UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA

Giuseppe Tallini

Fibrazioni in rette di PG(r,q).

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G. Tallini

n. 37 Novembre 1981

Istituto Matematico « Guido Castelnuovo »

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Fibrazioni in rette di $PG(r,q)$.

Giuseppe Tallini (Roma)

Novembre 1981

Sia $PG(r,q)$ uno spazio di Galois di dimensione r e di ordine $q = p^h$ (p primo). Chiameremo fibrazione in rette di $PG(r,q)$ una famiglia $\mathcal{F}$ ($\neq \emptyset$) di rette di $PG(r,q)$, a due a due sghembe tra loro; essa sarà detta totale o parziale a seconda che l'unione, F, delle rette della famiglia coincida, o meno, con $PG(r,q)$. Una fibrazione totale vien chiamata semplicemente fibrazione, quando ciò non dia luogo ad equivoci. Una fibrazione si dice massimale se non é contenuta propriamente in alcuna altra fibrazione. Evidentemente, ogni fibrazione totale é massimale. Lo studio delle fibrazioni equivale a quello degli insiemi di punti della grassmanniana $\mathcal{G}_{r,q}$ delle rette di $PG(r,q)$ che siano di tipo (0,1) rispetto alle rette di $\mathcal{G}_{r,q}$.

Le fibrazioni sono legate ai piani di traslazione ed alle loro generalizzazioni. Precisamente, definiamo S-spazio parziale uno spazio parziale di rette $(S,\mathcal{R})$ tale che: (i) tutte le rette abbiano la medesima cardinalità; (ii) in $\mathcal{R}$ sia definita una relazione di equivalenza, da dirsi parallelismo; (iii) il parallelismo sia euclideo, cioé, dati una retta ed un punto, esista una, ed una sola, retta per il punto "parallela" alla retta data. Se $(S,\mathcal{R})$ é uno spazio di rette, otteniamo la nozione classica di S-spazio (spazio di Sperner); qualora in $(S,\mathcal{R})$ due rette sono parallele sse non si incontrano, otteniamo la nozione di net o di piano affine, a seconda che $(S,\mathcal{R})$ sia uno spazio parziale proprio od uno spazio di rette. Un S-spazio parziale sarà detto di traslazione se per ogni coppia di punti esiste una traslazione che muta l'uno nell'altro (una traslazione essendo un automorfismo di $(S,\mathcal{R})$ privo di punti uniti che trasforma ciascuna retta in una ad essa parallela). Se $\mathcal{F}$ é una fibrazione di $PG(r,q)$, si consideri un $PG(r+1,q)$ contenente $PG(r,q)$; in $AG(r+1,q) = PG(r+1,q) \smallsetminus PG(r,q)$ si considerino come "rette" i piani che incontrano l'iperpiano improprio $PG(r,q)$ in rette di $\mathcal{F}$; due "rette" si diranno "parallele" se hanno la stessa retta impropria. In tal modo si ottiene un S-spazio parziale di traslazione, che é un S-spazio di traslazione sse $\mathcal{F}$ é una fibrazione totale; inoltre, se $r = 3$, é un piano di traslazione oppure un net, a seconda che $\mathcal{F}$ sia totale o parziale.

Esempi di fibrazioni totali in $PG(2n + 1,q)$ si ottengono nel modo seguente. Siano P_n e $\bar{P}_n$ due sottospazi n-dimensionali di $PG(2n + 1,q)$ complessi coniugati, in una estensione quadratica del campo base, e sghembi tra loro. Le rette di $PG(2n + 1,q)$ che congiungono punti complessi coniugati di P_n e $\bar{P}_n$ costituiscono, evidentemente, una fibrazione totale di $PG(2n + 1,q)$, che sarà detta <u>regolare</u>. Osserviamo anche che in $PG(2n,q)$ non esistono fibrazioni totali (in quanto, se esistesse una tale fibrazione $\mathcal{F}$, dovrebbe essere $|\mathcal{F}|(q + 1) = \vartheta_{2n} = \sum_{i=0}^{2n} q^i$, mentre $\vartheta_{2n}/(q + 1)$ non é mai un intero).

Per $r = 3$, le fibrazioni sono state molto studiate, anche se la problematica é ben lungi dall'essere esaurita. Ricordiamo, ad esempio, il seguente risultato di A.A. Bruen: <u>Se $\mathcal{F}$ é una fibrazione parziale massimale, risulta</u>:

(1) $$q + \sqrt{q} + 1 \leq |\mathcal{F}| \leq q^2 - \sqrt{q} .$$

Per $r \geqslant 4$, la teoria delle fibrazioni é tutta da fare. In questa conferenza porremo le basi di tale teoria.

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale di $PG(r,q)$. Denotata con F la unione delle rette di $\mathcal{F}$, dovrà aversi $(q + 1)|\mathcal{F}| = |F|$. D'altra parte, essendo $\mathcal{F}$ massimale, ogni retta di $PG(r,q)$ ha intersezione non vuota con F, quindi $|F| \geqslant \vartheta_{r-1}$, il segno di equaglianza avendosi sse F é un iperpiano di $PG(r,q)$, cioé $\mathcal{F}$ é una fibrazione totale di tale iperpiano; inoltre é $|F| \leq \vartheta_r$, il segno di eguaglianza avendosi sse $\mathcal{F}$ é una fibrazione totale di $PG(r,q)$. Ne segue:

I. - <u>Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale di $PG(r,q)$. Si ha</u>

(2) $$\vartheta_{r-1}/(q + 1) \leq |\mathcal{F}| \leq \vartheta_r/(q + 1) ,$$

il segno di eguaglianza a destra avendosi sse r é dispari ed $\mathcal{F}$ é totale, il segno di eguaglianza a sinistra avendosi sse r é pari ed $\mathcal{F}$ é una fibrazione totale di un iperpiano di $PG(r,q)$.

Quale che sia la fibrazione $\mathcal{F}$ di $PG(r,q)$, **chiameremo carattere di indice s di $\mathcal{F}$, nella dimensione tre, il numero t_s dei sottospazi 3-dimensionali P_3 di $PG(r,q)$ ciascuno dei quali contenga s rette di $\mathcal{F}$.** Risulta $0 \leq s \leq q^2 + 1$ (tenendo conto che in P_3 il massimo numero di rette a due a due sghembe é $q^2 + 1 = \vartheta_3/(q + 1)$, cfr. (2) con $r = 3$).

