutto la nozione di grassmanniana delle rette di uno spazio proiettivo, con particolare riguardo al caso degli spazi di Galois

Sia PG(d q) uno spazio di Galois di ordine q ed $\mathcal{L}$ la famiglia delle sue rette. Ad una retta r restano associate le sue coordinate pluckriane $p_{ij} = y_i z_j - y_j z_i$, definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, dove $y = (y_i)$ e $z = z(i)$ sono due punti di r, con $p_{ij} = p_{ji}$ e $p_{ii} = 0$. Le p_{ij} dipendono solo dalla retta r, nel senso che se y′ e z′ sono altri due punti sulla retta, indicando con p'_{ij} le coordinate relative a questi, risulta $p'_{ij} = \lambda p_{ij}$ con $\lambda \neq 0$. Quindi la retta può essere vista come un punto dello spazio di Galois PG$\left(\binom{d+1}{2}-1, q\right)$ avente le p_{ij} $(i<j)$ come coordinate. Al varia-

re della retta il punto corrispondente varia, come è noto, descrivendo una varietà che è detta **varietà grassmanniana** delle rette di PG(d,q) e denotata con $\mathcal{G}_{d,q}$. Tale varietà ha equazioni

$$\begin{cases} p_{i_0 i_1} p_{i_2 i_3} + p_{i_0 i_2} p_{i_3 i_1} + p_{i_0 i_3} p_{i_1 i_2} = 0, \\ \text{con } i_0 < i_1 < i_2 < i_3 \,,\; i_j \in \{0,\dots,d\}. \end{cases}$$

Dunque la grassmanniana è intersezione di quadriche e quindi ogni retta dello spazio ambiente che abbia più di due punti in comune con essa vi appartiene per intero, cioè $\mathcal{G}_{d,q}$ è un insieme di tipo $(0,1,2,q+1)_1$.

Esiste quindi una biezione tra l'insieme delle rette del nostro spazio e i punti di $\mathcal{G}_{d,q}$; sia $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G}_{d,q}$.

Si dimostra facilmente che, se due rette p e q sono incidenti, i punti corrispondenti su $\mathcal{G}_{d,q}$ sono tali che la retta per essi appartiene per intero alla grassmanniana, e viceversa.

Inoltre un fascio di rette viene mutato dalla ρ in una retta della grassmanniana e viceversa, fissata una retta su $\mathcal{G}_{d,q}$, questa proviene da un fascio di rette di PG(d,q).

Consideriamo ora una stella di rette h-dimensionale (cioè la totalità delle rette di un S_{h+1} passanti per un suo punto); questa viene mutata dalla ρ in un insieme di punti su $\mathcal{G}_{d,q}$, T_h, tale che, se due punti vi appartengono, allora vi appartiene tutta la retta per essi (infatti se due rette appartengono alla stella, il fascio da esse individuato è tutto contenuto nella stella). Quindi T_h risulta essere uno spazio lineare, che è omografico alla stella.

Consideriamo infine un piano rigato; il suo corrispondente sarà un insieme di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ che gode ancora della proprietà caratteristica dei sottospazi per cui risulta essere un piano, π, omografico al piano rigato di partenza.

Viceversa, se consideriamo uno spazio lineare T_h contenuto in $\mathcal{G}_{d,q}$, questo deve provenire da un insieme di rette dello spazio ambiente che sono a due a due incidenti. Prese allora due di queste rette, se ogni altra retta dell'insieme passa per il loro punto di intersezione, l'insieme stesso è una stella di dimensione h; se invece esiste una retta che non passa per il punto di intersezione, essa sarà incidente alle due rette date in punti distinti, ma allora ogni altra retta dell' insieme, dovendo incidere le tre rette, deve appartenere al piano da esse determinato e quindi l'insieme è un piano rigato.

Gli spazi lineari del tipo T_{d-1} e π sono massimali in $\mathcal{G}_{d,q}$ nel senso che non sono contenuti propriamente in nessuno spazio di dimensione maggiore per cui sulla grassmanniana esistono due famiglie di spazi lineari massimali, siano Σ_{d-1}, la famiglia delle stelle d-1-dimensionali, e $\mathcal{G}$ quella dei piani.

