Giuseppe Tallini

Varietà di sistemi di Steiner

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G.Tallini

n.88 Settembre 1988

VARIETA' DI SISTEMI DI STEINER

G. Tallini (Roma)

1. Definizione e prime proprieta' di una varieta' di sistemi di Steiner

Consideriamo uno spazio parziale di rette, cioe' una coppia $[V, L]$ ove V e' un insieme ($\neq \emptyset$) i cui elementi chiameremo punti ed L e' una famiglia di parti di V, i cui elementi chiameremo rette, tale che:

(1.1) L e' un ricoprimento di V; $\forall\, l \in L$, $|l| \geq 2$.

(1.2) Per ogni x, y di V, con $x \neq y$, esiste al piu' una retta per x ed y. Se esiste tale retta diremo che x e' congiungibile con y e scriveremo $x \sim y$, in caso contrario diremo che x e' incongiungibile con y e scriveremo $x \nsim y$.

Diremo che $[V, L]$ e' uno spazio di rette se per ogni x, y di V, con $x \neq y$, esiste la retta per x ed y cioe':

$$\forall\, x, y \in V,\ x \neq y \Longrightarrow x \sim y$$

In caso contrario cioe' se esistono x, y in V, con $x \neq y$, tali che $x \nsim y$, diremo che $[V, L]$ e' uno spazio parziale di rette proprio. Nel seguito supporremo che

$[V,L]$ sia proprio.

Chiamasi <u>poligonale</u> di $[V,L]$ una n-pla ordinata di rette $[l_1, l_2, \dots, l_n]$ tale che $|l_i \cap l_{i+1}| = 1$, $i = 1, \dots, n-1$.

$[V,L]$ si dira' <u>connesso</u> se per ogni x, y di V esiste una poligonale $[l_1, l_2, \dots, l_n]$ tale che $x \in l_1$ ed $y \in l_n$. Nel seguito supporremo $[V,L]$ connesso (potendoci sempre ridurre a tale caso, passando alle componenti connesse).

Chiamasi <u>sottospazio</u> di $[V,L]$ un sottoinsieme T di V tale che:

(1.3) $\forall\, x, y \in T,\ x \neq y \Longrightarrow x \sim y$ <u>e la retta xy e' contenuta in T.</u>

Un sottospazio dicesi <u>massimale</u> se non e' contenuto propriamente in nessun altro sottospazio. Evidentemente il $\emptyset$, ogni punto di V ed ogni retta di V e' un sottospazio ed ogni sottospazio di V e' contenuto in un sottospazio massimale.

Nel seguito supporremo V finito e porremo:

$$|V| = v. \tag{1.4}$$

Chiameremo <u>varieta' di spazi di rette</u> uno spazio parziale di rette proprio finito $[V,L]$ tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

I. - <u>Gli spazi massimali di $[V,L]$ si distribuiscono in m famiglie disgiunte $S_1, S_2, \dots, S_m$ tali che tutti gli spazi di una stessa famiglia S_h abbiano la stessa cardinalita' u_h, cioe':</u>

(1.5) $$T_h \in S_h \longrightarrow |T_h| = u_h , \quad h = 1, 2, \dots, m.$$

II. - <u>Il numero dei sottospazi di S_h per un punto x di V e' una costante n_h al variare di x in V ($h=1,2,\dots m$).</u>

La varieta' $[V,L]$ si dira' <u>relativa</u> alle famiglie $S_1, S_2, \dots, S_m$.

Se le rette di $[V,L]$ hanno cardinalita' $k_1, k_2, \dots k_s$ con $2 \le k_1 < k_2 < \dots < k_s$, diremo che la varieta' di spazi di rette $[V,L]$ ha <u>parametri</u>:

(1.6) $$(v = |V|, k_1, k_2, \dots, k_s; u_1, u_2, \dots, u_m; n_1, n_2, \dots, n_m).$$

Proviamo che se $[V,L]$ e' una varieta' di spazi di rette di parametri (1.6) si ha:

(1.7) $$|S_h| = v \cdot n_h / u_h , \quad h = 1, 2, \dots m.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia N il numero delle coppie (x, T_h) ove $x \in V$, $T_h \in S_h$ e $x \in T_h$. Poiche' per ogni x di V passano n_h spazi di S_h si ha: $N = vn_h$. Poiche' ogni $T_h \in S_h$ ha u_h punti, si ha: $N = |S_h| u_h$, onde

$$N = vn_h = |S_h| u_h$$

e quindi la (1.7).

Dalla (1.7) si ha che condizione necessaria perche' esista una varieta' $[V,L]$ di parametri (1.6) e' che u_h divida vn_h, per ogni $h = 1, 2, \dots m$.

Una varieta' $[V,L]$ sara' detta <u>sottile di indice h</u> se e' verificata la proprieta':

(1.8) $$\forall\ T_h,\ T'_h \in S_h \longrightarrow |T_h \cap T'_h| \leq 1.$$

Diremo che $[V,L]$ e' <u>sottile</u> se lo e' per ogni indice $h = 1, 2, \dots m$.

Una varieta' $[V,L]$ sara' detta <u>varieta' di sistemi di Steiner</u> se le rette hanno tutte la stessa cardinalita' k, cioe':

III. - $\underline{\forall\ l \in L,\ |l| = k}$.

Diremo allora che essa ha parametri:

(1.9) $$(v = |V|,\ k;\ u_1,\ u_2, \dots,\ u_m;\ n_1, n_2, \dots, n_m).$$

In tal caso ogni spazio massimale $T_h \in S_h$ e' un sistema di Steiner $S(2,\ k,\ u_h)$ e quindi deve aversi:

(1.10) $\tau_h = (u_h-1)/(k-1) = \underline{n^o \text{ rette di } T_h \text{ per } x \in T_h},$

(1.11) $|L_{T_h}| = u_h(u_h-1)/k(k-1) = \underline{n^o \text{ rette di } T_h}.$

Sia $[V,L]$ una varieta' di spazi di rette. Per ogni x di V sia S_x l'insieme delle rette di $[V,L]$ per il punto x e Γ_x l'unione delle rette di S_x. Γ_x rispetto alle rette di $[V,L]$ contenute in Γ_x e' uno spazio parziale di rette, che chiameremo <u>cono tangente</u> in x a $[V,L]$ di <u>vertice</u> x.

Se per ogni x ed y di V i coni Γ_x e Γ_y sono isomorfi mediante un isomorfismo che muta x in y diremo che $[V,L]$ e' una <u>varieta' uniforme</u>.

Qualsiasi sia la varieta' $[V,L]$, se l_1, $l_2 \in S_x$, con $l_1 \neq l_2$, si possono presentare due eventualita' a seconda che esista un sottospazio di $[V,L]$ contenente l_1 ed l_2 oppure non esista. Nel primo caso sia $R_x(l_1,l_2)$ il sottospazio di $[V,L]$ intersezione di tutti i sottospazi contenenti l_1 ed l_2 (cioe' il minimo sottospazio contenente l_1 ed l_2).

Sia R_x la famiglia di parti di S_x, ciascuna costituita dagli elementi di S_x appartenenti ad $R_x(l_1,l_2)$, al variare di l_1 ed l_2 in S_x (in modo che $l_1 \neq l_2$ ed esista un sottospazio contenente l_1 ed l_2). Supponiamo che ogni $l \in L$ non sia massimale in $[V,L]$. Allora (ed allora soltanto), per ogni x di V, R_x e' un ricoprimento di S_x e $[S_x,R_x]$ e' uno spazio parziale di rette che diremo <u>tangente</u> in x a $[V,L]$. La varieta' $[V,L]$ sara' detta <u>normale</u> se, per ogni x di V, $[S_x,R_x]$ e' una varieta' di spazi di rette. Evidentemente se $[V,L]$ e' normale ed uniforme i suddetti spazi tangenti $[S_x,R_x]$ sono tra loro isomorfi al variare di x in V.

Nel seguito $[V,L]$ denotera' sempre una varieta' di sistemi di Steiner di parametri (1.9).

Diremo che $[V, L]$ e' *speciale di indice h se ogni retta appartiene a qualche* $T_h \in S_h$. Diremo che $[V, L]$ e' speciale se lo e' per ogni $h = 1, 2, \dots m$.

Proviamo che:

(1.12) *Se $[V, L]$ e' sottile di indice h, allora risulta:*

$$|L| \geq \frac{v n_h (u_h - 1)}{k(k-1)},$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, $[V, L]$ e' speciale di indice h.

Dimostrazione. Sia N il numero delle coppie (x, l) con $x \in V$, $l \in L$ e $x \in l$. Risulta $N = k|L|$. Se $[V, L]$ e' sottile di indice h, due T_h, $T_h' \in S_h$ per x hanno solamente x in comune (cfr.(1.8)). D'altra parte le rette per x di T_h sono in numero di $(u_h - 1)/(k-1)$ (cfr.(1.10)) e gli spazi T_h per x di S_h sono in numero di n_h. Quindi risulta $N \geq v n_h (u_h - 1)/(k-1)$, il segno d'uguaglianza avendosi se, e solo se, ogni retta appartiene a qualche $T_h \in S_h$. Ne segue l'asserto.

(1.13) *Se $[V, L]$ e' speciale di indice h, allora risulta:*

$$|L| \leq \frac{v n_h (u_h - 1)}{k(k-1)},$$

il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se,

$[V,L]$ e' sottile di indice h.

Dimostrazione. Sia N il numero delle coppie (x, l) con $x \in V$, $l \in L$ e $x \in l$. Risulta $N = k|L|$. Se $[V,L]$ e' speciale di indice h ogni retta appartiene a qualche $T_h \in S_h$. D'altra parte le rette per x di T_h sono in numero di $(u_h-1)/(k-1)$ e gli spazi T_h per x di S_h sono in numero di n_h, due di tali spazi potendo pero' avere delle rette in comune, onde $N \leq vn_h(u_h-1)/(k-1)$, il segno d'uguaglianza avendosi se, e solo se, vale la (1.8), ne segue l'asserto.