Tra i caratteri $t_o, t_1, \ldots, t_{q^2+1}$ sussistono le seguenti relazioni, di dimostrazione immediata:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{q^2+1} t_s = \gamma_{r,3,q}, \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{q^2+1} s t_s = |\mathcal{F}|\gamma_{r-2,1,q}, \\ \displaystyle\sum_{s=2}^{q^2+1} s(s-1)t_s = |\mathcal{F}|(|\mathcal{F}|-1), \end{cases}
$$

ove si é posto:

$$
(3') \qquad \gamma_{r,d,q} = \prod_{i=0}^{d} (\vartheta_{r-i}/\vartheta_{d-i}) = \text{numero dei } P_d \text{ di } PG(r,q).
$$

Per le fibrazioni si possono allora introdurre le nozioni di classe e di tipo rispetto ai P_3, come nel caso classico dei k-insiemi di uno spazio di Galois, ed il loro studio si può fare al crescere dei caratteri. Proviamo innanzitutto che:

II. - Non esistono fibrazioni ad un solo carattere n rispetto ai P_3.

Dim. Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di $PG(r,q)$ di tipo (n) (cioé tale che $t_s = 0$ per ogni $s \neq n$). Le rette di $\mathcal{F}$ appartenenti ad un sottospazio P_4 di $PG(r,q)$ costituiscono ancora un fibrazione di tipo (n) in $P_4 = PG(4,q)$. Basta dunque provare l'asserto per $r = 4$. In tal caso il sistema (3) diventa:

$$t_n = \vartheta_4, \quad nt_n = |\mathcal{F}|\vartheta_2, \quad n(n-1)t_n = |\mathcal{F}|(|\mathcal{F}| - 1).$$

Eliminando t_n ed $|\mathcal{F}|$ dalle precedenti relazioni, si ottiene $n = \vartheta_2/\vartheta_1$ e ciò é assurdo, in quanto ϑ_2/ϑ_1 non é un intero. Si ha così l'asserto.

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di $PG(r,q)$, con $r \geqslant 4$ e $|\mathcal{F}| \geqslant 2$. Sia $\mathcal{R}$ la famiglia di parti di $\mathcal{F}$ ciascuna delle quali sia costituita dalle rette di $\mathcal{F}$ apparenenti ad un P_3 di $PG(r,q)$. Allora, evidentemente, $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ costituisce uno spazio di rette, il quale é un sistema di Steiner $S(2,n,|\mathcal{F}|)$ sse $\mathcal{F}$ é di classe $[0,1,n]$ (con $t_n \neq 0$) rispetto ai P_3.

Osserviamo poi che, se P_{r-1} é un iperpiano di $PG(r,q)$ contenente esattamente n rette di $\mathcal{F}$, allora risulta:

(4) $\qquad |F \cap P_{r-1}| = |\mathcal{F}| + qn \qquad$ (n = numero delle rette di $\mathcal{F}$ in P_{r-1}).

Dalla (4) e dalla prima diseguaglianza di (2), tenendo conto che $|F \cap P_{r-1}| \leq \vartheta_{r-1}$, si ha

(5) $\qquad n \leq \vartheta_{r-1}/(q+1) \qquad$ (n = numero delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti ad un P_{r-1}).

Sia ora $\mathcal{F}$ una fibrazione di $PG(r,q)$ di tipo (m,n), con $m < n$, rispetto ai P_3. Il sistema (3) diventa:

$$(6) \quad \begin{cases} t_m + t_n = \gamma_{r,3,q} \\ mt_m + nt_n = |\mathcal{F}|\gamma_{r-2,1,q} \\ m(m-1)t_m + n(n-1)t_n = |\mathcal{F}|(|\mathcal{F}| - 1) . \end{cases}$$

Posto:

$$(7) \qquad |\mathcal{F}| = k,$$

risolvendo il sistema $(6)_{I}$, $(6)_{II}$ rispetto a t_m e t_n, si ha:

$$(8) \quad \begin{cases} t_n = (k\gamma_{r-2,1,q} - m\gamma_{r,3,q})/(n-m) \;, \\ t_m = (n\gamma_{r,3,q} - k\gamma_{r-2,1,q})/(n-m) \;; \end{cases}$$

sostituendo (8) in $(6)_{III}$ otteniamo:

$$(9) \qquad k^2 - k\left[(n+m-1)\gamma_{r-2,1,q} + 1\right] + mn\gamma_{r,3,q} = 0 .$$

Dovendo essere $t_m > 0$ e $t_n > 0$, da (8) otteniamo:

$$(10)\qquad \frac{m\,\gamma_{r,3,q}}{\gamma_{r-2,1,q}} < k < \frac{n\,\gamma_{r,3,q}}{\gamma_{r-2,1,q}} .$$

Essendo, per la (3'):

$$(11)\qquad \begin{cases} \gamma_{r,3,q} = \vartheta_r \vartheta_{r-1} \vartheta_{r-2} \vartheta_{r-3} / \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 , \\ \gamma_{r-2,1,q} = \vartheta_{r-2} \vartheta_{r-3} / \vartheta_1 , \end{cases}$$

dalla (10) si trae:

$$(12)\qquad \frac{m\,\vartheta_r \vartheta_{r-1}}{\vartheta_2 \vartheta_3} < k < \frac{n\,\vartheta_r \vartheta_{r-1}}{\vartheta_2 \vartheta_3} .$$

Poiché, in ogni caso, é $k \leq \vartheta_r/\vartheta_1$ (cfr. (2)), dalla (12) otteniamo: $m\,\vartheta_r \vartheta_{r-1}/\vartheta_2 \vartheta_3 < k \leq \vartheta_r/\vartheta_1$; quindi

$$(13)\qquad m\,\vartheta_{r-1} < \vartheta_2 \vartheta_3/\vartheta_1 = \vartheta_2(q^2+1) = \vartheta_4 + q^2 .$$