Denotiamo con Σ_h, $(1\leq h\leq d-1)$, la famiglia degli spazi lineari di dimensione h su $\mathcal{G}_{d,q}$ immagini delle stelle h-dimensionali, con $\mathcal{P}$ la famiglia dei piani di $\mathcal{G}_{d,q}$, immagini dei piani rigati, e con $\mathcal{T}=\{T_P\}_{P\in\mathcal{G}_{d,q}}$ la famiglia dei coni tangenti a $\mathcal{G}_{d,q}$, ciascuno essendo l'insieme delle rette della grassmanniana passanti per un suo fissato punto P. Osserviamo a questo proposito che poiché in PG(d,q) il gruppo delle omografie è transitivo sulle coppie di rette, e ogni omografia dello spazio si muta in una della grassmanniana che la muta, in sè il gruppo delle omografie della grassmanniana è transitivo sulle coppie di punti, cioè fissati comunque due punti su $\mathcal{G}_{d,q}$, esiste sempre un'omografia che li muta l'uno nell'altro; ne segue che la grassmanniana è "omogenea" cioè tutti i suoi punti sono semplici, per cui in ogni suo punto P esiste lo spazio tangente che intersecato con $\mathcal{G}_{d,q}$ dà proprio il cono tangente T_P. Inoltre fissato il punto $P\in\mathcal{G}_{d,q}$ sia $Q\in T_P$: la retta PQ appartiene allora per intero alla grassmanniana, per come è stato definito T_P e cioè, nello spazio PG(d,q), la retta p incide la retta q. Viceversa, se una retta q' incide p, il punto Q' è tale che la retta PQ' appartiene a $\mathcal{G}_{d,q}$, per cui $Q' \in T_p$. Quindi il cono tagente T_p rappresenta, nello spazio $PG(d,q)$, l'insieme delle rette incidenti la retta p.

Da quanto detto si ha che la grassmanniana delle rette di $PG(d,q)$ è uno spazio parziale proprio di rette irriducibile $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ soddisfacente alle seguenti proprietà:

A_1.– Dati tre punti a due a due congiungibili esiste un sottospazio che li contiene.

A_2.– Nessuna retta è massimale, inoltre esistono due famiglie Σ e $\mathcal{P}$ di sottospazi massimali di $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ tali che ogni spazio massimale appartenga a Σ o a $\mathcal{P}$ ed inoltre si abbia:

(I) $T, T' \in \Sigma,\ T \neq T' \Longrightarrow |T \cap T'| = 1$,

(II) $T \in \Sigma, \pi \in \mathcal{P} \Longrightarrow T \cap \pi = \emptyset$ **ovvero** $T \cap \pi \in \mathcal{R}$,

(III) $\forall r \in \mathcal{R}, \exists!\, T \in \Sigma, \exists!\, \pi \in \mathcal{P} : r \leq T$ **e** $r \leq \pi$.

Le proprieta A_1 e A_2 sono atte a caratterizzare la grassmanniana delle rette di $PG(d,q)$ in quanto si può provare che (cfr [4])

I.– Ogni spazio parziale di rette proprio, irriducibile, finito soddisfacente agli assiomi A_1, A_2 è isomorfo alla varietà grassmanniana delle rette di uno spazio di Galois.

3 La geometria delle rette dello spazio PG(d,q).

Sia K un k-insieme di rette dello spazio PG(d,q), cioe un sottoinsieme di k punti di $\mathcal{G}_{d,q}$; K puo essere studiato su $\mathcal{G}_{d,q}$ rispetto agli spazi subordinati prima evidenziati, in modo sistematico. Fisseremo ora le idee sulla famiglia Σ_1 delle rette della grassmanniana, corrispondenti ai fasci di rette dello spazio. I risultati si possono poi generalizzare agli altri spazi

Diremo **carattere** di K di indice s e in dimensione 1 il numero τ_s^1 delle rette di $\mathcal{G}_{d,q}$ ciascuna delle quali ha s punti in comune con K. Così, τ_0^1 è il numero delle rette esterne a K, τ_1^1 e il numero delle rette che hanno un sol punto in comune con K, e cosi via fino a τ_{q+1}^1 che è il numero delle rette contenute in K. Quindi risulta $0 \leq s \leq q+1$. Nello spazio ambiente K e un insieme di rette e τ_0^1 rappresenta il numero di fasci di rette ciascuno dei quali non contiene rette di K, τ_1^1, il numero dei fasci ciascuno dei quali contiene una sola retta di K, e infine τ_{q+1}^1, il numero dei fasci tutti formati da rette di K.

