UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

GIUSEPPE TALLINI

I k-insiemi di rette di PG(d,q) studiati rispetto ai fasci di rette

Parte II

Appunti redatti da A.Venezia

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini
N. 28 Giugno 1980

Istituto Matematico «Guido Castelnuovo»
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

<u>I k-insiemi di rette di PG(d,q) di tipo (0,n) rispetto ai fasci di rette.</u>

G.Tallini (Roma, giugno 1980)

Appunti redatti da A.Venezia

1.–<u>Introduzione</u>.

Siano $PG(d,q)$ uno spazio di Galois di dimensione d e ordine q e $\mathcal{G}_{d,q}$ la varietà grassmaniana rappresentativa delle sue rette. Lo studio dei k-insiemi di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ rispetto alla famiglia Σ_1 delle rette di $\mathcal{G}_{d,q}$ equivale allo studio dei k-insiemi di rette di $PG(d,q)$ rispetto ai fasci di rette.

Sia K un k-insieme di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$. Chiameremo <u>carattere</u> di K rispetto alla famiglia Σ_1 di indice s $(0 \leq s \leq q+1)$ il numero $\mathcal{C}_s^1$ delle rette di $\mathcal{G}_{d,q}$ che incontrano K ciascuna in s punti. Dati gli interi $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_t \leq q+1$ diremo che K è di <u>classe</u> $[m_1, m_2, \dots, m_t]_1$ rispetto alle rette di $\mathcal{G}_{d,q}$ se $\mathcal{C}_s^1 = 0$ per ogni $s \neq m_1, m_2, \dots, m_t$; diremo che K è di <u>tipo</u> $(m_1, m_2, \dots, m_t)_1$ rispetto alle rette di $\mathcal{G}_{d,q}$ se $\mathcal{C}_s^1 = 0$ per ogni $s \neq m_1, m_2, \dots, m_t$ e $\mathcal{C}_{m_1}^1 \neq 0, \mathcal{C}_{m_2}^1 \neq 0, \dots, \mathcal{C}_{m_t}^1 \neq 0$. Diremo infine che K è a t caratteri se esattamente t dei suoi caratteri sono diversi da zero.

I k-insiemi di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ possono studiarsi . . . .

in ordine crescente rispetto al numero dei caratteri non nulli .

Sussistono i seguenti risultati (cfr. parte I):

I. - Un k-insieme ad un sol carattere è necessariamente o il vuoto o $\mathcal{G}_{d,q}$.

II. - I k-insiemi di tipo $(0, q+1)_1$ non esistono .

III. - Un k-insieme di tipo $(0, q)_1$ è necessariamente il complementare di un insieme di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ che rappresenta un complesso lineare di rette di PG(d,q).

IV. - Un k-insieme di tipo $(1, q+1)_1$ è necessariamente un insieme di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ che rappresenta un complesso lineare di rette di PG(d,q) .

V. - Un k-insieme di tipo $(0, 1)_1$ rappresenta un insieme di rette di PG(d,q) a due a due sghembe e un k-insieme di tipo $(q, q+1)_1$ è necessariamente il suo complementare .

Nel presente lavoro si studiano i k-insiemi di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ di tipo $(0,n)_1$ con $2 \leq n \leq q-1$,i quali rappresentano i k-insiemi K di rette di PG(d,q) tali che ogni fascio di rette ha in comune con K o nessuna o esattamente n rette . Da ciò, passando ai complementari, si deduce lo studio dei k-insiemi di $\mathcal{G}_{d,q}$ di tipo $(m, q+1)_1$ con $2 \leq m \leq q-1$.

2. - I k-insiemi di rette di $PG(d,q)$ di tipo $(0,n)$ rispetto ai fasci di rette.

Proviamo che:

VI. - Sia K un k-insieme proprio di rette di $PG(d,q)$ tale che, denotata con H l'unione delle rette di K, si abbia:

(2.1) H è congiunto da $PG(d,q)$, cioè:

$$[H] = PG(d,q) .$$

(2.2) Presi comunque un punto P di H e una retta r di K non contenente P esistono esattamente n rette di K per P incidenti r, con n fisso e $2 \leq n \leq q+1$.