Da (1.12), (1.13) si ha:

(1.14) $[V,L]$ speciale e sottile $\rightarrow |L| = \dfrac{vn_h(u_h-1)}{k(k-1)}$,

$h = 1,2,\ldots m \;\rightarrow\; n_1(u_1-1) = n_2(u_2-1) = \ldots = n_m(u_m-1)$.

Ad ogni varieta' $[V,L]$ (e piu' in generale ad ogni spazio parziale di rette) e' associato il grafo $G[V,L]$ che ha come vertici gli elementi di V ed in cui due vertici x, y (con $x \neq y$) sono adiacenti quando x e' congiungibile con y, cioe' $x \sim y$. Evidentemente ogni sottospazio di $[V,L]$ e' un sottografo completo di $G[V,L]$, ma non e' vero il viceversa.

Sia λ_x il numero delle rette di $[V,L]$ per $x \in V$. Evidentemente il numero degli $y \in V$ adiacenti ad x in $G[V,L]$ e' dato da $\lambda_x(k-1)$. Ne segue che $G[V,L]$ e' regolare (cioe' e' costante il numero dei vertici adiacenti ad ogni $x \in V$) se, e solo se, e' costante il numero λ_x delle rette di $[V, L]$ per ogni x di V. In tal caso $[V, L]$ sara' detta <u>regolare</u>.

Se $[V, L]$ e' speciale e sottile di indice h risulta $\lambda_x = n_h(u_h-1)/(k-1)$ e quindi λ_x e' costante onde:

(1.15) $[V, L]$ <u>speciale e sottile di indice h</u> $\longrightarrow$ $[V, L]$ <u>regolare</u>.

2. - Esempi di varieta' di sistemi di Steiner

Esempio I. - Quadriche non singolari di $PG(2s,q)$, $s \geq 2$.

Sia $Q_{2s,q} = Q$ una quadrica non singolare di uno spazio di Galois $PG(2s,q)$, $s \geq 2$. Essa, rispetto alla famiglia L delle rette ivi contenute, e' uno spazio parziale di rette proprio connesso. Risulta, come e' noto,

$$|Q| = \theta_{2s-1} = \sum_{i=0}^{2s-1} q^i \; ;$$

inoltre gli spazi massimali di Q costituiscono un unico sistema S_1 ed ogni tale spazio ha dimensione $s-1$ e quindi ha $\theta_{s-1} = \sum_{i=0}^{s-1} q^i$ punti. Infine per ogni $x \in Q$ passano $n_1 = \prod_{i=1}^{s-1} (q^i + 1)$ spazi massimali, come si puo' facilmente provare per induzione (tenuto conto che l'iperpiano tangente in x a Q interseca Q in un cono proiettante da x una $Q_{2s-2,q}$). Ne segue che $\left[Q_{2s,q}, L\right]$ e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(v=\theta_{2s-1}, k=q+1 \, ; u_1=\theta_{s-1} ; n_1 = \prod_{i=1}^{s-1} (q^i + 1)).$$

Essa e' speciale, per $s=2$ e' sottile mentre per $s\geq 3$ non lo e', inoltre per $s\geq 3$ e' normale ed e' uniforme per $s\geq 2$.

Esempio II. - Quadriche iperboliche di PG(2s+1,q).

Sia $Q^{+}_{2s+1,q} = Q^{+}$ una quadrica non singolare iperbolica di PG(2s+1,q). Essa, rispetto alla famiglia L delle rette ivi contenute, e' uno spazio parziale di rette proprio connesso. Risulta, come e' noto,

$$|Q^{+}| = \theta_{2s} + q^{s};$$

inoltre gli spazi massimali di Q^{+} hanno ciascuno dimensione s e quindi θ_{s} punti; essi si distribuiscono su due sistemi S_1 e S_2, quelli di uno stesso sistema si incontrano in spazi la cui dimensione ha la stessa parita' di s, quelli di sistemi diversi in spazi la cui dimensione ha parita' opposta a quella di s. Infine risulta $|S_1|=|S_2|=\sigma^{+}_{2s+1}$, ove σ^{+}_{2s+1} si ricava induttivamente da:

$$(2.1) \qquad \theta_{s}\sigma^{+}_{2s+1} = (\theta_{2s} + q^{s})\sigma^{+}_{2s-1} \;, \; \sigma^{+}_{1} = 1 \;,$$

e per ogni $x \in Q^{+}$ passano $n_1 = \sigma^{+}_{2s-1}$ spazi di S_1 ed $n_2 = \sigma^{+}_{2s-1}$ spazi di S_2. Ne segue che $\left[Q^{+}_{2s+1}, L \right]$ e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(v=\theta_{2s}+q^{s}, k=q+1; u_1=\theta_{s}, u_2=\theta_{s}; n_1=\sigma^{+}_{2s-1}, n_2=\sigma^{+}_{2s-1}).$$

Essa e' speciale, per s≥2 e' normale ed uniforme, per s≤2 e' sottile ma non lo e' per s≥3.

Esempio III. - Quadriche ellittiche di PG(2s+1,q), $s\geq 2$.

Sia $Q^-_{2s+1,q} = Q^-$ una quadrica non singolare ellittica di PG(2s+1,q), $s\geq 2$. Essa, rispetto alla famiglia L delle rette ivi contenute, e' uno spazio parziale di rette proprio connesso. Risulta, come e' noto,

$$|Q^-| = \theta_{2s} - q^s;$$

inoltre gli spazi massimali di Q^- hanno ciascuno dimensione s-1 e quindi θ_{s-1} punti; essi costituiscono un solo sistema S_1. Risulta $|S_1|=\sigma^-_{2s+1}$, ove σ^-_{2s+1} si ricava induttivamente da:

$$(2.2)\qquad \theta_{s-1}\sigma^-_{2s+1} = (\theta_{2s} - q^s)\sigma^-_{2s-1}\ ,\quad \sigma^-_1 = 1\ ,$$

e per ogni $x \in Q^-$ passano $n_1 = \sigma^-_{2s-1}$ spazi di S_1. Ne segue che $\left[\, Q^-_{2s+1}, L \,\right]$ e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(v=\theta_{2s}-q^s, k=q+1; u_1=\theta_{s-1}; n_1=\sigma^-_{2s-1}).$$

Essa e' speciale, per $s\geq 3$ e' normale ed e' uniforme per $s\geq 2$, per s=2 e' sottile ma non lo e' per $s\geq 3$.

Esempio IV. - Forme hermitiane non singolari di $PG(r,q)$.

Sia $q = p^{2h}$ (p primo) ed $n = \sqrt{q} + 1$. Ricordiamo che chiamasi forma hermitiana non singolare di $PG(r,q)$ il luogo dei punti, $H_{r,q} = H$, di $PG(r,q)$ soddisfacenti l'equazione:

(2.3) $$\sum_{i=0}^{r} x_i^n = 0.$$

Ogni retta di $PG(r,q)$ non contenuta in H incontra H in n punti distinti (retta n-secante) o in un sol punto (retta tangente). Le rette per un punto x di H tangenti in x ovvero appartenenti ad H costituiscono un iperpiano τ che dicesi tangente in x ad H, il quale incontra $H = H_{r,q}$ in un cono proiettante da x una forma hermitiana $H_{r-2,q}$ di un S_{r-2} di τ non per x. Ne segue che:

(2.4) $$\begin{cases} |H_{r,q}| = q^{r-1}\sqrt{q} + q|H_{r-2,q}| + 1, \\ |H_{2,q}| = q\sqrt{q} + 1 \end{cases}$$

e quindi, procedendo induttivamente, si ha:

(2.5) $$|H_{2s,q}| = \theta_{s-1}(q^s\sqrt{q}+1), \qquad |H_{2s+1,q}| = \theta_s(q^s\sqrt{q}+1).$$

Inoltre gli spazi massimali di $H_{r,q}$ costituiscono un solo sistema S_1 di spazi di dimensione s-1 se $r=2s$, di dimensione s se $r=2s+1$, onde ogni spazio massimale ha

θ_{s-1} punti se r=2s, θ_s punti se r=2s+1. Infine si ha $|S_1| = \rho_{r,q}$ ove $\rho_{r,q}$ si ottiene induttivamente dalle:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \rho_{2s,q} = \rho_{2s-2,q}(q^s\sqrt{q}+1)\ , & \rho_{0,q}=1\ , \\ \rho_{2s+1,q} = \rho_{2s-1,q}(q^s\sqrt{q}+1)\ , & \rho_{1,q}=\sqrt{q}+1. \end{cases}$$

Da quanto precede si ha che per ogni punto x di $H_{r,q}$ passano $\rho_{r-2,q}$ spazi massimali.

Se $r\geq 3$, $H_{r,q}$ contiene rette, anzi, se L e' la famiglia di rette di $H_{r,q}$, si ha che $(H_{r,q},L)$ e' uno spazio parziale di rette proprio connesso, che risulta una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(v=\theta_{s-1}(q^s\sqrt{q}+1),k=q+1;u_1=\theta_{s-1};n_1=\rho_{2s-2,q})$$

se r=2s, di parametri

$$(v=\theta_s(q^s\sqrt{q}+1),k=q+1;u_1=\theta_s;n_1=\rho_{2s-1,q})$$

se r=2s+1. Essa e' sempre speciale, se $r\geq 5$ e' normale ed e' uniforme per $r\geq 3$, e' sottile se $r\leq 4$ mentre non lo e' se $r \geq 5$.

Esempio V . - Grassmanniane degli S_h di $PG(r,q)$.