Fissati poi gli interi $0 \leq m_1 < m_2 < \dots m_\ell = q+1$ si dirà che K e di **classe** $[m_1, m_2, \dots, m_\ell]_1$ se risulta $\tau_s^1 = 0$ $\forall\, s \neq m_1, m_2, \dots m_\ell$ cioè se ogni fascio di rette ha in comune con K m_1 rette , oppure $m_1, \dots m_\ell$. Diremo che K è di tipo $(m_1, m_2, \dots m_\ell)_1$ se è di classe $[m_1, m_2, \dots m_\ell]_1$ e se inoltre risulta $\tau^1_{m_i} \neq 0$ per $i=1,2,\dots \ell$. Si dirà poi che K è a ℓ caratteri se esattamente ℓ dei suoi caratteri sono diversi da zero

In ordine di difficoltà crescente lo studio dei k-insiemi procede sul numero dei caratteri diversi da zero.

Proviamo che:

I. K a un sol carattere rispetto alle rette $\Longleftrightarrow$ $K=\emptyset$ oppure $K=\mathcal{G}_{d,q}$.

Dimostrazione . Sia K di tipo $(n)_1$; consideriamo un qualunque $T_{d-1} \in \Sigma_{d-1}$ e intersechiamolo con K ; si ha $T_{d-1} \cap K=K'$ e K' è di tipo $(n)_1$ rispetto alle rette di T_{d-1}. Quindi K' è un sottoinsieme di uno spazio proiettivo che è intersecato da ogni retta in uno stesso numero n di punti; è noto allora (cfr [2]) che K' o è l'insieme vuoto oppure coincide con T_{d-1}.

Nel primo caso è n=0 e $K=\emptyset$ nel secondo deve essere n=q+1 e quindi $K=\mathcal{G}_{d,q}$, onde l'asserto.

Sia ora K a due caratteri rispetto alle rette , cioè di tipo $(m,n)_1$,con $0 \leq m < n \leq q+1$) per cui in PG(d,q) ogni fascio ha in comune m oppure n rette con la famiglia di rette K. Esamineremo ora i vari casi cominciando dai valori estremali di m ed n Proviamo che :

II. **Un k-insieme K di tipo $(0,q+1)_1$ non esiste.**

Dimostrazione Sia per assurdo K di tipo $(0,q+1)_1$. Consideriamo un qualunque $T_{d-1}\in\Sigma_{d-1}$ e intersechiamolo con K; otteniamo $T^{1}_{d-1}\cap K=K'\subseteq T_{d-1}$. Ogni retta di T_{d-1} interseca K' o in 0 oppure in q+1 punti per cui K' è di classe $[0,q+1]_1$. Possono allora presentarsi tre casi: K' di tipo $(0)_1$, e quindi $K'=\emptyset$, oppure K' di tipo $(q+1)_1$ e quindi $K'=T_{d-1}$, o infine K' di tipo $(0,q+1)_1$. Si vede subito che quest'ultimo caso è assurdo dato che in questa ipotesi dovrebbero esistere almeno una retta $r\in T_{d-1}$ esterna K', ed una s, tutta contenuta in K'; presi allora un punto R di r ed uno S di s, la retta RS non sarebbe ne esterna ne contenuta in K'. Supponiamo allora che sia $K'=\emptyset$. Sia $\bar{T}_{d-1}$ un altro elemento di Σ_{d-1}; risulta $\bar{T}_{d-1}\cap K=\emptyset$ dato che con il ragionamento precedente si può affermare che questa intersezione o è vuota oppure coincide con tutto $\bar{T}_{d-1}$, e questo non è possibile nella nostra ipotesi essendo $|T_{d-1}\cap\bar{T}_{d-1}|=1$. Quindi tutti gli spazi T hanno intersezione vuota con K, per cui deve essere $K=\emptyset$ e questo è assurdo, essendo K di tipo $(0,q+1)_1$. Infine, se $K'=T_{d-1}$, se ne conclude con ragionamento analogo che è $K=\mathcal{G}_{d,q}$ e anche questo è impossibile, essendo K di tipo $(0,q+1)_1$, onde l'asserto.