Allora K è di tipo $(0,n)$ rispetto ai fasci di rette, cioè ogni fascio di rette di $PG(d,q)$ contiene esattamente o 0 o n rette di K

Dimostrazione. Si consideri un qualsiasi fascio F di $PG(d,q)$ di centro un punto P giacente su un piano α. Se $P \notin H$ per P non passano rette di K e quindi $F \cap K = \emptyset$. Supponiamo dunque che P appartenga ad H, si possono presentare i seguenti casi:

a) α non contiene rette di K donde F non contiene rette di K .

b) α contiene una retta r di K non per P ma allora , per la (2.2), per P passano esattamente n rette incidenti r di K.

c) α contiene una retta r di K passante per P e un punto P' di H non su r . Allora per la (2.2), tenendo conto che n [illegible] su α una retta r' di K per P' non passante per P e quindi per P esistono n rette di K incidenti r' (essendo r una di tali rette) .

d) α contiene una retta r di K passante per P e $\alpha \cap H = r$.

Proviamo che tale eventualità è assurda, ne seguirà l'asserto (tenuto conto della prop.I e che K è proprio).

Un piano per $r \in K$ si dirà piano tangente K se ha in comune con H solo i punti di r , piano secante K se contiene almeno un punto di H non appartenente ad r .

Siano β_1 e β_2 due piani distinti per r secanti K . Proviamo che il fascio di piani di asse r appartenente all' S_3 congiungente β_1, β_2 è tutto costituito da piani secanti K . Poichè β_1 è un piano secante K ,esiste un punto P_1 di $H \cap \beta_1$ non appartenente ad r onde per P_1 passano n rette di K incidenti r e quindi giacenti sul piano β_1 , sia s una di tali rette . D'altra parte, essendo β_2 un piano secante K , esiste un punto P_2 di $\beta_2 \cap H$ non su r e quindi esistono n rette di K per P_2 incidenti s e almeno una di esse , che denoteremo con t , è sghemba con r . Ne segue che ogni piano per r appartenente all' S_3 congiungente β_1, β_2 interseca t in un punto che appartiene ad H e non ad r ,e quindi il fascio di piani di asse r contenuto nell' S_3 è costituito da piani secanti K . Pertanto l'unione di tutti i piani per r secanti K è uno spazio subordinato $S_{d',q}$ e si ha: $[H] \subseteq S_{d',q}$ da cui per la (2.1) : $S_{d',q} = PG(d,q)$, ossia ogni piano per r è secante K ,onde l'asserto .

In modo del tutto analogo al caso precedente si prova che:

VII. - <u>Sia K un k-insieme di rette di $PG(d,q)$</u>

tale che , denotata con H l'unione delle rette di K , risulta :

(2.3) $\quad [H] = PG(d,q)$

(2.4) Per ogni punto P di H e per ogni retta r di K non contenente P esistono m_1, o m_2, ...ovvero m_ℓ rette per P incidenti r essendo $m_1, m_2, .., m_\ell$ interi fissati tali che: $2 \leq m_1 < .. < m_\ell \leq q+1$.

Allora K è **di classe** $[0,m_1,m_2,..,m_\ell]$ rispetto ai fasci di rette .

Si consideri un k-insieme **K** di punti di $\mathcal{G}_{d,q}$ di tipo $(0,n)_1$ rispetto a Σ_1 ,con $2 \leq n \leq q-1$.