E' noto che gli S_h di $PG(r,q)$, $1 \le h \le r-2$, si possono rappresentare, con le loro coordinate plücheriane, mediante punti di una varieta', intersezione di quadriche, $G_{r,h,q}$ appartenente a $PG(R,q)$ ove $R = \binom{r+1}{h+1} - 1$. La $G_{r,h,q}$ dicesi varieta' grassmanniana rappresentativa degli S_h di $PG(r,q)$. In tale rappresentazione un fascio di S_h (cioe' l'insieme degli S_h per un fissato S_{h-1} appartenenti ad un dato $S_{h+1} \supset S_{h-1}$) si muta in una retta di $G_{r,h,q}$ e viceversa. Si ha poi:

$$|G_{r,h,q}| = \prod_{i=0}^{h} \theta_{r-i} / \theta_{h-i}. \tag{2.7}$$

Se L e' la famiglia delle rette di $G_{r,h,q}$ otteniamo che $[G_{r,h,q}, L]$ e' uno spazio parziale di rette proprio e connesso. Inoltre uno spazio massimale di $G_{r,h,q}$ o e' l'immagine della totalita' degli S_h appartenenti ad un fissato S_{h+1} di $PG(r,q)$ (onde contiene $u_1 = \theta_{h+1}$ punti) e sia S_1 la famiglia di tali spazi massimali, ovvero e' l'immagine di una stella di S_h in $PG(r,q)$ (cioe' la totalita' degli S_h per un fissato S_{h-1} in $PG(r,q)$), essa contiene $u_2 = \theta_{r-h}$ elementi) e sia S_2 la famiglia di quest'ultimi spazi massimali.

Per ogni punto x di $G_{r,h,q}$ gli spazi di S_1 per x

sono in numero di θ_{r-h-1} (tanti quanti gli S_{h+1} per un $S_h \longleftrightarrow x$); gli spazi di $\mathbf{S}_2$ per x sono in numero di θ_h (tanti quanti gli S_{h-1} di un $S_h \longleftrightarrow x$). Infine ogni retta di $G_{r,h,q}$ e' contenuta in un solo spazio di $\mathbf{S}_1$ e in un solo spazio di $\mathbf{S}_2$.

Ne segue che $\left[G_{r,h,q}, L\right]$ e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$\left[v = |G_{r,h,q}| = \prod_{i=0}^{h} \theta_{r-i} / \theta_{h-i},\ k=q+1;\ u_1=\theta_{h+1}, u_2=\theta_{r-h};\ n_1 = \theta_{r-h-1},\ n_2=\theta_h \right].$$

Essa e' speciale, normale uniforme e sottile.

Esempio VI. Varieta' prodotto di C. Segre.

Siano dati due spazi di Galois $PG_1(h,q)$ e $PG_2(k,q)$, con $h,\ k \geq 1$, e siano $(x_0,x_1,\dots,x_h)$ e $(y_0,y_1,\dots,y_k)$ rispettivamente le coordinate di punto nel primo e nel secondo spazio. Posto $r = (h+1)(k+1)-1$, nello spazio $PG(r,q)$ di coordinate (X_{ij}), $i=0,1,\dots,h$, $j=0,1,\dots,k$, si consideri la varieta' algebrica di equazioni parametriche:

(2.8) $\qquad X_{ij} = x_i y_j \ , \ (\ i = 0,1,\dots,h,\ j = 0,1,\dots,k).$

Essa prende il nome di varieta' prodotto di C. Segre degli spazi $PG_1(h,q)$ e $PG_2(k,q)$ e sara' denotata con $S_{h\times k,q}$.

Fissato un punto x di $PG_1(h,q)$ ed una retta l_2 di $PG_2(k,q)$ (l_2: $y_j = \lambda y_j' + \mu y_j''$; $y' \neq y''$) in $S_{h\times k,q}$ il luogo dei punti $X_{ij} = x_i(\lambda y_j' + \mu y_j'')$ e' una retta (passante per $(x_i y_j')$ e $(x_i y_j'')$).

Analogamente fissato un punto y di $PG_2(k,q)$ ed una retta l_1 di $PG_1(h,q)$ (l_1: $x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$; $x' \neq x''$) in $S_{h\times k,q}$, $X_{ij} = (\lambda x_i' + \mu x_i'')y_i$ e' una retta (passante per $(x_i'\ y_j)$ e $(x_i''\ y_j)$). Ne segue che $S_{h\times k,q}$,rispetto alle rette che le appartengono, e' uno spazio parziale di rette. Gli spazi massimali di $S_{h\times k,q}$ si ottengono tutti e soli nel modo seguente. Fissato un punto $\bar{X} = (\bar{x}_i\bar{y}_j)$ di $S_{h\times k,q}$ il luogo dei punti $X_{ij} = x_i\bar{y}_j$ e' uno spazio massimale h-dimensionale per $\bar{X}$ ed il luogo dei punti $x_{ij}=\bar{x}_i y_j$ e' uno spazio massimale k-dimensionale per $\bar{X}$. Dunque in $S_{hxk,q}$ gli spazi massimali si distribuiscono in due famiglie S_1, costituita da spazi h-dimensionali, ed S_2, costituita da spazi k-dimensionali. Gli spazi di una stessa famiglia sono a due a due sghembi tra loro quelli di famiglie diverse si incontrano in un sol punto. Si ha

$$|S_1| = \theta_k \ , \ |S_2| = \theta_h \ , \ |S_{hxk,q}| = \theta_h\theta_k .$$

Ne segue che $S_{hxk,q}$, rispetto alle sue rette, e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(\ v= \theta_h\theta_k \ , \ q+1 \ ; \ \theta_h \ , \ \theta_k \ ; \ 1 \ , \ 1 \ );$$

essa e' sottile ma non e' speciale ne' normale ma e' uniforme.

Se h = k = 1 la $S_{1x1,q}$ e' una quadrica iperbolica di PG(3,q). Se h=1, k=2 la $S_{1x2,q}$ e' una varieta' algebrica 3-dimensionale di PG(5,q) che si puo' ottenere come luogo delle rette appoggiate a tre piani a due a due sghembi di PG(5,q), ovvero come luogo delle rette congiungenti punti corrispondentisi in una proiettivita' tra due piani sghembi di PG(5,q).

In generale se h = 1 la $S_{1xk,q}$ e' una varieta' algebrica (k+1)-dimensionale di PG(2k+1,q) che si ottiene come luogo delle rette appoggiate a tre S_k a due a due sghembi di PG(2k+1,q), ovvero come luogo delle rette congiungenti punti corrispondentisi in una proiettivita' tra due S_k sghembi di PG(2k+1,q).

Se $PG_1(h,q) = PG_2(k,q)$ in $S_{h \times k,q}$ la sottovarieta' algebrica di equazioni $X_{ij} = x_i x_j$ (varieta' diagonale di $S_{h \times k,q}$) prende il nome di <u>varieta' di Veronese</u> di $PG(h,q) = PG_1(h,q)$ ed e' l'immagine proiettiva del sistema lineare di tutte le quadriche di PG(h,q).

In modo analogo si definiscono le varieta' prodotto di C. Segre di m spazi di Galois

$$PG_1(h_1,q),\ PG_2(h_2,q),\ \ldots,\ PG_m(h_m,q).$$

Precisamente posto $r = (h_1+1)(h_2+1)\cdot \ldots \cdot(h_m+1)-1$ e denotate con $(x_0^s, x_1^s, \ldots, x_{h_s}^s)$ le coordinate di punto di $PG_s(h_s,q)$, per $s = 1, 2, \ldots, m$, definiscesi <u>varieta' prodotto di C. Segre</u> degli spazi $PG_1(h_1,q)$, $PG_2(h_2,q)$, ..., $PG_m(h_m,q)$ la varieta' algebrica, $S_{h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_m,q}$, di PG(r,q) di equazioni parametriche

(2.9) $\quad X_{i_1 i_2 \ldots i_m} = x^1_{i_1} x^2_{i_2} \ldots x^m_{i_m}$ [illegible].

La $S_{h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_m,q}$ e' rigata anzi rispetto alle sue rette e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri $(v = \theta_{h_1} \cdot \theta_{h_2} \cdot \ldots \cdot \theta_{h_m},\ q+1;\ \theta_{h_1}, \theta_{h_2}, \ldots, \theta_{h_m};\ 1, 1, \ldots, 1)$.

Essa e' sottile ma non e' speciale ne' normale ma e' uniforme.

Se $PG_1(h_1,q) = PG_2(h_2,q) = \dots, = PG_m(h_m,q) = PG((h,q)$ la sottovarieta' algebrica di $S_{h_1 x h_2 x..x h_m, q}$ di equazioni parametriche

$$X_{i_1 i_2 \dots i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

(varieta' diagonale di $S_{hxhx..xh,q}$) prende il nome di <u>varieta' di Veronese di indice</u> m di PG(h,q). Essa e' l'immagine proiettiva del sistema lineare di tutte le ipersuperfici algebriche di ordine m di PG(h,q).

Esempio VII. Prodotti di sistemi di Steiner.

Siano dati m sistemi di Steiner $S_1(2,k,v_1) = \left[S_1, L_1\right]$, $S_2(2,k,v_2) = \left[S_2, L_2\right]$, ..., $S_m(2,k,v_m) = \left[S_m, L_m\right]$. Nel prodotto cartesiano $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$ consideriamo la famiglia di parti, L, definita nel modo seguente. Fissato un $l_i \in L_i$ e un $x_t \in S_t$ per ogni $t \neq i$, si ponga:

$$x_1 \times \ldots \times x_{i-1} \times l_i \times x_{i+1} \times \ldots \times x_m = \tag{2.10}$$

$$= \left\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in S:\ y_i \in l_i\right\}$$

e sia:

$$L = \left\{x_1 \times \ldots \times x_{i-1} \times l_i \times x_{i+1} \times \ldots \times x_m : l_i \in L_i,\right. \tag{2.11}$$

$$\left. x_t \in S_t,\ t \neq i;\ i = 1, \ldots, m\right\}.$$

Evidentemente $\left[S, L\right]$ e' uno spazio parziale di rette in cui ogni retta ha cardinalita' k. Gli spazi massimali di $\left[S, L\right]$ si ottengono tutti e soli nel modo seguente. Sia $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un punto si S, il sottoinsieme di S dato da $\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in S: y_i \in S_i\}$ e' un sottospazio massimale di $\left[S, L\right]$ per x. Dunque per x passano esattamente m spazi massimali, l'i-esimo essendo isomorfo ad $\left[S_i, L_i\right]$. Al variare di X in S si ottengono in tal modo m famiglie di spazi massimali S_1, S_2, ..., S_m. Quelli di una stessa famiglia i-esima sono a due a due sghembi tra loro ed isomorfi ad $[S_i, L_i]$, quelli di famiglie diverse s'incontrano in un sol punto. Ne segue che $[S, L]$ e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$$(v = v_1 v_2 \dots v_m,\ k;\ v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_m;\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1).$$

Essa e' sottile ma non e' speciale ne' normale ma e' uniforme.