Se $r \geqslant 5$, la (13) si scrive (posto $\vartheta_{-1} = 0$):

$$mq^5\vartheta_{r-6} + (m-1)\vartheta_4 < q^2 ;$$

pertanto, essendo $mq^5\vartheta_{r-6} \geqslant 0$, si ha:

$$(14)\qquad (m-1)\vartheta_4 \leq mq^5\vartheta_{r-6} + (m-1)\vartheta_4 < q^2 ,$$

e ciò é assurdo per $m \geqslant 2$; per $m = 1$, la (14) dà: $q^5\vartheta_{r-6} < q^2$, che é assurda per $r \geqslant 6$. Ne segue che

III. - <u>In $PG(r,q)$ con $r \geqslant 6$ non esistono fibrazioni di tipo (m,n) per le quali $m \geqslant 1$. Per $r = 5$, possono esistere fibrazioni di tipo (m,n) soltanto se $m = 1$.</u>

Se é $m = 0$, dalla (9) (tenendo conto che é $k \neq 0$) e dalla $(11)_{II}$ si deduce:

$$(15)\qquad k = (n-1)\gamma_{r-2,1,q} + 1 = 1 + (n-1)\vartheta_{r-2}\vartheta_{r-3}/\vartheta_1 .$$

Dovendo essere $k \leq \vartheta_r/\vartheta_1$ (cfr. (2)), si ottiene allora:

$$(16)\qquad \vartheta_1 + (n-1)\vartheta_{r-2}\vartheta_{r-3} \leq \vartheta_r ;$$

d'altra parte,

$$(17)\qquad r \geqslant 5 \implies \vartheta_{r-2}\vartheta_{r-3} > \vartheta_r$$

(in quanto, per $r \geqslant 5$, risulta: $q^{r-4} + 1 + (1/q^r) > q + (1/q^2) + (1/q^3)$, cioé $\vartheta_{r-2}\vartheta_{r-3} > \vartheta_r$). Dato che supponiamo $|\mathcal{F}| = k > 1$, e quindi $n > 1$, se é $r \geqslant 5$, per la (17) otteniamo

$$\vartheta_1 + (n-1)\vartheta_{r-2}\vartheta_{r-3} > \vartheta_1 + (n-1)\vartheta_r > \vartheta_r ,$$

che contraddice la (16). Ne segue che:

IV. - In $PG(r,q)$ con $r \geqslant 5$ non esistono fibrazioni $\mathcal{F}$ di tipo $(0,n)$ (con $|\mathcal{F}| > 1$). Una fibrazione $\mathcal{F}$ di tipo $(0,n)$ in $PG(4,q)$ é tale che (cfr. (15), (16), $(8)_I$):

(18) $|\mathcal{F}| = (n-1)\vartheta_2 + 1 \;;\quad n \leqslant q \;;\quad t_n = (\vartheta_2)^2 - \vartheta_1\vartheta_2 q/n$,

onde n deve dividere $\vartheta_1\vartheta_2 q$.

In conseguenza delle proposizioni III, IV, lo studio delle fibrazioni di tipo (m,n) é ricondotto allo studio di quelle di tipo $(1,n)$ per $r = 5$ e di tipo (m,n), con $1 \leq m < n$, per $r = 4$.

Esaminiamo il caso delle fibrazioni di tipo $(1,n)$ di $PG(4,q)$. Dalle (8), (9), (12) otteniamo:

$$(19)\qquad \begin{cases} t_n = (k\vartheta_2 - \vartheta_4)/(n-1)\ , \quad t_1 = (n\vartheta_4 - k\vartheta_2)/(n-1), \\ \qquad q^2 + 1 \leq k < n\vartheta_4/\vartheta_2\ , \qquad k = |\mathcal{F}|, \\ k^2 - k(1 + n\vartheta_2) + n\vartheta_4 = 0\ . \end{cases}$$

Dalla $(19)_{III}$ segue che il discriminante $\Delta_n(q)$ di tale equazione deve essere un intero quadrato. Si ha:

$$(20)\qquad \Delta_n(q) = (1 + n\vartheta_2)^2 - 4n\vartheta_4 = 1 + n(n-4)\vartheta_4 + n(nq\vartheta_1^2 + 2\vartheta_2).$$

Osserviamo che

$$(21)\qquad n \geqslant 4 \implies \Delta_n(q) > 0\ ;$$

inoltre,

$$(22)\qquad \Delta_2 = 1 - 4q(q(q^2-2) - 1) < 0 \quad \text{per ogni } q \geqslant 2,$$

$$(23)\qquad \Delta_3 = 1 - 3(q(q^3 - 2q^2 - 7q - 4) - 1) \begin{cases} < 0 & \text{per } q > 4 \\ = 112 & \text{per } q = 2 \\ = 148 & \text{per } q = 3 \\ = 4 & \text{per } q = 4\ . \end{cases}$$

Dalle (22), (23) (tenendo conto che 112 e 148 non sono quadrati) si ha:

V. - Non esistono in $PG(4,q)$ (e quindi neanche in $PG(5,q)$) fibrazioni di tipo $(1,n)$ per $n = 2$; per $n = 3$ non ne esistono se é $q \neq 4$. Per $q = 4$ é aperto il problema dell'esistenza di fibrazioni di tipo $(1,3)$; per esse deve aversi $|\mathcal{F}| = k = 33$, ovvero $|\mathcal{F}| = k = 31$ (v. $(19)_{III}$).

Un calcolo diretto, a partire dalla (20), fornisce:

$$
(24)\qquad
\begin{array}{lll}
\Delta_4(2) = 345 \in \not\square\,, & \Delta_4(3) = 873 \in \not\square\,, & \Delta_4(4) = 1769 \in \not\square\,, \\
\Delta_4(5) = 3129 \in \not\square\,, & \Delta_4(7) = 7625 \in \not\square\,, & \Delta_4(8) = 10953 \in \not\square\,; \\
\Delta_4(9) = 15129 = (123)^2\,, & k = \begin{cases} 244 \\ 121 \end{cases} . &
\end{array}
$$

Ne segue che:

VI. - Non esistono in $PG(4,q)$ (e quindi neanche in $PG(5,q)$) fibrazioni di tipo $(1,4)$ per $q = 2,3,4,5,7,8$. Per $q = 9$ é aperto il problema dell'esistenza di fibrazioni di tipo $(1,4)$; per esse deve aversi $|\mathcal{F}| = 244$, ovvero $|\mathcal{F}| = 121$.