Sia Σ_{d-1} la famiglia dei sottospazi di dimensione $d-1$ contenuti in $\mathcal{G}_{d,q}$ ciascuno dei quali rappresenta una determinata stella di rette di $PG(d,q)$ di dimensione $d-1$,e sia $T_{d-1} \in \Sigma_{d-1}$. Posto $K' = T_{d-1} \cap K$, si ha che K' è un insieme di punti di T_{d-1} di classe $[0,n]_1$ rispetto alle rette di T_{d-1} . Pertanto , tenuto conto che in uno spazio proiettivo non esistono k-insiemi di tipo $(n)_1$ rispetto alle rette con $1 \leq n \leq q$, si possono presentare i seguenti casi :

a) K' è di tipo $(0)_1$ rispetto alle rette di T_{d-1}, onde $K' = \emptyset$.

b) K' è di tipo $(0,n)_1$ rispetto alle rette di T_{d-1} in tal caso necessariamente risulta: $d - 1 = 2$ (cfr. [5] **proposizione XIV**).

Dunque si conclude che :

VIII. - *In* $PG(d, q)$ *con* $d \geq 4$ *non esistono k-insiemi di rette di tipo* $(0,n)$ *rispetto ai fasci*, $(2 \leq n \leq q-1)$.

Come corollario della VIII, in forza della VI si ha :

IX. - *In* $PG(d,q)$, $d \geq 4$, *non esistono k-insiemi di rette tali che denotata con* H *l'unione delle rette di* K *si abbiano la (2.1) e la (2.2) con* $2 \leq n \leq q-1$.

Dicesi *geometria parziale immersa in* $PG(d,q)$ una famiglia K di rette di $PG(d,q)$ tale che, denotata con H l'unione delle rette di K, si ha :

(2.3) *Per ogni punto di* H *passa un numero* N *di rette di* K.

(2.4) *Fissata una retta* r *di* K *e un punto* P *di* $H - r$ *esistono* n *rette per* P *incidenti* r.

(2.5) $[H] = PG(d,q).$

L'intero n dicesi <u>parametro</u> della geometria parziale. Le geometrie parziali di $PG(d,q)$ di parametro $n=1$ risultano i sistemi rigati (o quadragoni generalizzati) immersi in $PG(d,q)$. Essi sono stati completamente caratterizzati da D.Olanda in [3],[4] e da F.Buekenhout e C.Lefèvre in [1]. Possiamo pertanto supporre $n \geq 2$. Per la prop.VI allora la geometria parziale K è un k-insieme di rette di tipo $(0,n)$, rispetto ai fasci, di $PG(d,q)$. Quindi una tale geometria non può esistere se è $n=q+1$ (cfr.prop.II), se $n=q$, K è il complementare, nell'insieme di tutte le rette di $PG(d,q)$, di un complesso lineare di rette (cfr.prop.III). Da ciò e dalla prop.VIII si ha allora:

X.-<u>Sia K una geometria parziale immersa in $PG(d,q)$ di parametro $n \geq 2$. Se è $n \geq q$ deve necessariamente essere $n=q$ e K è il complementare di un complesso lineare di rette di $PG(d,q)$. Se è $d \geq 4$ deve necessariamente essere $n \geq q$, cioè non esistono geometrie parziali di $PG(d,q)$ con $d \geq 4$ e $2 \leq n \leq q-1$.</u>

Lo studio delle geometrie parziali di $PG(d,q)$ è così ricondotto a quello delle geometrie parziali di $PG(3,q)$ con $2 \leq n \leq q-1$. Di ciò ci occuperemo nel n.3.

3. - I k-insiemi di rette di $PG(3,q)$ di tipo $(0,n)$ rispetto ai fasci di rette $(2\leq n\leq q-1)$.

Sia K un k-insieme di rette di $PG(3,q)$ ($q = p^h$) di tipo $(0,n)$ rispetto ai fasci di rette, i punti di $\mathcal{G}_{3,q}$ rappresentanti le rette di K costituiscono un k-insieme di tipo $(0,n)_1$ rispetto alle rette di $\mathcal{G}_{3,q}$. Supporremo sempre nel seguito $2\leq n\leq q-1$.