Esempio VIII. Varieta' di grafi completi.

Se k=2 una varieta' $[V,L]$ di parametri

$$(v,\ 2;\ u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_m;\ n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m)$$

e' un grafo tale che i sottografi completi massimali si distribuiscono in m famiglie disgiunte S_1, ..., S_m tali che:

(2.12) $\quad \underline{\forall\, T_h \in S_h,\ |T_h| = u_h.}$

(2.13) $\quad \left\{ \text{\underline{E' costante il numero n_h dei T_h di S_h per un vertice x al variare di x in V.}} \right.$

Sia dato il poligono con $2n$ vertici, $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$, $n \geq 3$. Si consideri il grafo $[V,L]$ che ha come vertici $(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{2n})$ e come lati quelli del poligono: $(A_1A_2,\ A_2A_3,\ \dots,\ A_{2n-1}A_{2n}, A_{2n}A_1)$ e le diagonali seguenti $(A_1A_3,\ A_3A_5,\ \dots,\ A_{2n-3}A_{2n-1},\ A_{2n-1}A_1,\ A_2A_4,\ A_4A_6, \dots,\ A_{2n-2}A_{2n},\ A_{2n}A_2)$. Gli spazi massimali di $[V,L]$, cioe' i sottografi completi massimali, hanno ciascuno tre vertici e costituiscono uuna famiglia S tale che per ogni vertice di $[V,L]$ passano tre elementi di S se $n \geq 4$, ne passano quattro se $n = 3$. Ne segue che $[V,L]$ e' una varieta' di parametri $(v=2n, 2; 3; 3)$ se $n \geq 4$, mentre se $n = 3$ e' una varieta' di parametri (6, 2; 3, 4). Tali varieta' sono speciali non sottili e per $n \geq 4$ non sono normali (perche' lo spazio tangente in x a V, *cf.* n° 1, e' isomorfo al grafo $a \leftrightarrow b \leftrightarrow c \leftrightarrow d$ che non e' una varieta', per ogni x di V), mentre se $n = 3$ si ottiene una varieta' normale uniforme (perche' lo spazio tangente in x a V e' isomorfo al grafo $a \leftrightarrow b \leftrightarrow c \leftrightarrow d \leftrightarrow a$ che e' la varieta' di parametri (4, 2; 2; 2), per ogni x di V).

Analogamente sia dato un poligono con 2n+1 vertici, A_1, A_2, ..., A_{2n+1}, $n \geq 3$. Si consideri il grafo $[V,L]$ che ha come vertici (A_1, A_2, ..., A_{2n+1}) e come lati quelli del poligono: ($A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2n}A_{2n+1}, A_{2n+1}A_1$) e le diagonali seguenti (A_1A_3, A_3A_5, ..., $A_{2n-1}A_{2n+1}$, $A_{2n+1}A_2$, $A_2A_4, \dots,$ $A_{2n}A_1$). I sottografi completi massimali di $[V,L]$ sono triangoli, essi costituiscono una famiglia S tale che per ogni x di V passano tre elementi di S. Ne segue che $[V,L]$ e' una varieta' di parametri (v = 2n+1, 2; 3; 3). Essa e' speciale, non sottile ne' normale.

__Esempio IX. Spazi parziali di rette con gruppo di automorfismi transitivo sui punti.__

Sia $[V,L]$ uno spazio parziale di rette tale che il gruppo degli automorfismi, $\mathrm{Aut}[V,L]$, sia transitivo sui punti. Fissato $x \in V$ gli spazi massimali per x si distribuiscono in m famiglie $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_m(x)$ tali che gli spazi di $S_h(x)$ abbiano tutti la stessa cardinalita' u_h e spazi di famiglie diverse abbiano cardinalita' diverse. Rimangono cosi' determinati gli interi u_1, u_2, ..., u_m e gli interi $n_1=|S_1(x)|$, $n_2=|S_2(x)|$, ..., $n_m=|S_m(x)|$. Se $y \in V$, l'automorfismo di $[V,L]$ che muta x in y mutera' gli spazi di $S_h(x)$ in n_h spazi massimali per y aventi tutti cardinalita' u_h e sia $S_h(y)$ la famiglia di tali n_h spazi massimali per y ($h = 1, 2, ..., m$). Evidentemente ogni spazio massimale per y appartiene ad una, ed una sola, delle famiglie $S_1(y)$, $S_2(y)$, ..., $S_m(y)$. Ne segue che gli spazi massimali di $[V,L]$ si distribuiscono in m famiglie disgiunte $S_1= \bigcup_{x\in V} S_1(x)$, $S_2= \bigcup_{x\in V} S_2(x)$, ..., $S_m= \bigcup_{x\in V} S_m(x)$ e sono verificate le proprieta' I, II, del n° 1. Dunque $[V,L]$ e' una varieta' di spazi di rette e se e' verificata la III n° 1 essa e' una varieta' di sistemi di Steiner di parametri

$(v, k; u_1, u_2, \ldots, u_m; n_1, n_2, \ldots, n_m)$.

Si e' cosi provato che ogni spazio parziale di rette $[V, L]$ tale che Aut $[V, L]$ sia transitivo sui punti e' una varieta' di spazi di rette, in particolare, se vale la III n° 1, e' una varieta' di sistemi di Steiner.

Esempio X. Geometrie parziali.

Chiamasi geometria parziale, secondo R.C. Bose, di parametri (s,t,α) (con s, t, α interi positivi) uno spazio parziale di rette $[V,L]$ tale che:

(2.14) $\forall\ l \in L,\ |l| = s+1$.

(2.15) $\forall\ x \in V$, le rette di $[V,L]$ per x siano $t+1$.

(2.16) $\forall\ x \in V,\ \forall\ l \in L,\ x \notin l$, esistono esattamente α rette per x incidenti l.

Evidentemente $\alpha \leq s+1$ e $\alpha \leq t+1$. Se $\alpha = s+1$ ciascuno degli $s+1$ punti di una retta l e' congiungibile con ogni $x \in V-l$, onde due punti di $[V,L]$ sono sempre congiungibili, cioe' $[V,L]$ e' un sistema di Steiner $S(2,s+1,v=|V|)$ (ed allora $st(t+1)/(s+1)$ deve essere intero). Se $\alpha = t+1$ due rette di $[V,L]$ sono sempre incidenti, onde $[V,L]$ e' il duale di un sistema di Steiner $S(2,t+1,|L|)$. Nel seguito supporremo pertanto:

(2.17) $\qquad \alpha < s+1, \quad \alpha < t+1.$

Per $\alpha=1$, $[V,L]$ prende il nome di quadrangolo generalizzato.

In forza delle (2.17), $[V,L]$ ha come spazi massimali le rette e quindi (rispetto alla famiglia S di spazi massimali) $[V,L]$ e' una varieta' di parametri $(v;s+1;s+1;t+1)$ sottile e speciale. Determiniamo

$v=|V|$: si fissi una retta r e si consideri l'insieme delle coppie (x,l), ove $l \in L-(r)$, $|l\cap r| = 1$, $x \in l-r$. Il numero N di tali coppie e' dato da:

$$N = [v-(s+1)]\alpha = ts(s+1)$$

da cui:

$$v = \frac{(s+1)}{\alpha}\cdot(ts+\alpha). \tag{2.18}$$

Dalla (1.14) si ricava poi che

$$|L| = \frac{(t+1)}{\alpha}\cdot(ts+\alpha). \tag{2.19}$$

Sia $G = G[V,L]$ il grafo il grafo associato a $[V,L]$, *cf.* n.1. Esso e' regolare, perche' $\lambda_x = |S_x| = (t+1)$. Se x, $y \in V$, con $x \neq y$ e $x \sim y$ il numero dei vertici di G adiacenti ad x e ad y e' dato da:

$$a = s-1+t(\alpha-1).$$

Se $x \not\sim y$ il numero dei vertici di G adiacenti ad x e ad y e' dato da

$$b = (t+1)\alpha.$$

Essendo a e b costanti si ha che G e' fortemente regolare.

Esempio XI. Varieta' prive di triangoli.

Sia $\left[V,L\right]$ uno spazio parziale di rette in cui ogni retta abbia cardinalita' costante k. Diremo che $\left[V,L\right]$ e' priva di triangoli se non esistono tre punti non allineati A, B, C tali che A~B~C~A. Evidentemente gli spazi massimali di $\left[V,L\right]$ sono le rette. Se per ogni $x \in V$ il numero delle rette per x e' una costante n, $\left[V,L\right]$ rispetto alla famiglia $S = L$ degli spazi massimali e' una varieta' di parametri $(v=|V|;k;k;n)$. Essa e' sottile, speciale e regolare.

Sia l una retta di $\left[V,L\right]$, per ciascuno dei punti di l passano $n+1$ rette diverse da l e per punti distinti passano rette distinte (diverse da l), inoltre due rette incidenti l in punti distinti sono sghembe (perche' $\left[V,L\right]$ e' priva di triangoli). Ne segue che:

(2.20) $\qquad v = |V| \geq k\left[(n-1)(k-1) + 1\right]$

ed inoltre:

(2.21) $\qquad v = k\left[(n-1)(k-1) + 1\right] \leftrightarrow \forall x \in V, \forall l \in L,$ con $x \notin l$ passa una sola retta per x incidente l $\leftrightarrow$ $\left[V,L\right]$ e' un quadrangolo generalizzato (cfr. Es X).