Dalla $(19)_{III}$, per una fibrazione $\mathcal{F}$ di tipo $(1,n)$ di $PG(4,q)$, si ha (cfr. anche prop. I):

$$
(25)\qquad n = q^2 + 1 \iff |\mathcal{F}| = k = q^2 + 1 \iff
$$
$$
\iff \mathcal{F} \text{ é una fibrazione totale di un } P_3 \text{ di } PG(4,q)\,.
$$

Se $\mathcal{F}$ é una fibrazione di tipo (m,n) di $PG(4,q)$, dalle (8), (9), (12) otteniamo:

$$
(26)\qquad
\begin{cases}
t_m = (n\vartheta_4 - k\vartheta_2)/(n - m)\,, \quad t_n = (k\vartheta_2 - m\vartheta_4)/(n - m)\,, \\
m\vartheta_4/\vartheta_2 < k < n\vartheta_4/\vartheta_2\,, \qquad k = |\mathcal{F}|\,, \\
k^2 - k((n + m - 1)\vartheta_2 + 1) + mn\vartheta_4 = 0\,;
\end{cases}
$$

inoltre, l'unione F delle rette di $\mathcal{F}$ é un $(k(q + 1))$-insieme di tipo $(k + mq,\ k + nq)$ rispetto agli iperpiani (cfr. (4)).

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di tipo $(1,n)$ di $PG(5,q)$. Dalle (8), (9), (12) otteniamo (cfr. (11)):

$$(27)\quad \begin{cases} t_n = (k(\vartheta_4 + q^2) - (q^4 + q^2 + 1)\vartheta_4)/(n-1) \\ t_1 = (n(q^4 + q^2 + 1)\vartheta_4 - k(\vartheta_4 + q^2))/(n-1) \\ \dfrac{\vartheta_4(q^4 + q^2 + 1)}{\vartheta_4 + q^2} < k < \dfrac{n\,\vartheta_4(q^4 + q^2 + 1)}{\vartheta_4 + q^2} \\ k^2 - k((n + m - 1)(\vartheta_4 + q^2) + 1) + n(q^4 + q^2 + 1)\vartheta_4 = 0 . \end{cases}$$

Inoltre, ogni P_4 ha in comune con $\mathcal{F}$ o k_1 ovvero k_2 rette, ove k_1 e k_2 sono soluzioni della $(19)_{III}$, onde sia tale equazione che la $(27)_{IV}$ devono ammettere radici intere. Osserviamo, infine, che la seconda disequaglianza $(27)_{III}$ può venir migliorata; precisamente, proviamo che

$$(28)\qquad k < (\vartheta_4 + q^2)(n-1) + 1 .$$

Sia, infatti, ℓ una retta di $\mathcal{F}$, i P_3 per ℓ sono in numero di $\vartheta_4 + q^2$; ciascuno di essi o non ha altre rette in comune con $\mathcal{F}$, ovvero ne ha $n - 1$. Siano a, b i numeri dei P_3 per ℓ che hanno 0 od $n - 1$ rette di $\mathcal{F}$ in comune con essi. Si avrà

$$a + b = \vartheta_4 + q^2 , \qquad b(n-1) = k - 1 ,$$

da cui

$$a = \vartheta_4 + q^2 - (k-1)/(n-1) > 0 ,$$

e la (28) segue.

Sia ora $\mathcal{F}$ una fibrazione totale di PG(r,q), onde deve essere r dispari, $r = 2\ell + 1$, e $k = |\mathcal{F}| = \vartheta_r/\vartheta_1$. Ogni iperpiano contiene

$$n = \vartheta_{\ell-1,q^2} = \sum_{i=0}^{\ell-1} q^{2i}$$

rette di $\mathcal{F}$; infatti, dalla (4) si ha

$$|F \cap P_{r-1}| = \vartheta_{r-1} = |\mathcal{F}| + qn = \vartheta_r/\vartheta_1 + qn ,$$

da cui l'asserto; pertanto, $\mathcal{F}$ é ad un solo carattere rispetto agli iperpiani. Le (3) attualmente diventano:

$$(29)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{q^2+1} t_s = \gamma_{r,3,q} \\ \sum_{s=1}^{q^2+1} st_s = \vartheta_r \gamma_{r-2,1,q}/\vartheta_1 = \vartheta_r \vartheta_{r-2} \vartheta_{r-3}/(\vartheta_1)^2 \\ \sum_{s=2}^{q^2+1} s(s-1)t_s = \vartheta_r \vartheta_{r-2} q^2/(\vartheta_1)^2 \quad . \end{cases}$$

Moltiplichiamo la $(29)_I$ per $-(q^2+1)$, la $(29)_{II}$ per (q^2+1) e la $(29)_{III}$ per -1, e sommiamo; otterremo:

$$(30)\quad \sum_{s=2}^{q^2} (s-1)(q^2+1-s)t_s = \frac{\vartheta_r \vartheta_{r-2}}{\vartheta_1} \left[\vartheta_{r-3}(q^2+1)\left(\frac{\vartheta_2 \vartheta_3 - \vartheta_1 \vartheta_{r-1}}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3}\right) - \frac{q^2}{\vartheta_1}\right] + t_o(q^2+1) \quad .$$

Per $r = 5$, la (30) diventa:

$$(31)\quad \sum_{s=2}^{q^2} (s-1)(q^2+1-s)t_s = t_o(q^2+1) \quad .$$

Essendo $(s-1)(q^2+1-s) > 0$ per $s = 2,\dots,q^2$, dalla (31) si ha:

$$(32)\quad t_o = 0 \iff t_2 = t_3 = \dots = t_{q^2} = 0 \iff \mathcal{F} \text{ é di tipo } (1,q^2+1);$$

ne segue che:

VII. - <u>Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione totale di PG(5,q). Se ogni P_3 ha in comune con $\mathcal{F}$ qualche retta (cioé se $t_o = 0$), allora $\mathcal{F}$ é di tipo $(1,q^2+1)$, ogni iperpiano P_4 contiene q^2+1 rette di $\mathcal{F}$, le quali costituiscono una fibrazione totale di un P_3 di P_4. Infine, il sistema di Steiner $(\mathcal{F},\mathcal{R})$ é un piano proiettivo di ordine q^2.</u>

Se é $r \geqslant 7$, dalla (30) si ha (tenendo conto che la somma a primo membro é $\geqslant 0$ ed eguale a zero sse $\mathcal{F}$ é di classe $[0,1,q^2+1]$):

$$(33)\quad t_o \geqslant \frac{\vartheta_r \vartheta_{r-2}}{(q^2+1)\vartheta_1} \left[\frac{q^2}{\vartheta_1} + \frac{\vartheta_{r-3}(q^2+1)(\vartheta_1 \vartheta_{r-1} - \vartheta_2 \vartheta_3)}{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3}\right] > 0,$$

il segno di eguaglianza a primo membro avendosi sse $\mathcal{F}$ é di tipo $(0,1,q^2+1)$.

Particolare interesse hanno le fibrazioni $\mathcal{F}$ (con $|\mathcal{F}| \geqslant 2$) le cui rette siano a tre a tre non appartenti ad uno stesso P_3 di $PG(r,q)$, cioé di classe $[0,1,2]$ rispetto ai P_3. Una tale fibrazione sarà detta <u>completa</u> se non é contenuta propriamente in una altra fibrazione di classe $[0,1,2]$. Tenendo conto di quanto precede, se é $r = 4$, una fibrazione di classe $[0,1,2]$ é necessariamente di tipo $(0,2)$, ovvero di tipo $(0,1,2)$; mentre, se é $r \geqslant 5$, essa é necessariamente di tipo $(0,1,2)$ (cfr. proposizioni II, III, IV, V).

Quale che sia la fibrazione $\mathcal{F}$ di classe $[0,1,2]$, dal sistema (3), posto $|\mathcal{F}| = k$, si trae:

$$(34)\qquad \begin{cases} t_2 = k(k-1)/2, \qquad t_1 = k(\gamma_{r-2,1,q} - k + 1), \\ t_o = \gamma_{r,3,q} - k(\gamma_{r-2,1,q} - (k-1)/2)\,. \end{cases}$$

Dovendo essere, se é $r \geqslant 5$, $t_1 > 0$, si ha:

$$(35)\qquad k < \gamma_{r-2,1,q} + 1\,, \qquad\qquad r \geqslant 5.$$

Per $r = 4$, la (34) diventa:

$$(36)\qquad \begin{cases} t_2 = k(k-1)/2\,, \quad t_1 = k(q^2+q+2-k)\,, \\ t_o = \vartheta_4 - k(\vartheta_2 - (k-1)/2)\,, \end{cases}$$

da cui si ha:

$$(37)\qquad \begin{cases} k \leq q^2+q+2\,, \\ t_1 = 0 \iff k = q^2+q+2 \iff \mathcal{F} \text{ é di tipo } (0,2). \end{cases}$$

Daremo ora un esempio di una fibrazione di tipo $(0,1,2)$ <u>completa</u> $\mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}| = q^2+1$ in $PG(4,q)$, con q pari. Siano π e $\bar{\pi}$ due piani di $PG(4,q^2)$, complessi coniugati in una estensione quadratica del campo base di $PG(4,q)$, congiunti da $PG(4,q^2)$, cioé intersecantisi in un punto O di $PG(4,q)$. Sia $\mathcal{C}$ un (q^2+1)-arco di π avente O come nucleo e sia $\bar{\mathcal{C}}$ il complesso coniugato di $\mathcal{C}$ in $\bar{\pi}$ (il quale avrà ancora O come nucleo). I punti di $\mathcal{C}$ appartengono tutti a $PG(4,q^2) \setminus PG(4,q)$ (perché l'unico punto di π appartenente a $PG(4,q)$ é il punto O). Si considerimo le q^2+1 rette di $PG(4,q)$ congiungenti coppie di punti complessi coniugati di $\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$. Tali rette sono a due a due sghembe tra di loro e, quindi, costituiscono una (q^2+1)-fibrazione $\mathcal{F}$; infatti, se due di esse, r, s, fossero complanari, denotati con A, $\bar{A}$ e B, $\bar{B}$ i punti di $\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$ congiunti rispettivamente da r ed s, le rette AB ed $\bar{A}\bar{B}$ sarebbero complanari, ma allora il loro punto di incontro dovrebbe essere il punto O (in quanto, $AB \subseteq \pi$, $\bar{A}\bar{B} \subseteq \bar{\pi}$ e $\pi \cap \bar{\pi} = \{O\}$), onde per O passerebbe la secante AB di $\mathcal{C}$, e ciò é assurdo. Proviamo che $\mathcal{F}$ é di tipo (0,1,2); un qualsiasi P_3 di $PG(4,q)$ incontra π in una retta r e $\bar{\pi}$ nella complessa coniugata $\bar{r}$ di r. Se r é secante $\mathcal{C}$ in A e B, le uniche rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a P_3 sono le $A\bar{A}$ e $B\bar{B}$; se r é esterna a $\mathcal{C}$, allora P_3 non ha rette in comune con $\mathcal{F}$; se r é tangente a $\mathcal{C}$ (cioé se r passa per O) in un punto A, l'unica retta di $\mathcal{F}$ appartenente a P_3 é la $A\bar{A}$. Mostriamo, infine, che $\mathcal{F}$ é completa, cioé che, per ogni retta r di $PG(4,q)$, non incidente alcuna retta di $\mathcal{F}$, passa almeno un P_3 avente due rette in comune con $\mathcal{F}$. Se così non fosse, esisterebbe una retta r di $PG(4,q)$, non incidente alcuna retta di $\mathcal{F}$, tale che ogni P_3 per essa avrebbe al più una retta in comune con $\mathcal{F}$. Sia allora s una qualsiasi retta di $\mathcal{F}$; essa é congiunta ad r da un P_3, il quale, non avendo in comune con $\mathcal{F}$ altre rette diverse da s, interseca π in una retta non secante $\mathcal{C}$ e, quindi, passante per O, onde tale P_3 contiene il piano α di $PG(4,q)$ congiungente r con O, se O non appartiene ad r. I P_3 congiungenti r con le q^2+1 rette di $\mathcal{F}$ sono tutti distinti; pertanto, esisterebbero q^2+1 P_3 distinti per il piano α in $PG(4,q)$ e ciò é assurdo (essendo $q+1$ i P_3 per un piano di $PG(4,q)$). Di conseguenza, r passa necessariamente per O. L'asserto rimarrà allora provato se mostriamo che in $PG(4,q)$ ogni retta per O incontra qualche retta di $\mathcal{F}$. Una qualsiasi retta r per O in $PG(4,q)$ non può incontrare due rette distinte s ed s' di $\mathcal{F}$, altrimenti il P_3 congiungente s ed s' conterrebbe la retta r, e quindi O ed i punti $A = s \cap \pi \in \mathcal{C}$, $A' = s' \cap \pi \in \mathcal{C}$, $\bar{A} = s \cap \bar{\pi} \in \bar{\mathcal{C}}$, $\bar{A}' = s' \cap \bar{\pi} \in \bar{\mathcal{C}}$, onde P_3 conterrebbe sia π che $\bar{\pi}$ e ciò é escluso. Pertanto, ogni retta per O ha al più un punto in comune con l'unione F delle rette di $\mathcal{F}$. D'altra parte, $F = |\mathcal{F}|(q+1) = (q^2+1)(q+1) = \vartheta_3$ e le rette di PG(4,q) per O sono anch'esse in numero di ϑ_3. Ne segue che ogni retta per O incontra F in uno ed un solo punto. Si ha così l'asserto.