Sia π un piano contenuto in $\mathcal{G}_{3,q}$. Posto $K' = K \cap \pi$ si hanno due possibilità :

a) K' è di tipo $(0)_1$ e quindi $K' = \emptyset$.

b) K' è di tipo $(0,n)_1$ da cui necessariamente

(3.1) $\quad h \geq 2\ ,\ n = p^{\ell},\quad 1\leq \ell \leq h-1$ e

$$|K'| = (q+1)(n-1)+1 = N\ ;$$

onde si ha che :

XI. - *In $PG(3,q)$ con q primo non esistono k-insiemi di rette di tipo $(0,n)$ rispetto ai fasci .*

XII. - *Un k-insieme di punti di $\mathcal{G}_{3,q}$ con $q = p^h$, $h \geq 2$, di tipo $(0,n)_1$ rispetto a Σ_1 è di classe $[0,N]_2$, con $N = (q+1)(n-1)+1$,* rispetto ai piani di $\mathcal{G}_{3,q}$ e necessariamente si ha : $n = p^{\ell}$, con $1 \leq \ell \leq h - 1$.

Sia dunque K un k-insieme di rette di PG(3,q) $q = p^h$, $h \geq 2$, di tipo (0,n) rispetto ai fasci di rette , allora per la proposizione XII risulta : $n = p^{\ell}$ e ogni stella e ogni piano rigato ha in comune con K o zero o $N = (q+1)(n-1)+1$ rette .

Si indichi con $\mathcal{C}_0^2$ il numero delle stelle non aventi rette di K e con $\mathcal{C}_N^2$ il numero delle stelle che hanno N rette in comune con K , gli interi $\mathcal{C}_0^2$ e $\mathcal{C}_N^2$ si dicono caratteri di K rispetto alle stelle di rette . Denotata con H l'unione delle rette di K , fra i caratteri di K rispetto alle stelle ed $|H|$ sussistono le relazioni seguenti :

(3.2) $$\mathcal{C}_0^2 = q^3 + q^2 + q + 1 - |H|$$

(3.3) $$\mathcal{C}_0^2 + \mathcal{C}_N^2 = q^3 + q^2 + q + 1 .$$

onde :

(3.4) $$\mathcal{C}_N^2 = |H|$$

(3.5) $\quad N\,|H| = N\, \mathcal{C}_N^2 = k\,(q+1)\,.$

(3.6) $\quad N\,(N-1)\,|H| = N\,(N-1)\,\mathcal{C}_N^2 = k\,(k-1) - 2\mathcal{C}.$

essendo $\mathcal{C}$ il numero delle coppie di rette sghembe di K . Dalla (3.5), tenendo conto che :

$$N = (q+1)\,(n-1) + 1\,,$$

risulta :

(3.7) $\quad k = (n-1)\,|H| + \frac{|H|}{q+1}$

dunque essendo k un intero dalla (3.7) si ha:

XIII. - La cardinalità dell'unione H delle rette di K è un multiplo di $q+1$, cioè :

(3.8) $\quad |H| = m\,(q+1)\,,\ (m$ intero $)\,.$

Inoltre dalla (3.5) e dalla proposizione XIII si trae :

(3.9) $\quad k = m\,N$

Siano $\mathcal{C}_0^{\rho}$ il numero dei piani di $PG(3,q)$ non contenenti rette di K e $\mathcal{C}_N^{\rho}$ il numero dei piani aventi N rette in comune con K ,gli interi $\mathcal{C}_0^{\rho}$ e $\mathcal{C}_N^{\rho}$ si dicono caratteri di K rispetto ai piani rigati . Evidentemente risulta:

(3.10) $\quad \mathcal{C}_0^{\rho} = \mathcal{C}_0^2 \quad , \quad \mathcal{C}_N^{\rho} = \mathcal{C}_N^2 \,.$

Proviamo che :

XIV. - L'unione H delle rette di K è un insieme di punti di PG(3,q) di classe $[m, q+m]_2$ rispetto ai piani, cioè ogni piano ha in comune con H o m o q+m punti.

Dimostrazione. Sia α un piano di PG(3,q), per la proposizione XII esso ha in comune con K o zero o N rette.