Da (1.14), (2.20) si ha:

(2.22) $$|L| \geq n\left[(n-1)(k-1)+1\right].$$

Una $Q_{4,q}$ (*cfr.* Es. I) e' una $\left[V,L\right]$ di parametri ($v=\theta_3;q+1;q+1;q+1$) priva di triangoli per la quale vale la (2.21). Cosi' $Q^-_{5,q}$ (*cfr.* Es. III) e' una $\left[V,L\right]$ di parametri ($v=\theta_4-q^2;q+1;q+1;q^2+1$) priva di triangoli per la quale vale la (2.21).

Un poligono con n (≥ 5) vertici, rispetto ai suoi lati e' una varieta' di parametri ($n;2;2;2$) priva di triangoli in cui non vale il segno di uguaglianza in (2.20).

Un altro esempio di varieta' priva di triangoli per la quale nella (2.20) non vale il segno di uguaglianza e' il seguente (e generalizzazioni di esso). Si consideri un poligono con nove vertici A_i ($i=1,\dots,9$) e sia $V = \left\{A_1,A_2,\dots,A_9\right\}$, L sia costitituito dai lati del poligono: A_1A_2, A_2A_3, ..., A_8A_9, A_9A_1 e dalle diagonali $A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_8, A_6A_9, A_7A_1, A_8A_2, A_9A_3$. Si prova subito che $\left[V,L\right]$ e' una varieta' di parametri ($9;2;2;4$) priva di triangoli e tale che nella (2.20) non vale il segno di uguaglianza.

Una classe notevole di varieta' prive di triangoli e' la seguente. Sia H un n-insieme di $PG(r-1,q)$ che non contenga rette e $AG(r,q)$ lo spazio affine che ammette $PG(r-1,q)$ come iperpiano improprio. Denotata con L la famiglia delle rette di $AG(r,q)$ che ammettono come punti impropri quelli di H si ha che $\left[V=AG(r,q),L\right]$ e' una varieta' di parametri $(q^r;q;q;n)$. Essa non ammette triangoli se, e solo se, H e' una calotta di $PG(r-1,q)$. Osserviamo che se $\left[V=AG(r,q),L\right]$ non ammette triangoli (cioe' se H e' una calotta) nella (2.20) non vale mai il segno d'uguaglianza se $r\geq 4$ (perche' per una n-calotta di $PG(r-1,q)$ si ha $n\leq q^{r-2}+1$, mentre se nella (2.20) valesse il segno di uguaglianza sarebbe $n=\theta_{r-2}+1>q^{r-2}+1$); se $r=3$ il segno di uguaglianza nella (2.20) vale solo se q e' pari ed H e' un $(q+2)$-arco di $PG(2,q)$; se $r=2$ il segno di uguaglianza vale solo se $n=2$.

3. - Insiemi intersezioni, incollineari, blocking sets di una varieta' $[V, L]$.

Sia $[V, L]$ uno spazio parziale di rette. Un sottoinsieme F di V sara' detto <u>insieme intersezione</u> se:

(3.1) $$\forall\, l \in L,\ |l \cap F| \geq 1.$$

Un <u>blocking set</u> di $[V, L]$ e' un sottoinsieme F di V tale che sia esso che il suo complementare siano insiemi intersezioni, cioe':

(3.2) $$\forall\, l \in L,\ |l \cap F| \geq 1\ ,\ |l \cap (V-F)| \geq 1,$$

ossia se ogni retta incontra F e non esistono rette contenute in F.

Un sottoinsieme F di V sara' detto <u>primo</u> se:

(3.3) $$\forall\, l \in L,\ |l \cap F| = 1 \quad \text{ovvero} \quad l \subseteq F.$$

Un insieme primo e' un insieme intersezione ma non e' vero il viceversa. Un primo F si dira' <u>proprio</u> se non contiene <u>propriamente</u> spazi massimali di $[V, L]$.

Chiameremo <u>incollineare</u> un sottoinsieme di V costituito da punti a due a due incongiungibili.

Proviamo che:

(3.4) Un sottospazio S di $[V,L]$ che sia un insieme intersezione e' un primo proprio. Inoltre, se per ogni x di V passano almeno due sottospazi massimali, S e' massimale.

Dimostrazione. La prima parte e' evidente, proviamo la seconda. Se S non e' massimale, sia S' un sottospazio massimale contenente (propriamente) S e sia $x \in S' - S$. Per x passano almeno due spazi massimali distinti e quindi uno almeno S'' diverso da S'. Esiste allora un $y \in S'' - S'$. Risulta x, $y \in S''$ onde x ed y sono congiungibili e la retta xy e' contenuta in S'' ed incontra S' solo in x. Dunque la xy ha intersezione vuota con S e ció e' contro l'ipotesi che S sia un insieme intersezione, onde l'asserto.

(3.5) Se $[V,L]$ e' una varieta' connessa, ogni sottospazio S che sia un insieme intersezione e' un sottospazio massimale che risulta un primo proprio.

Dimostrazione. Sia $[V,L]$ una varieta' di parametri

$$(v,\ k;\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_m;\ n_1,n_2,\ldots,\ n_m).$$

Se $m \geq 2$ ovvero $m = 1$ ed $n_1 \geq 2$ per ogni x di V passano almeno due spazi massimali e dalla (3.4) si ha l'asserto. Se $m = 1$ ed $n = 1$ gli spazi massimali di $[V,L]$ costituiscono una partizione di V e quindi $[V,L]$

e' sconnessa e ciò e' escluso, onde l'asserto.

(3.6) F insieme intersezione incollineare $\leftrightarrow$ F primo proprio, blocking set.

Dimostrazione. Immediata.

(3.7) Se C e' un incollineare, ogni sottospazio di $[V,L]$ incontra C in al piu' un punto e viceversa.

Dimostrazione. Immediata.

(3.8) C incollineare massimale $\leftrightarrow$ C tale che per ogni $x \in V-C$ passa una retta 1-secante C.

Dimostrazione. C e' incollineare massimale se, e solo se, ogni $x \in V-C$ e' collineare con qualche punto di C, onde l'asserto.

(3.9) C incollineare massimale $\leftrightarrow$ C incollineare tale che per ogni $x \in V-C$ passa un sottospazio massimale che incontra C in un punto.

Dimostrazione. Segue da (3.8).

Sia ora $[V,L]$ una varieta' di parametri

$$(v,\ k;\ u_1,\ u_2, \dots,\ u_m;\ n_1, n_2, \dots,\ n_m)$$

e sia F un insieme intersezione di $[V,L]$. Se $T_h \in S_h$ si ha:

(3.10) $$|T_h| = u_h > (u_h - 1)/(k-1).$$

Ogni $T_h \in S_h$ incontra F in un insieme intersezione e quindi, tenuto conto della (3.10), si ha:

$$(3.11)\quad \begin{cases} |F\cap T| \geq (u_h-1)/(k-1) \\ |F\cap T| = (u_h-1)/(k-1) \Longleftrightarrow \underline{F\cap T \neq T_h \text{ ed } F\cap T_h \text{ e' un primo di } T_h.} \end{cases}$$

Computando il numero delle coppie (x, T_h) con $x\in F\cap T_h$ e $T_h \in S_h$ nei due modi possibili e tenuto conto della (3.11) otteniamo che:

$$|F|n_h \geq |S_h|(u_h-1)/(k-1),$$

il segno d'uguaglianza avendosi se, e solo se, $\forall\ T_h\in S_h$ risulta $F\cap T_h \neq T_h$ e $F\cap T_h$ un primo di T_h. Ne segue che (*cfr.*(1.7)):

$$(3.12)\quad \begin{cases} F \text{ \underline{insieme intersezione}} \longrightarrow |F|\geq v(u_h-1)/u_h(k-1) \\ F \text{ \underline{primo proprio}} \longrightarrow |F| = v(u_h-1)/u_h(k-1) \\ |F|=v(u_h-1)/u_h(k-1) \Longleftrightarrow \forall\ T_h\in S_h, F\cap T_h \text{ e' un primo di } T_h \text{ e } F\cap T_h \neq T_h. \end{cases}$$

Proviamo che:

(3.13) <u>Se $\left[V,L\right]$ e' speciale di indice h, per un insieme intersezione F di $\left[V,L\right]$ si ha:</u>

$$|F|=v(u_h-1)/u_h(k-1) \Longleftrightarrow \underline{F \text{ primo che non contiene nessun } T_h\in S_h}.$$

<u>Dimostrazione.</u> Dalla $(3.12)_{III}$ segue la $\Longleftarrow$. Proviamo la $\Longrightarrow$. Sia $l \in L$, esiste allora un $T_h \in S_h$ con $l \subseteq T_h$ (perche' $\left[V,L\right]$ e' speciale di indice h). Ma $T_h \cap F$ e'

un primo di T_h che non contiene nessun T_h (*cfr.*(3.12))$_{II}$ e quindi $|l \cap F| = 1$ ovvero $l \subseteq F$, cioe' F e' un primo di $[V,L]$ che non contiene nessun $T_h \in S_h$, onde l'asserto.

(3.14) <u>Se $[V,L]$ e' speciale, per un insieme intersezione F di $[V,L]$ si ha:</u>

<u>$|F| = v(u_h - 1)/u_h(k-1)$, $\forall$ h=1,2,...,m $\iff$ F primo proprio di $[V,L]$</u>.

<u>Dimostrazione</u>. Segue da (3.13) e (3.12)$_{II}$.

(3.15) <u>Se $[V,L]$ ammette un primo proprio F allora $u_1 = u_2 = \ldots = u_m$.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Dalle (3.12)$_{II}$ si ha

$$|F| = v(u_h - 1)/u_h(k-1), \ \forall \ h=1,2,\ldots,m ,$$

onde l'asserto.

(3.16) <u>Sia u_μ il massimo tra gli $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ per una varieta' $[V,L]$. Allora se F e' un insieme intersezione di $[V,L]$ risulta:</u>

$$|F| \geq v(u_\mu - 1)/u_\mu(k-1) \geq v(u_h - 1)/u_h(k-1).$$

<u>Dimostrazione</u>. Segue da (3.12)$_I$.