Ricordiamo che fissata nello spazio una polarità nulla, preso un qualunque punto P il suo iperpiano polare lo contiene; si possono allora considerare le rette per P appartenenti al suo spazio polare. Al variare di P, le rette variano e descrivono un complesso lineare di rette; scrivendone le coordinate pluckeriane si vede che il complesso è dato sulla grassmanniana dall'intersezione della $\mathcal{G}_{d,q}$ stessa con un iperpiano. Proviamo ora che:

III._ Un k -insieme di tipo $(0,q)_1$ è il complementare dell'immagine in $\mathcal{G}_{d,q}$ di un complesso lineare di rette di PG(d,q) , e viceversa.

La proposizione III equivale ovviamente alla seguente:

IV Un k-insieme K di tipo $(1,q+1)_1$ è l'immagine in $\mathcal{G}_{d,q}$ di un complesso lineare di rette di PG(d,q).

Dimostrazione. Sia K di tipo $(1,q+1)_1$; consideriamo un qualunque $T_{d-1} \in \Sigma_{d-1}$ e sia $K' = K \cap T_{d-1}$. Sarà K' di classe $[1,q+1]_1$ essendo incluso in K. Esaminiamo i tre casi che si possono presentare: a) K' di tipo $(1)_1$: questo è impossibile perchè K' sarebbe un insieme ad un sol carattere diverso da 0 e da q+1; b) K' di tipo (q+1) ed allora è $K'=T_{d-1}$; c) K' di tipo (1 q+1) in questo caso si ha che presi due punti in K' tutta la retta per essi è contenuta in K' (non potendo essere 1-secante) cioè K' è uno spazio lineare Inoltre K' incontra tutte le rette di T , che non sono in esso contenute, in un punto e quindi è un iperpiano di T_{d-1}, cioe risulta

$K' = T_{d-2}$. Si puo concludere quindi che ogni T_{d-1} o e contenuto in K oppure lo interseca in un T_{d-2}. Consideriamo ora un qualunque piano $\pi \in P$. Con ragionamenti analoghi ai precedenti si ha che o π è contenuto in K, oppure lo interseca in una retta. Interpretiamo ora questi risultati nello spazio ambiente PG(d,q): la famiglia di rette K è tale che ogni piano rigato o appartiene a K, oppure ha in comune con K un solo fascio; inoltre ogni stella di rette o appartiene a K, oppure esiste un iperpiano tale che K ha in comune con la stella le rette contenute in questo iperpiano. Diremo allora che K è **non singolare** se non accade che esiste un punto tale che tutte le rette per esso appartengono a K, cioè se per ogni punto P le rette per P appartenenti a K costituiscono un iperpiano.

Sia K non singolare. Si può allora costruire un' applicazione p che ad ogni punto $P \in PG(d,q)$ associa un iperpiano, quello in cui giacciono tutte le rette per P appartenenti a K. Risulta, $\forall\ P \in PG(d,q)$, $P \in p(P)$. Proveremo ora che la p è biettiva e inoltre che, quando P varia su una retta, l iperpiano p(P) varia descrivendo un fascio di asse un S_{d-2}; ne seguirà che p è una polarità nulla e K un complesso lineare di rette non degenere. Sia dunque P un generico punto di PG(d q) e sia $\pi_P = p(P)$ il suo iperpiano polare. E' chiaro che per ogni punto $P' \notin \pi_P$, risulta $\pi_P \neq \pi_{P'}$, dato che $P' \in \pi_{P'}$. Sia

$P' \in \pi_P$ e supponiamo per assurdo $\pi_{P'} = \pi_P$. Consideriamo un qualsiasi piano per la retta PP' e contenuto in π_P; tutte le rette per P contenute in questo piano appartengono a K e così tutte quelle per P' (essendo il piano contenuto in $\pi_P = \pi_{P'}$) ma allora, per quanto osservato in precedenza, il piano è tutto contenuto in K e quindi tutte le sue rette appartengono a K Lo stesso vale per ogni piano per la retta PP' appartenente a π_P. Sia ora P'' un punto della retta PP'; tutte le rette di π_P per P'', poichè appartengono a piani contenuti in π_P e contenenti PP', devono appartenere a K e quindi risulta $\pi_{P''} = \pi_P$. Ne segue che l iperpiano polare è lo stesso per ogni punto della retta PP'. Sia ora $Q \notin \pi_P$; l'intersezione $\pi_Q \cap \pi_P$ conterrà un punto P'' della retta PP'. Ma allora tra le rette per P'' appartenenti a K c'è anche la retta P''Q, e questo è assurdo, essendo $\pi_{P''} = \pi_P$ e $Q \notin \pi_P$. L'assurdo prova che la p è biettiva.