Supponiamo che α non contenga rette di K (in questo caso il piano $f(\alpha)$ di $\mathcal{G}_{3,q}$ che rappresenta α è esterno a K) e osserviamo che ogni retta di K interseca α in un punto e se $P \in H$ la stella di centro P ha N rette in comune con K, onde, tenendo conto della (3.9), si ha:

$|\alpha \cap H| \cdot N = k = mN$ cioè:

(3.11) α privo di rette di $K \Rightarrow |\alpha \cap H| = m$

Supponiamo adesso che α contenga N rette di K, esse costituiscono nel piano α^* duale di α un N-insieme di tipo $(0,n)_1$. Pertanto i punti di $\alpha \cap H$ che appartengono a rette di K giacenti su α sono in numero di $\frac{N}{n}(q+1)$, cioè tanti quante le rette secanti un N-insieme di tipo $(0,n)_1$, e per i rimanenti punti di $\alpha \cap H$ passano N rette di K nessuna delle quali giace su α ; onde risulta :

$$(N-n)\frac{N}{n}(q+1)+N\left(|\alpha \cap H|-\frac{N}{n}(q+1)\right)=$$
$$=k-N=mN-N\ ;$$

da cui :

$$N\,|\alpha \cap H| = N(m-1)+\frac{N^2}{n}(q+1)-\frac{N^2}{n}(q+1)+$$
$$+N(q+1)\quad ,$$

e quindi : $|\alpha \cap H|N = N(m+q)$. Pertanto :

(3.12) $\underline{\alpha \text{ contenente rette di } K} \Rightarrow |\alpha \cap H| = q+m$

Dalle (3.11) e (3.12) segue l'asserto .

Sia α un piano che contiene rette di K , allora i punti di $\alpha \cap H$ per i quali non passano rette di K contenute in α sono in numero di

(3.13) $$a = |\alpha \cap H| - \frac{N}{n}(q+1) = q+m-\frac{N}{n}(q+1)$$

da cui (tenuto anche conto che $|H| \leq (q+1)(q^2+1)$ e di (3.8)):

(3.14) $$\begin{cases} \frac{N}{n}(q+1)-q \leq m \leq q^2+1, \\ m = \frac{N}{n}(q+1)-q \iff a = 0\ . \end{cases}$$

Osservato che, in ogni caso, è $[H]$ =PG(3,q) e per ogni punto di H passano N rette di K, da quanto precede si ha(cfr.(2.3),(2.4),(2.5)):

(3.15) $a = 0 \Leftrightarrow \left[\forall r \in K, \forall P \in H - r \Rightarrow \exists!\right.$ <u>n rette di K per P</u>
<u>incidenti r</u>$\left.\right] \Leftrightarrow$ <u>K è una geometria parziale</u>.

Se $a = 0$, sia s una qualsiasi retta di $PG(3,q)$ non contenuta in H e ad intersezione non vuota con H, onde esiste qualche retta r di K incidente s. Sia α il piano determinato da r e da s. Le rette di K su α allora costituiscono il duale di un N-insieme di tipo $(0,n)_1$; inoltre, essendo $a=0$, per ogni punto di $\alpha \cap H$ passano esattamente n rette di K su α. Ne segue che i punti d'incontro di s con $\alpha \cap H$ sono in numero di N/n. Quindi ogni retta di $PG(3,q)$, non contenuta in H e ad intersezione non vuota con H, incontra H in N/n punti, onde H è di classe $[0, N/n, q+1]_1$. D'altra parte H non può essere ad un sol carattere rispetto alle rette, altrimenti (essendo $H \neq \emptyset$) sarebbe $H=PG(3,q)$ e quindi dalla (3.8) si avrebbe $m=q^2+1$, onde dalla seconda delle (3.14) si otterrebbe $q^2+1 = (q+1)N/n - q$, cioè (essendo $N=(q+1)(n-1) + 1$) $n=q+1$, mentre si suppone $n \leq q-1$. Inoltre H deve ammettere qualche retta esterna, perché se così non fosse, sarebbe di tipo $(N/n, q+1)_1$, dunque il suo complementare sarebbe di tipo $(0, q+1-N/n)$ e quindi (cfr.[5] prop.XIV) dovrebbe essere $q+1-N/n=1$ ovvero $q+1-N/n=q$, cioè $n=q$ ovvero $n=1$, mentre si suppone $2 \leq n \leq q-1$. Sia allora β un piano contenente una retta ester na ad H e un punto di H. In β l'insieme $\beta \cap H$ è evidentemente di tipo $(0,N/n)_1$, onde N/n deve essere una potenza di p, cioè $N/n = p^c = q+1-q/n = q+1-p^{h-\ell}$ e ciò è assurdo, essendo $1 \leq \ell \leq h-1$. Si è così provato che è:

$$a > 0. \tag{3.16}$$

Da ciò e dalla (3.15) si ha che:

XV.-Non esistono geometrie parziali immerse in PG(3,q), con $2 \leq n \leq q-1$.

La proposizione seguente riassume i risultati ottenuti:

XVI.-Sia K un k-insieme di rette di PG(3,q) (con $q=p^h$, p primo) di tipo (0,n) rispetto ai fasci di rette, con $2 \leq n \leq q-1$. Allora deve essere $h \geq 2$, $n=p^\ell$ con $1 \leq \ell \leq h-1$; ogni piano rigato ed ogni stella di rette o non ha rette in comune con K ovvero ha esattamente $N=(q+1)(n-1)+1$ rette in comune con K, le quali costituiscono un N-insieme di tipo $(0,n)_1$; denotati con τ_0^2 e τ_N^2 e con τ_0^σ e τ_N^σ il numero delle stelle di rette che hanno zero o N rette in comune con K e il numero dei piani rigati che hanno zero o N rette in comune con K, e con H l'unione delle rette di K, si ha:

$$|H| = m(q+1), \qquad k = mN, \tag{3.17}$$

$$\frac{N}{n}(q+1) - q < m \leq q^2+1, \tag{3.18}$$

$$\tau_0^2 = \tau_0^\sigma = (q^2+1-m)(q+1), \quad \tau_N^2 = \tau_N^\sigma = m(q+1), \tag{3.19}$$

(3.20) $$m = q^2+1 \iff H = PG(3,q).$$

Inoltre l'insieme H è di tipo $(m,m+q)_2$ rispetto ai piani, ovvero è $H=PG(3,q)$.

Osservato che in $PG(2,q)$ con $q=3^h$ non esistono insiemi di tipo $(0,3)_1$ né di tipo $(0,3^{h-1})_1$, cfr. [2], [6], dalla prop. XVI si ha:

XVII.- In $PG(3,q)$, con $q=3^h$ $(h\geq 2)$, non esistono k-insiemi di rette di tipo $(0,3)$ né di tipo $(0,3^{h-1})$ rispetto ai fasci di rette.

B I B L I O G R A F I A

[1].-F.BUEKENHOUT, C.LEFÈVRE, Generalized Quadrangles in Projective Spaces, Archiv der Math., XXV, 5, 1974, pp.540-552.

[2].-A.COSSU, Su alcune proprietà dei (k,n)-archi in un piano proiettivo sopra un corpo finito, Rend.Mat., (5)20(1961), pp.271-277.

[3].-D.OLANDA, Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo, Relazione N.26 Ist.Mat.Univ.Napoli, 1973, pp.1-20.

[4].-D.OLANDA, Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo, Rend.Acc.Naz.Lincei, (8)62(1977), pp.489-499.

[5].-G.TALLINI, Problemi e risultati sulle geometrie di Galois, Relazione N.30 Ist.Mat.Univ.Napoli, 1973, pp.1-30.

[6].-J.A.THAS, Some results concerning $\{(q+1)(n-1);n\}$-arcs and $\{(q+1)(n-1)+1;n\}$-arcs in finite projective planes of order q, J.Comb.Theory, 19(1975), pp.228-232.