Sia ora F un blocking set di $[V,L]$, onde F e V-F sono insiemi intersezione e quindi:

$$|F| \geq v(u_h - 1)/u_h(k-1), \quad |V-F| \geq v(u_h - 1)/u_h(k-1),$$

ne segue che:

(3.17) $\quad F$ <u>blocking set di</u> $\left[V,L\right] \longrightarrow \dfrac{v(u_h-1)}{u_h(k-1)} \le |F| \le$

$$\le v\left[1 - \frac{(u_h-1)}{u_h(k-1)}\right].$$

Se sia F che $V-F$ sono primi propri, in (3.17) deve valere il segno d'uguaglianza e quindi:

$$|F| = v(u_h-1)/u_h(k-1) = v\left[1 - (u_h-1)/u_h(k-1)\right] \longrightarrow$$

$$2(u_h-1)/u_h(k-1) = 1 \longrightarrow u_h(3-k)=2 \longrightarrow k=2,\ u_h=2,$$

si e' cosi provato che:

(3.18) <u>Se $\left[V,L\right]$ ammette un blocking set F tale che sia esso che il suo complementare sia un primo allora $\left[V,L\right]$ e' un grafo che ha come spazi massimali i lati del grafo e quindi e' regolare e di parametri $(v,\ 2;\ 2;\ n_1)$. Inoltre $|F|=v/2$ ed F si ottiene scegliendo uno ed un sol vertice per ogni lato.</u>

Sia ora C un c-insieme incollineare di una varieta' $\left[V,L\right]$. Sia N il numero delle coppie (x,T_h) ove $x \in C$, $T_h \in S_h$ e $x \in T_h$. Si ha $N = cn_h$ (perche' per ogni $x \in C$ passano n_h spazi di S_h), d'altra parte, per la (3.7), e' $|S_h| \ge N$ e $|S_h| = N \longleftrightarrow$ ogni $T_h \in S_h$ incontra C in un punto. Tenuto conto della (1.7) si ha dunque:

$$(3.19)\quad \begin{cases} c \le v/u_h\ , \ \forall\, h = 1, 2, \dots, m\ , \\ c = v/u_h \Leftrightarrow \forall\, T_h \in S_h,\ |T_h \cap C| = 1. \end{cases}$$

Supponiamo C massimale e $[V,L]$ speciale nell'indice h (*cfr.* n° 1), allora per ogni $x \in V-C$ passa almeno un $T_h \in S_h$ che incontra C in un punto (in quanto per la (3.8) per x passa una retta 1-secante C e tale retta appartiene a qualche $T_h \in S_h$, essendo $[V,L]$ speciale nell'indice h). Sia M il numero delle coppie (x,T_h) ove $x \in V-C$, $T_h \in S_h$ e $x \in T_h$. Poiche' per ogni $y \in C$ passano n_h spazi $T_h \in S_h$ e ciascuno di essi ha u_h-1 punti x di V-C (*cfr.* (3.7)) ed inoltre, sempre per la (3.7), gli spazi di S_h per $y \in C$ sono tutti distinti da quelli per $y' \in C$ con $y \ne y'$, si ha $M = cn_h(u_h-1)$. D'altra parte, poiche' per ogni $x \in V-C$ passa almeno un $T_h \in S_h$ che incontra C in un punto, risulta:
$M \ge v-c$, $M = v-c \Leftrightarrow \forall\, x \in V-C$ passa un sol $T_h \in S_h$ incidente C. Ne segue che:

(3.20) <u>Sia $[V,L]$ speciale nell'indice h e C un incollineare massimale di $[V,L]$. Risulta:</u>

$$\begin{cases} c \ge v/[n_h(u_h-1)+1] \\ c = v/[n_h(u_h-1)+1] \Leftrightarrow \forall\, x \in V-C, \exists\,!\ T_h \in S_h : |T_h \cap C| = 1 \end{cases}$$

<u>In particolare se $[V,L]$ e' speciale si ha:</u>

$$c \ge v/[n_h(u_h-1)+1]\ , \ \forall\, h = 1, 2, \dots m.$$

Una varieta' $[V, L]$ sara' detta <u>prima</u> se per ogni $x \in V$ il cono tangente Γ_x in x a V e' un primo, cioe':

(3.21) $[V, L]$ <u>prima $\leftrightarrow \forall\, x \in V,\ \forall\, l \in L,\ |l \cap \Gamma_x| = 1$ ovvero $l \subseteq \Gamma_x$.</u>

Si prova subito che:

(3.22) <u>Se $[V, L]$ e' prima, per ogni $x \in V$, il numero delle rette per x di V e' costante al variare di x in V. Ne segue che il grafo associato a $[V, L]$ e' regolare.</u>

4.- <u>Fibrazioni mediante rette in una varieta' $[V,L]$.</u>

Sia $[V,L]$ uno spazio parziale di rette. Chiameremo <u>fibrazione</u> mediante rette in $[V,L]$ una famiglia $\mathcal{F}$ di rette di $[V,L]$ a due a due sghembe. La $\mathcal{F}$ si dice <u>totale</u> se essa e' un ricoprimento di V, si dice <u>massimale</u> se non e' contenuta propriamente in un'altra fibrazione. Evidentemente lo studio delle fibrazioni in $[V,L]$ si riconduce a quello delle fibrazioni massimali. Porremo per una fibrazione $\mathcal{F}$ di $[V,L]$:

(4.1) $$F = \bigcup_{l \in \mathcal{F}} l.$$

Si ha ovviamente:

(4.2) $\mathcal{F}$ <u>massimale</u> $\Longleftrightarrow$ F <u>e' un insieme intersezione.</u>

Supporremo nel seguito che per $[V,L]$ valga la

(4.3) $$\forall\, l \in L, \quad |l| = k,$$

allora risulta:

(4.4) $$F = |\mathcal{F}|k.$$

Dalla (4.4) si ha (essendo $F \subseteq V$):

(4.5) $$|\mathcal{F}| \leq v/k,$$

(4.6) $|\mathcal{F}| = v/k \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ <u>e' totale.</u>

Sia P un primo di $[V,L]$, t il numero delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a P, s il numero dei punti di P per i quali non passano rette di $\mathcal{F}$. Le $|\mathcal{F}|-t$ rette di $\mathcal{F}$ non appartenenti a P, incontrano P ciascuna in un punto e rette diverse incontrano P in punti diversi, onde: $s = |P| - (kt+|\mathcal{F}|-t)$, cioe':

$$s = |P| - |\mathcal{F}|-t(k-1). \tag{4.7}$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} |P| - |\mathcal{F}| \geq t(k-1) \\ |P| - |\mathcal{F}| = t(k-1) \leftrightarrow P \subseteq F \end{cases} \tag{4.8}$$

Dalla (4.8) si ha:

$$\begin{cases} |\mathcal{F}| \leq |P| \text{ , per ogni primo } P \text{ di } [V,L] \\ |\mathcal{F}| = |P| \leftrightarrow t=0 \text{ , } P \subseteq F . \end{cases} \tag{4.9}$$

Se ne deduce che:

I.- <u>Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione mediante rette in $[V,L]$. Se P e' un primo di $[V,L]$ ed s e t denotano rispettivamente il numero dei punti di $P \cap (V-F)$ e quello delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a P, sussistono le (4.7), (4.8), (4.9). Quindi se esiste un primo $\bar{P}$ tale che $|\bar{P}| = |\mathcal{F}|$, per ogni primo P si ha $|P|\geq|\bar{P}|$. Inoltre se la $\mathcal{F}$ e' totale risulta</u>

$$\underline{t = \left(|P| - |\mathcal{F}|\right) / (k-1),}$$

onde

$$|\mathcal{F}| \equiv |P| \ mod(k-1), \text{ per ogni primo } P \text{ di } [V,L]$$

e quindi:

$$|P| \equiv |P'| \ mod(k-1), \text{ per ogni coppia di primi } P, P'$$

Supponiamo ora che la $[V,L]$ sia una varieta' di parametri $(v, k; u_1, u_2, \dots, u_m; n_1, n_2, \dots, n_m)$. Dalle (4.2), (4.4), (3.16), (3.14) si ha:

II.- Sia $u_\mu = \max(u_1, u_2, \dots, u_m)$ per la varieta' $[V,L]$. Se $\mathcal{F}$ e' una fibrazione massimale di $[V,L]$ risulta:

(4.10) $$|\mathcal{F}| \geq v(u_\mu - 1)/k(k-1)u_\mu.$$

Se F e' un primo proprio, nella (4.10) vale il segno di uguaglianza. Viceversa, se $[V,L]$ e' speciale e $u_\mu = u_h$ $(h = 1,2,\dots,m)$, se nella (4.10) vale il segno di uguaglianza F e' un primo proprio.

Sia $[V,L]$ una varieta' priva di triangoli di parametri $(v;k;k;n)$ (*cfr.* Es XI). Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale non totale in $[V,L]$. Se $x \in V-F$, ogni retta di $\mathcal{F}$ incontra il cono tangente, Γ_x, in x a V in al piu' un punto $(\neq x)$ (perche' $[V,L]$ e' priva di triangoli) e rette di $\mathcal{F}$ distinte incontrano Γ_x in punti distinti. Inoltre ciascuna, l, delle n rette per

x e' tale che $l \cap F \neq \emptyset$ (essendo $\mathcal{F}$ massimale).