Proviamo ora che, se P varia descrivendo una retta, l'iperpiano π_P descrive un fascio con asse un S_{d-2}. Supporremo dapprima che la retta r descritta da P sia in K. Siano P e P' due punti distinti su r e π_P, $\pi_{P'}$ i loro iperpiani polari. Questi sono distinti, come si è visto, e quindi si intersecano in un S_{d-2}. Un qualunque piano α per la retta r, contenuto nell' S_{d-2}, è tale che il fascio di rette di centro P su α è tutto contenuto in K, e così il fascio di centro P′ su α, e quindi tutte le rette del piano α sono contenute in K. Ma allora un punto P″ di r è tale che tutte le rette di P″ appartenenti ad α sono in K. Al variare del piano si ha che tutte le rette per P″ appartenenti a S_{d-2} sono in K, per cui $\pi_{P''} \geq S_{d-2}$. Si è così provato che quando P″ varia descivendo r, il suo iperpiano polare varia descrivendo tutto il fascio con asse S_{d-2}.

Supponiamo ora che la retta r descritta da P non sia in K. Siano π_P e $\pi_{P'}$ gli iperpiani polari di due punti di r. Sarà $\pi_P \cap \pi_{P'} = S_{d-2}$ (osserviamo che, poichè $r \notin K$, risulta $S_{d-2} \cap r = \emptyset$). Preso un punto $P'' \in r$, proviamo che $\pi_{P''} \geq S_{d-2}$. Sia $Q \in S_{d-2}$; Q appartiene allora a π_P e $\pi_{P'}$ e di conseguenza P e P′ appartengono a π_Q, per cui la retta r è contenuta in π_Q e quindi $P'' \in \pi_Q$. Ne segue $Q \in \pi_{P''}$ e, per l'arbitrarietà di Q, $S_{d-2} \leq \pi_{P''}$. Viceversa, preso un iperpiano π contenente S_{d-2}, questo interseca la retta r in un punto Q. Risulta allora $\pi_Q = \pi$, dato che $\pi_Q \geq S_{d-2}$ e $\pi_Q \geq Q$, per cui $\pi_Q \geq [S_{d-2} \cup Q] = \pi$. Si ha così l'asserto, nel caso che K sia non singolare.

Nel caso che K sia singolare si ha subito che l'insieme dei punti singolari costituisce un sottospazio S_h di PG(d,q). Fissato un S_{d-h-1} sghembo con l'S_h, ad ogni $P \in S_{d-h-1}$, poichè P è non singolare, rimane associato l'iperpiano polare π_P che passa per S_h e interseca l'S_{d-h-1} in un S_{d-h-2}, cioè in un iperpiano π_P di tale S_{d-h-1}. Con ragionamenti analoghi ai precedenti si ha che la corrispondenza $P \to \pi_P$ è una polarità nulla dell'S_{d-h-1} il cui complesso lineare di rette $\widetilde{K}$ è costituito dalle rette di K che appartengono all'S_{d-h-1}. Inoltre si prova facilmente che per ogni punto Q di $PG(d,q)-S_h$, l'iperpiano polare π_Q coincide con l'iperpiano polare π_P, ove $P=S_{d-h-1}\cap[S_h \cup Q]$, cioe con $[\pi_P \cup S_h]$. Ne segue che K è il complesso lineare di rette degenere che si ottiene proiettando da S_h il complesso lineare $\widetilde{K}$ L asserto è così completamente provato.

Proviamo che :

V._ **Un k-insieme K di tipo $(0,1)_1$ è un insieme di rette a due a due sghembe.**

Dimostrazione Consideriamo un qualunque T_{d-1} e sia $K'=T_{d-1}\cap K$; K' è di tipo $(0)_1$, cioè è $K'=\emptyset$, oppure è di tipo $(0,1)_1$, cioè K' si riduce ad un sol punto. Quindi in ogni stella di rette dello spazio $PG(d,q)$ o c'è una sola retta di K o nessuna, da cui l'asserto.

Relativamente alla proposizione precedente, osserviamo che si possono verificare vari casi e cioè quelli delle fibrazioni complete, parziali, massimali, e si pone il problema della classificazione e dello studio di questi insiemi. Osserviamo che in questo caso K è un insieme di punti della grassmanniana a due a due congiunti da una retta che non vi appartiene, cioè è una calotta di $\mathcal{G}_{d,q}$ tale che la retta per due suoi punti non appartiene a $\mathcal{G}_{d,q}$.