Se in PG(4,q) dualizziamo la fibrazione $\mathcal{F}$ ora ottenuta, otteniamo una famiglia $\mathcal{P}$ di q^2+1 piani, a due a due incidenti in un solo punto, e tali che per ogni $\alpha \in \mathcal{P}$ i punti di α per ciascuno dei quali passa soltanto il piano α di $\mathcal{P}$ costituiscono una retta (duale del piano che da O proietta la retta a duale di α); le q^2+1 rette che così si ottengono al variare di α in $\mathcal{P}$, costituiscono una (q^2+1)-fibrazione $\mathcal{F}'$ dell'iperpiano ω duale del punto O, la quale é regolare, essendo costituita dalle rette congiungenti punti complessi coniugati delle rette p e $\bar{p}$ duali di π e $\bar{\pi}$. Nel piano di traslazione che ammette come retta impropria ω e relativo alla fibrazione $\mathcal{F}'$, la famiglia $\mathcal{P}$, a cui si aggiunga la retta impropria, costituisce un insieme di q^2+2 rette, a tre a tre non formanti fascio, cioé il duale di una ovale. Viceversa, dato in PG(4,q) un iperpiano ω ed in esso una (q^2+1)-fibrazione $\mathcal{F}'$, anche non regolare, se il piano di traslazione relativo alla fibrazione $\mathcal{F}'$ di ω (cfr. n. 1) contiene il duale di una ovale avente la retta impropria tra le sue rette, le q^2+1 rette, diverse dalla retta impropria, di tale ovale costituiscono un insieme $\mathcal{P}$ di q^2+1 piani di PG(4,q), a due a due congiunti da PG(4,q), e mai tre passanti per un medesimo punto. Dualizzando $\mathcal{P}$, si ottiene una (q^2+1)-fibrazione di PG(4,q), di tipo (0,1,2) che, come é immediato verificare, é completa.

Diamo ora un esempio di (q^2+1)-fibrazione di tipo (0,1,2) in PG(4,q) con q dispari. Siano π e $\bar{\pi}$ due piani di PG(4,q^2), complessi coniugati nella estensione quadratica del campo base di PG(4,q), congiunti da PG(4,q^2), cioé intersecantisi in un punto O di PG(4,q). Sia $\mathcal{C}$ una conica di π per O e $\bar{\mathcal{C}}$ la sua complessa coniugata in $\bar{\pi}$; sia poi τ il piano di PG(4,q) congiungente le rette tangenti in O rispettivamente a $\mathcal{C}$ ed a $\bar{\mathcal{C}}$. Le q^2 rette di PG(4,q) che congiungono coppie di punti complessi coniugati di $\mathcal{C} \setminus \{O\}$ e di $\bar{\mathcal{C}} \setminus \{O\}$ costituiscono (come subito si prova, con considerazioni analoghe alle precedenti) una q^2-fibrazione $\mathcal{F}$ di PG(4,q) di tipo (0,1,2). Ogni retta di $\mathcal{F}$ é sghemba con τ (infatti, se $r \in \mathcal{F}$ incontrasse τ, il P_3 congiungente r con τ dovrebbe contenere π e $\bar{\pi}$, e ciò é escluso). Ne segue che, se si aggiunge ad $\mathcal{F}$ una fissata retta di τ per O, si ottiene una $(q^2 + 1)$-fibrazione $\mathcal{F}'$ di tipo (0,1,2). La $\mathcal{F}'$ non é necessariamente completa; comunque, le eventuali rette aggregabili devono necessariamente appartenere ai P_3 per τ.

Quale che sia q, in PG(4,q) si consideri una k-fibrazione di classe [0,1,2] e sia m il massimo valore di k per cui esiste una tale k-fibrazione. Da quanto precede e dalla $(37)_I$ segue:

(38) $$q^2 + 1 \leq m \leq q^2 + q + 2.$$

In PG(4,q), per una k-fibrazione qualsivoglia risulta $k \leq q^3 + q$ (cfr. (2)). Vogliamo mostrare che esistono $(q^3 + 1)$-fibrazioni; ne seguirà che, se M é il massimo valore di K per cui esiste una k-fibrazione, risulta:

(39) $$q^3 + 1 \leq M \leq q^3 + q .$$

In $PG(4,q^3)$, ampliamento cubico di PG(4,q), si considerino tre rette r, $\bar{r}$, $\bar{\bar{r}}$ coniugate nella estensione cubica del campo base di PG(4,q), a due a due sghembe e congiunte dal $PG(4,q^3)$. Esiste allora una, ed una sola, retta, t, incidente r, $\bar{r}$, $\bar{\bar{r}}$; la t é, evidentemente, in PG(4,q) e siano T, $\bar{T}$, $\bar{\bar{T}}$ i punti di incontro di t con r, $\bar{r}$, $\bar{\bar{r}}$. Per ogni $P \in r \setminus \{T\}$, si considerino i punti suoi coniugati $\bar{P} \in \bar{r} \setminus \{\bar{T}\}$ e $\bar{\bar{P}} \in \bar{\bar{r}} \setminus \{\bar{\bar{T}}\}$. Tali tre punti non sono allineati e quindi sono congiunti da un piano α_P di PG(4,q). Al variare di P su $r \setminus \{T\}$, si ottengono q^3 piani distinti di PG(4,q), a due a due intersecantisi in un solo punto (altrimenti il P_3 che li congiunge dovrebbe contenere r, $\bar{r}$, $\bar{\bar{r}}$). Sia τ un qualsiasi fissato piano di PG(4,q) per t; anche τ incontra ciascuno dei q^3 piani suddetti in un sono punto (per un motivo analogo al precedente). Ne segue che l'insieme $\mathcal{P}$ di piani di PG(4,q), costituito da τ e dai q^3 piani di cui sopra, é tale che i suoi piani sono a due a due congiunti da PG(4,q).

Dualizzando $\mathcal{P}$ in PG(4,q), si ottiene allora una famiglia $\mathcal{F}$ di rette di PG(4,q) a due a due sghembe tra loro, cioé una (q^3+1)-fibrazione di PG(4,q). Pertanto, il limite inferiore nella (39) é raggiunto.

Sia $\mathcal{F}$ una qualsivoglia (q^3+1)-fibrazione di PG(4,q). Denotati con F l'unione delle rette di $\mathcal{F}$ e con $\mathcal{C}F$ il complementare di F, si ha: $|F| = (q^3+1)(q+1) = \vartheta_4 - q^2$, $|\mathcal{C}F| = \vartheta_4 - (\vartheta_4 - q^2) = q^2$. Si consideri un qualsiasi P_3 di PG(4,q) e sia n il numero delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a P_3; si ha: $|F \cap P_3| = (q^3+1-n) + n(q+1) = q^3+1+nq$; $|\mathcal{C}F \cap P_3| = \vartheta_3 - (q^3+1+nq) = q(q+1-n) = mq$, posto $m = q+1-n$ $(0 \leq m \leq q)$. Supponiamo ora che $\mathcal{F}$ non sia massimale. Esiste allora una retta r tutta contenuta in $\mathcal{C}F$. Non può accadere che ciascuno dei ϑ_2 piani per r abbia qualche punto in comune con $\mathcal{C}F$ non su r, in quanto, se così fosse, si avrebbe $|\mathcal{C}F| \geqslant \vartheta_2 + q + 1$, mentre é $|\mathcal{C}F| = q^2$. Esiste, dunque, un piano π per r che incontra $\mathcal{C}F$ soltanto in r. Ciascun P_3 per π, avendo in comune con $\mathcal{C}F$ almeno i $q+1$ punti di r, incontra $\mathcal{C}F$ in mq punti, con $m \geqslant 2$, e quindi contiene, oltre ai punti di r, almeno altri $q-1$ punti di $\mathcal{C}F$ tutti in $P_3 \setminus \pi$. Dato che i P_3 per π sono in numero di $q+1$, dovrà aversi $|\mathcal{C}F| \geqslant (q+1)(q-1) + q + 1 = q^2 + q$, e ciò é escluso, essendo $|\mathcal{C}F| = q^2$. L'assurdo prova che $\mathcal{F}$ é massimale. Pertanto, risulta dimostrata la seguente proposizione:

VIII. - <u>In PG(4,q) ogni (q^3+1)-fibrazione é massimale e quindi non esistono k-fibrazioni con $k > q^3+1$. Dato che esistono (q^3+1)-fibrazioni, il massimo numero di rette a due a due sghembe di PG(4,q) é $M = q^3+1$.</u>

Il risultato ora stabilito vale più in generale, come mostra la proposizione successiva.

IX. - <u>In PG(2s,q) il massimo numero di rette a due a due sghembe é</u>

$$M_{2s,q} = q^3\left(\sum_{i=0}^{s-2} q^{2i}\right) + 1 \quad . \tag{40}$$

<u>Dim.</u> L'asserto é vero per $s = 2$ (cfr. prop. VIII); possiamo allora procedere per induzione rispetto ad s, supporré, cioé, $s > 2$, vero l'asserto per $s - 1$, e dimostrarlo per s. Cominciamo a provare che in PG(2s,q) esiste una fibrazione $\mathcal{F}$ con $M_{2s,q}$ rette. Nello spazio $\mathbb{P}_{2s-2}$ di equazioni $x_{2s-1} = x_{2s} = 0$ si consideri una omografia ω priva di punti uniti (certamente esistente, come é ben noto), di equazioni:

$$x'_i = \sum_{j=0}^{2s-2} a_{ij}x_j \quad , \qquad (i = 0,\dots, 2s - 2).$$

In PG(2s,q) si consideri poi l'omografia Ω, di equazioni:

$$\begin{cases} x'_i = \sum_{j=0}^{2s-2} a_{ij}x_j & (i = 0,\dots,2s - 2) \\ x'_{2s-1} = x_{2s} \\ x'_{2s} = x_{2s-1} & . \end{cases}$$