Dunque: $n \leq |\Gamma_x \cap F| \leq |\mathcal{F}|$, cioe':

$$(4.11) \qquad \begin{cases} n \leq |\mathcal{F}| \\ n = |\mathcal{F}| \leftrightarrow F \text{ e' un primo.} \end{cases}$$

5. - <u>Fibrazioni in spazi parziali di rette immersi in PG(r,q).</u>

Uno spazio parziale di rette $[V,L]$ si dira' <u>immerso</u> nello spazio di Galois PG(r,q) se $V \subseteq PG(r,q)$ ed L e' una famiglia di rette di PG(r,q). In tal caso si ha:

(5.1) $\forall\ l \in L\ ,\ |l|=q+1=\theta_1\ ;\ |V|=v\leq\theta_r\ ;\ |L|\leq\theta_r\theta_{r-1}/\theta_1.$

Diremo che $[V,L]$ e' <u>immerso</u> <u>propriamente</u> in PG(r,q) se lo spazio congiungente V e' PG(r,q). Gli esempi I, II, III, IV, V, VI del n^o 2 sono esempi di spazi parziali di rette immersi propriamente in spazi di Galois. Piu' in generale se V e' una varieta' algebrica rigata di PG(r,q) ed L e' la famiglia delle sue rette, $[V,L]$ e' uno spazio parziale di rette immerso in PG(r,q), propriamente se V contiene $r+1$ punti indipendenti di PG(r,q).

Nel seguito di questo numero $[V,L]$ sara' sempre uno spazio parziale di rette immerso propriamente in PG(r,q). Se Π e' un iperpiano di PG(r,q) risultera' $V \nsubseteq \Pi$ e <u>$V \cap \Pi$ e' un primo</u> di $[V,L]$ (infatti ogni retta l di L o e' contenuta in Π ed allora $l \subseteq V \cap \Pi$ ovvero incontra Π in un punto x ed e' $x = l \cap (V \cap \Pi)$). Non e' vero il viceversa in generale, possono cioe' esistere primi di $[V,L]$ che non sono l'intersezione di V con un iperpiano (per esempio su una quadrica non singolare, Q_4, di $PG(4,q)$ esistono (q^2+1)-insiemi intersecati da ogni retta di Q_4 in un sol punto, non contenuti in un iperpiano).

Allo scopo di approfondire lo studio delle fibrazioni in $[V,L]$, proviamo la seguente proposizione.

I.- <u>In $PG(r,q)$, $r \geq 2$, sia E un insieme $(\neq \emptyset)$ intersecato da ogni iperpiano in un numero di punti multiplo di q. Allora e' $|E| = qn \geq q^2$.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Per $r = 2$ l'asserto e' evidente. Supporremo pertanto $r \geq 3$. Si consideri un S_{r-2} di $PG(r,q)$ tale che $|S_{r-2} \cap E| = h \geq 1$. Ogni iperpiano, S_{r-1}, per l'S_{r-2} incontra allora E in un numero di punti multiplo positivo di q. Sia u_i il numero degli S_{r-1} per l'S_{r-2} che incontra E in <u>$q \cdot i$</u> punti $(i=1,2,\dots,m)$. Si dovra' avere:

$$(5.2) \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i = q+1 \;, \quad \sum_{i=1}^{m} (qi-h)u_i = |E|-h$$

Dalle (5.2) si ha:

$$(5.3) \qquad |E| = q\left[\sum_{i=1}^{m} iu_i - h\right]$$

Posto

(5.4) $$n = \sum_{i=1}^{m} i u_i - h$$

si ha dalla (5.3):

(5.5) $$|E| = qn$$

e quindi:

(5.6) $$\sum_{i=1}^{m} u_i = q+1 \ , \quad \sum_{i=1}^{m} i u_i = h+n \ ,$$

da cui:

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} (i-1) u_i = h+n-q-1 \ ,$$

onde:

(5.7) $$n \ge q+1-h.$$

Si e' cosi' provato che $|E| = qn$. Mostriamo che $|E| = qn \ge q^2$, cioe' l'asserto. Ragionando per assurdo, supponiamo $|E| = qn < q^2$, cioe' $n < q$, ossia, per la (5.7):

(5.8) $$h \ge 2.$$

Supponiamo dunque che:

(5.9) <u>Ogni S_{r-2} di PG(r,q) tale che $|E \cap S_{r-2}| \ge 1$, incontra E in almeno due punti.</u>

Sia $x \in E$, per x passa almeno una retta, S_1, tangente in x ad E (altrimenti sarebbe $|E| \geq \theta_{r-1}+1$ e cio' e' assurdo, essendo $r \geq 3$ ed $|E| < q^2$). Se $r = 3$ si ha allora l'assurdo, per la (5.9), e quindi l'asserto. Se $r \geq 4$ per la retta S_1 passa almeno un piano, S_2, che incontra E solamente in x (altrimenti sarebbe $q^2 > |E| \geq \theta_{r-2}+1$ e cio' e' assurdo supponendosi $r \geq 4$). Se $r = 4$ si ha allora l'assurdo, per la (5.9), e quindi l'asserto. Se $r \geq 5$ per il piani S_2 passa almeno un S_3 che incontra E solamente in x (altrimenti sarebbe $q^2 > |E| \geq \theta_{r-3}+ 1$ e cio' e' assurdo supponendosi $r \geq 5$). Se $r = 5$ si ha allora l'assurdo, per la (5.9), e quindi l'asserto. Se $r \geq 6$ procedendo induttivamente si ha l'asserto.

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione in $[V,L]$. Per essa si ha (*cf.* (4.5), (4.6)):

(5.10) $$|\mathcal{F}| \leq v/\theta_1 ,$$

(5.11) $$|\mathcal{F}| = v/\theta_1 \leftrightarrow \mathcal{F} \text{ e totale.}$$

Proviamo che:

II.- <u>Sia $[V,L]$ uno spazio parziale di rette propriamente immerso in PG(r,q), $r \geq 3$. Supponiamo che (a essendo un intero):</u>

(5.12) $$v=|V| \equiv q(q-a) \bmod \theta_1 , \quad 1 \leq a \leq q-1 ,$$

(5.13) $$\upsilon > q(q-1)$$

ed inoltre che per ogni iperpiano Π di $PG(r,q)$, posto $P \equiv V \cap \Pi$, si abbia:

(5.14) $$\upsilon \equiv |P| \ mod q.$$

Allora qualsiasi sia la fibrazione $\mathcal{F}$ in $\left[V,L\right]$ risulta:

(5.15) $$|\mathcal{F}| \leq \frac{\upsilon - q(q-\alpha)}{\theta_1} - 1 < \frac{\upsilon}{\theta_1} - (q-\alpha).$$

Dimostrazione. Ragionando per assurdo supponiamo che esista una fibrazione $\mathcal{F}'$ in $\left[V,L\right]$ con $|\mathcal{F}'| \geq \left[\upsilon - q(q-\alpha)\right]/\theta_1$. Esistera' allora una fibrazione $\mathcal{F}$ con

(5.16) $$|\mathcal{F}| = \left[\upsilon - q(q-\alpha)\right] / \theta_1.$$

(Notiamo che per le (5.12), (5.13) la quantita' a secondo membro delle (5.16) e' un intero positivo). Posto $E = V - F$ (*cf.* (4.1)) risulta, per la (5.16) ed essendo $|F| = \theta_1 |\mathcal{F}|$:

(5.17) $$|E| = q(q-\alpha) < q^2.$$

Se P e' un primo sezione di V con un iperpiano qualsiasi Π di $PG(r,q)$, denotato con ι il numero delle rette di $\mathcal{F}$ appartenenti a P e posto $s = |P-F|$ sussiste la (4.7), cioe':

(5.18) $$s = |P \cap E| = |P| - |\mathcal{F}| - \iota q.$$

Da cio', dalla (5.16), tenuto conto della (5.14) si ha $s = |P \cap E| \equiv 0 \bmod q$. Dunque ogni iperpiano Π incontra E in un numero di punti multiplo di q. Per la proposizione I deve allora essere $|E| \geq q^2$ ma cio' e' assurdo per la (5.17). L'assurdo prova l'asserto

6. - Insiemi intersezioni e fibrazioni in quadriche e forme hermitiane non singolari di PG(r,q).

In PG(r,q), con $r \geq 3$, sia V una quadrica rigata o una forma hermitiana non singolare. Se L e' l'insieme delle rette di PG(r,q) appartenenti a V, $[V,L]$ e' una varieta' speciale (*cfr.* *n.* 2, esempi I, II, III, IV) i cui parametri, con le notazioni del *n.* 2, sono rispettivamente dati da:

(6.1)

$$Q_{2s,q} \longrightarrow (\upsilon = |V| = \theta_{2s-1}, k = q+1; u_1 = \theta_{s-1}; n_1 = \prod_{i=1}^{s-1}(q^i+1)),$$

(6.2)

$$Q^+_{2s+1,q} \longrightarrow (\upsilon = \theta_{2s} + q^s, k = q+1; u_1 = \theta_s, u_2 = \theta_s; n_1 = \sigma^+_{2s-1}, n_2 = \sigma^+_{2s-1}),$$

(6.3) $$Q^-_{2s+1,q} \longrightarrow (\upsilon = \theta_{2s} - q^s, k = q+1; u_1 = \theta_{s-1}; n_1 = \sigma^-_{2s-1}),$$

(6.4)

$$H_{2s,q} \longrightarrow (\upsilon = \theta_{s-1}(q^s\sqrt{q} + 1), k = q+1; u_1 = \theta_{s-1}; n_1 = \rho_{2s-2,q}),$$

(6.5)

$$H_{2s+1,q} \longrightarrow (\upsilon = \theta_s(q^s\sqrt{q} + 1), k = q+1; u_1 = \theta_s; n_1 = \rho_{2s-1,q}).$$

Sia F un insieme intersezione di $[V,L]$. Poiche' $[V,L]$ e' speciale, dalle (3.16) e (3.14) si ha (essendo attualmente $u_\mu = u_1 = u_2 = \ldots = u_m = u$):

$$(6.6)\quad \begin{cases} |F| \geq v(u-1)/qu, \\ |F| = v(u-1)/qu \leftrightarrow F \text{ primo proprio di } [V,L]. \end{cases}$$