Proviamo ora che:

VI._ In PG(d,q), con $d \geq 4$, non esistono k-insiemi di rette di tipo$(0,n)_1$, con $2 \leq n \leq q-1$. Se $d=3$, se un tale k-insieme K esiste, risulta necessariamente $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n)$ e in ogni stella e in ogni piano rigato o non ci sono rette di K, oppure le rette di K costituiscono il duale di un arco massimale.

Dimostrazione. Sia $d \geq 4$. Consideriamo un qualunque T_{d-1} e sia $K'=T_{d-1} \cap K$. Sarà K' di classe $[0,n]_1$, per cui può essere di tipo $(0)_1$, e in questo caso sarà $K'=\emptyset$, oppure di tipo $(0,n)_1$, ma è noto che non esistono k insiemi di tipo $(0,n)_1$ se $d-1 \geq 3$ (cfr [2]). Resta il solo caso $K'=\emptyset$ che, per l'arbitrarietà di T_{d-1}, comporta $K=\emptyset$ e questo è impossibile essendo K di tipo $(0,n)_1$. Sia ora d=3. Sia T_2 un piano su $\mathcal{G}_{3,q}$ e consideriamo $K'=T_2 \cap K$; sarà K' di tipo $(0)_1$, oppure $(0,n)_1$. Nel primo caso è $K'=\emptyset$; nel secondo K' è un arco massimale e risulta $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$ (cfr. [2]). Si può quindi avere:

$$|K'| = |T_2 \cap K| = \begin{cases} 0 \\ (q+1)(n-1)+1=N \end{cases}$$

L'asserto è così provato.

Osserviamo che, per quel che riguarda l'esistenza di k-insiemi di questo tipo, è noto che per q pari esistono tali archi massimali; per q dispari il problema è aperto, ed è noto solo che per $q=3^h$ e $n=3$, ovvero $n=3^{h-1}$ non ne esistono. Ne segue che :

VII. In PG(3,q), con $q=3^h$, non esistono k-insiemi di rette di tipo $(0,3)_1$ né di tipo $(0,3^{h-1})$.

Riassumiamo qui schematicamente i risultati dimostrati :

(1) K ad un sol carattere $\Longleftrightarrow$ $K=\emptyset$ oppure $K=\mathcal{G}_{d,q}$.

(2) K di tipo $(0,q+1)_1$ $\models\!\Rightarrow$ non esiste.

(3) K di tipo $(0,q)_1$ $\Longleftrightarrow$ K è il complementare dell'immagine in $\mathcal{G}_{d,q}$ di un complesso lineare di rette di PG(d,q).

(4) K di tipo $(0,1)_1$ $\models\!\Rightarrow$ K è un insieme di rette a due a due sghembe.

(5) K di tipo $(0,n)_1$, $2\leq n\leq q-1$ $\models\!\Rightarrow$ {$d\geq 4$: non esistono; $d=3$, $q\equiv 0 \pmod{n}$ }.

Passando ai complementari si hanno anche i seguenti risultati:

(6) K di tipo $(1,q+1)_1$ $\models\!\Rightarrow$ K è l'immagine in $\mathcal{G}_{d,q}$ di un complesso lineare di rette di PG(d,q).

(7) K di tipo $(q,q+1)_1$ $\models\!\Rightarrow$ K complementare di (4).

(8) K di tipo $(m,q+1)_1$, $q-1\geq m\geq 2$ $\models\!\Rightarrow$ K complementare di (5).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. SEGRE, Lectures on modern geometry, Cremonese Ed. Roma (1961).

[2] G. TALLINI, Problemi e risultati sulle geometrie di Galois, Rel.n.30 Ist.Mat.Univ.Napoli (1973).

[3] G. TALLINI, Spazi parziali di rette, spazi polari. Geometrie subimmerse, Quaderni Sem.Geom.Comb.Ist.Mat.Univ.Roma (1979).

[4] G. TALLINI, On the Characterization of the Grassmann Manifold of the lines in the Galois Space, Proc.Conf.Finite Geometries and designs, Univ of Sussex (June 1980), London Mat. Soc.Lecture Note Series, Cambridge U.P., to appear