La Ω muta l'iperpiano, π , $x_{2s-1} = 0$ nell'iperpiano, π', $x_{2s} = 0$, e viceversa; ha unito, come sostegno, il $\mathbb{P}_{2s-2}$ di equazioni $x_{2s-1} = x_{2s} = 0$, inducendo in esso l'omografia ω. Per ogni punto $P \in \pi \setminus \mathbb{P}_{2s-2}$, si ha che $P' = \Omega(P) \in \pi' \setminus \mathbb{P}_{2s-2}$, rimane allora determinata la retta PP'. Al variare di P in $\pi \setminus \mathbb{P}_{2s-2}$, si ottengono q^{2s-1} rette distinte, a due a due sghembe tra loro; infatti, se PP' e QQ' ($P\in\pi\setminus \mathbb{P}_{2s-2}$, $P' = \Omega(P)$, $Q \in \pi\setminus \mathbb{P}_{2s-2}$, $Q' = \Omega(Q)$, $P \neq Q$) fossero incidenti, le rette PQ e P'Q' dovrebbero necessariamente incontrarsi in un punto A di $\mathbb{P}_{2s-2}$, il quale dovrebbe essere unito in ω, in quanto le rette PQ e P'Q' sono corrispondenti in Ω ; ma ciò é escluso, essendo ω priva di punti uniti. Sia $\mathcal{F}'$ la (q^{2s-1})-fibrazione così ottenuta. Tutte le rette di $\mathcal{F}'$ sono, evidentemente, sghembe con $\mathbb{P}_{2s-2}$. Sia $\mathcal{F}''$ una fibrazione di $\mathbb{P}_{2s-2}$ contenente $q^3 (\sum_{i=0}^{s-3} q^{2i}) + 1$ rette, certamente esistente, per l'induzione ammessa. Allora $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$ é una fibrazione di PG(2s,q), le cui rette sono in numero di

$$q^{2s-1} + q^3 (\sum_{i=0}^{s-3} q^{2i}) + 1 = M_{2s,q} .$$

Rimane da provare che in PG(2s,q) non esistono $(M_{2s,q} + 1)$-fibrazioni. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una tale fibrazione $\mathcal{F}_1$. Sia r una sua retta e sia $\mathcal{F}$ la $(M_{2s,q})$-fibrazione che si ottiene sopprimendo da $\mathcal{F}_1$ la retta r. Sia F l'unione delle rette di $\mathcal{F}$ e sia $\mathcal{C}F = PG(2s,q) - F$. Si ha $|F| = M_{2s,q}(q + 1) = \vartheta_{2s} - q^2$ e quindi $|\mathcal{C}F| = q^2$. Consideriamo un qualsiasi iperpiano $\mathbb{P}_{2s-1}$ e siano n le rette di $\mathcal{F}$ ad esso appartenenti; si ha

$$|F \cap \mathbb{P}_{2s-1}| = |\mathcal{F}| - n + n(q + 1) = |\mathcal{F}| + nq = M_{2s,q} + nq =$$

$$= q^3(\sum_{i=0}^{s-2} q^{2i}) + 1 + nq .$$

Quindi

$$|\mathcal{C}F \cap \mathbb{P}_{2s-1}| = \vartheta_{2s-1} - (q^3 \sum_{i=0}^{s-2} q^{2i} + 1 + nq) =$$

$$= q(\vartheta_{2s-2} - q^2 \sum_{i=0}^{s-2} q^{2i} - n) = q(q(\sum_{i=0}^{s-2} q^{2i}) - 1 - n) = mq,$$

con $0 \leq m \leq q(\sum_{i=0}^{s-2} q^{2i}) - 1$.

La retta r é contenuta in $\mathcal{C}F$. Non può accadere che ciascuno dei ϑ_{2s-2} piani per r abbia in comune con $\mathcal{C}F$ almeno un punto non su r, altrimenti si avrebbe $|\mathcal{C}F| \geq \vartheta_{2s-2} + (q + 1)$ e quindi (essendo $s > 2$, e cioé $\vartheta_{2s-2} > \vartheta_2$) sarebbe $|\mathcal{C}F| > q^2$, mentre é $|\mathcal{C}F| = q^2$. Esiste, dunque, un piano $\overline{\mathbb{P}}_2$ per r che incontra $\mathcal{C}F$ soltanto in r. Proviamo che, per ogni t con $2 \leq t \leq 2s - 2$, esiste un $\overline{\mathbb{P}}_t$ per r che incontra $\mathcal{C}F$ solamente in r. Dato che ciò é vero per $t = 2$, possiamo procedere per induzione rispetto a t; supporre cioé $t > 2$, vero l'asserto per $t - 1$ e dimostrarlo per t. Esiste allora un $\overline{\mathbb{P}}_{t-1}$ per r che incontra $\mathcal{C}F$ soltanto in r; non può accadere che ogni $\mathbb{P}_t$ per tale $\overline{\mathbb{P}}_{t-1}$ abbia in comune con $\mathcal{C}F$ almeno un punto non su $\overline{\mathbb{P}}_{t-1}$; altrimenti, dato che i $\mathbb{P}_t$ per $\overline{\mathbb{P}}_{t-1}$ sono in numero di ϑ_{2s-t}, si avrebbe $|\mathcal{C}F| \geqslant \vartheta_{2s-t} + q + 1 \geqslant \vartheta_2 + q + 1$ (essendo $t \leq 2s - 2$ e quindi $2 \leq 2s - t$, cioé $\vartheta_2 \leq \vartheta_{2s-t}$), onde $|\mathcal{C}F| > q^2$, mentre é $|\mathcal{C}F| = q^2$. Pertanto, esiste un $\overline{\mathbb{P}}_t$ per $\overline{\mathbb{P}}_{t-1}$ che incontra $\mathcal{C}F$ soltanto in r. Ne segue che esiste un $\overline{\mathbb{P}}_{2s-2}$ che incontra $\mathcal{C}F$ soltanto in r. Ogni iperpiano per $\overline{\mathbb{P}}_{2s-2}$ contiene r e quindi ha in comune con $\mathcal{C}F$ almeno $q + 1$ punti; d'altra parte (cfr. fine **capoverso** precedente), esso incontra $\mathcal{C}F$ in mq punti, onde deve essere $mq \geqslant q + 1$, ossia $m \geqslant 2$. Ne segue che ogni iperpiano per $\overline{\mathbb{P}}_{2s-2}$ ha almeno $q - 1$ punti in comune con $\mathcal{C}F$ non su $\overline{\mathbb{P}}_{2s-2}$. Dato che gli iperpiani per $\overline{\mathbb{P}}_{2s-2}$ sono in numero di $q + 1$, si ha $|\mathcal{C}F| \geqslant (q - 1)(q + 1) + q + 1 = q^2 + q > q^2$, e ciò é assurdo, essendo $|\mathcal{C}F| = q^2$. L'asserto é così completamente provato.