Risultando $\theta_{2s-1}=(q^s+1)\theta_{s-1}$, $\theta_{2s}+q^s=(q^s+1)\theta_s$, otteniamo, in forza delle (6.6) e (6.1), (6.2), (6.5):

$$(6.7)\quad V=Q_{2s,q} \begin{cases} |F| \geq (q^s+1)\theta_{s-2}, \\ |F|=(q^s+1)\theta_{s-2} \leftrightarrow F \text{ primo proprio di } Q_{2s,q} \leftarrow \\ \leftarrow F \text{ sezione iperpiana ellittica di } Q_{2s,q}. \end{cases}$$

$$(6.8)\quad V=Q^+_{2s+1,q} \begin{cases} |F| \geq (q^s+1)\theta_{s-1}, \\ |F|=(q^s+1)\theta_{s-1} \leftrightarrow F \text{ primo proprio di } Q^+_{2s+1,q} \leftarrow \\ \leftarrow F \text{ sezione iperpiana non singolare di } Q^+_{2s+1,q}. \end{cases}$$

$$(6.9)\quad V=H_{2s+1,q} \begin{cases} |F| \geq (q^s\sqrt{q}+1)\theta_{s-1}, \\ |F|=(q^s\sqrt{q}+1)\theta_{s-1} \leftrightarrow F \text{ primo proprio di } H_{2s+1,q} \leftarrow \\ \leftarrow F \text{ sezione iperpiana non singolare di } H_{2s+1,q}. \end{cases}$$

Osserviamo che nelle $(6.7)_I$, $(6.8)_I$, $(6.9)_I$ il segno d'uguaglianza e' effettivamente raggiunto se F e' una sezione iperpiana, ellittica nella $(6.7)_I$, non singolare nelle $(6.8)_I$, $(6.9)_I$. Possono pero' in generale esistere primi propri che non sono le sezioni iperpiane suddette. Per esempio i primi propri di una quadrica iperbolica $Q^+_{3,q}$ di PG(3,q) si ottengono tutti e soli nel modo seguente. In Π=PG(2,q) sia t una retta ed A, B due suoi punti; si consideri un q-insieme H intersecato da ogni retta, diversa da t, per A o per B in un sol punto; sia $Q^+_{3,q}$ una quadrica iperbolica di PG(3,q) $\supset \Pi$ contenente A e B e tale che Π non sia tangente a $Q^+_{3,q}$; siano a e b due generatrici di $Q^+_{3,q}$ per A, B e T il loro punto di incontro; si consideri la proiezione stereografica di $Q_{3,q}$ da T, $\varphi : Q^+_{3,q} - a \cup b \longmapsto \Pi - t$; si prova subito che $\varphi^{-1}(H) \cup \{T\}$ e' un primo proprio per T di $Q^+_{3,q}$. Se r e' una retta di Π diversa da t ed H = $r - r \cap t$, allora (e soltanto allora) $\varphi^{-1}(H) \cup \{T\}$ e' una sezione piana per T. Mentre se q e' pari e K e' un (q+2)-arco per A, B, posto H = K-{A,B} l'insieme $\varphi^{-1}(H) \cup \{T\}$ e' un primo proprio di $Q^+_{3,q}$ che non e' una sezione piana.

Analogamente i primi propri di una quadrica $Q_{4,q}$ di PG(4,q) si ottengono tutti e soli nel modo seguente. Sia T $\in Q_{4,q}$, τ l'iperpiano tangente in T a $Q_{4,q}$ e Γ il cono $\tau \cap Q_{4,q}$. Si consideri un iperpiano Π=PG(3,q) di PG(4,q) non per T e sia α il piano $\Pi \cap \tau$ e $\mathscr{C}$ la conica (non degenere) $\Gamma \cap \alpha$. Sia H un qualsiasi q^2-insieme di Π-α intersecato in un sol punto da ogni retta che incontra α in un punto di $\mathscr{C}$. Si consideri la proiezione stereografica di $Q_{4,q}$ da T,

$\varphi: Q_{4,q}-\tau \longmapsto \Pi-\alpha$. Si prova subito che $F = \varphi^{-1}(H)\cup(T)$ e' un (q^2+1)-insieme di $Q_{4,q}$ intersecato da ogni retta di $Q_{4,q}$ in un sol punto, cioe' F e' un primo proprio per T. In tal modo si ottengono tutti i primi propri di $Q_{4,q}$ per T. Se β e' un piano di Π=PG(3,q) diverso da α tale che la retta $s = \alpha \cap \beta$ sia esterna a $\mathfrak{C}$ ed $H=\beta-s$, allora, ed allora soltanto, $\varphi^{-1}(H)\cup(T)$ e' una sezione iperpiana (ellittica) per T.

Osserviamo che, se q e' pari, in $Q_{4,q}$ esistono primi propri che non sono sezioni iperpiane ellittiche di $Q_{4,q}$. Infatti in tale ipotesi, sia N il nucleo di $Q_{4,q}$ (cioe' il punto per cui passano tutti gli iperpiani tangenti di $Q_{4,q}$), Π un iperpiano non per N, $f: Q_{4,q} \longrightarrow \Pi$ la biezione, proiezione di $Q_{4,q}$ su Π. La f pone una biezione tra le rette di $Q_{4,q}$ e le rette di un complesso lineare di rette $\mathfrak{C}$ di Π=PG(3,q) ed inoltre tra le q^4 quadriche, ellittiche o iperboliche, sezioni iperpiane di $Q_{4,q}$ con iperpiani non per N e le q^4 quadriche, ellittiche o iperboliche, di Π=PG(3,q) aderenti a $\mathfrak{C}$ (cioe' che ammettono $\mathfrak{C}$ come fibrato tangente), mutando quadriche ellittiche in quadriche ellittiche e quadriche iperboliche in quadriche iperboliche. Sia K una (q^2+1)-calotta di Π=PG(3,q) che non sia una quadrica ellittica e che ammetta $\mathfrak{C}$ come fibrato tangente (un ovoide di Tits aderente a $\mathscr{C}$). $F=f^{-1}(K)$ e' allora intersecato da ogni retta di $Q_{4,q}$ in un sol punto, cioe' e' un primo proprio di $Q_{4,q}$ che non e' una sezione iperpiana ellittica di $Q_{4,q}$ (altrimenti K sarebbe una quadrica ellittica di Π). Notiamo che ogni primo proprio di $Q_{4,q}$ si muta mediante f in una (q^2+1)-calotta aderente a $\mathscr{C}$.

Osserviamo infine che, qualsiasi sia q pari o dispari, la $Q_{4,q}$ puo' pensarsi come sezione iperpiana (non tangente) della quadrica di Klein $Q^+_{5,q}$, rappresentativa delle rette di un PG(3,q), [4]. I punti di $Q_{4,q}$ rappresentano le rette di un complesso lineare $\mathscr{C}$ di PG(3,q). Ogni primo proprio F di $Q_{4,q}$ rappresenta allora una fibrazione totale mediante rette di PG(3,q) aderente a $\mathscr{C}$ (cioe' $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{C}$). Tale fibrazione e' regolare se, e solo se, $\mathscr{F}$ e' una sezione iperpiana ellittica di $Q_{4,q}$.

Proviamo che:

I.- <u>In $Q^-_{5,q}$ non esistono primi propri, onde per un insieme intersezione F di $Q^-_{5,q}$ risulta</u> (<u>c</u>*fr.* (6.3), (6.6)):

$$|F| > q^3 + 1.$$

<u>Dimostrazione.</u> Supposto esistente un primo proprio F di $Q^-_{5,q}$, ogni retta di $Q^-_{5,q}$ incontra F in un sol

punto. Un iperpiano S_4 di PG(5,q), non tangente a $Q^-_{5,q}$, incontra $Q^-_{5,q}$ in una quadrica non singolare $Q_{4,q}$ ed $F \cap Q_{4,q}$ e' un primo proprio di $Q_{4,q}$, quindi (*cfr.* (6.7) per $s=2$) $|F \cap Q_{4,q}| = q^2+1$. Siano A, B $\in F$, con $A \neq B$. La retta AB non appartiene a $Q^-_{5,q}$. Siano τ_A, τ_B gli iperpiani tangenti a $Q^-_{5,q}$ in A e B. Essi si incontrano in un S_3, polare della retta AB. Ogni iperpiano per l'S_3, diverso da τ_A e τ_b (cioe' ogni iperpiano polare di un punto x di AB diverso da A e B) incontra $Q^-_{5,q}$ in una quadrica non singolare $Q_{4,q}$ e quindi F in q^2+1 punti. Si ha $\tau_A \cap F = (A)$, $\tau_B \cap F = (B)$ e quindi $S_3 \cap F = (\tau_A \cap \tau_B) \cap F = \emptyset$. Ne' segue che (pensando i punti di F distribuiti sugli iperpiani per l'S_3):

$$|F| = (q-1)(q^2+1)+2 = q^3-q^2+q+1$$

e cio' e' assurdo essendo $|F| = q^3+1$ (*cfr.* (6.6) e (6.3) per $s=2$). Osserviamo che dalla prop. I segue che in AG(4,q) non esistono una quadrica ellittica E nel PG(3,q) improprio di AG(4,q) ed un q^3-insieme S di AG(4,q) tale che ogni retta propria per un punto di E sia 1-secante S.

II.- <u>In $H_{4,q}$ non esistono primi propri, onde per un insieme intersezione F di $H_{4,q}$ risulta (cfr. (6.4), (6.3)):</u>

$$|F| > q^2\sqrt{q} + 1.$$

<u>Dimostrazione.</u> Supposto esistente un primo proprio F di $H_{4,q}$, si ha che $|F| = q^2\sqrt{q} + 1$ ed inoltre ogni retta di $H_{4,q}$ incontra F in un sol punto. Un iperpiano S_3 di PG(4,q) non tangente ad $H_{4,q}$ incontra $H_{4,q}$ in una $H_{3,q}$ ed $F \cap H_{3,q}$ e' un primo proprio di $H_{3,q}$, quindi (*cfr.* (6.9) per $s=1$) $|F \cap H_{3,q}| = q\sqrt{q}+1$. Siano A, B $\in F$, con A $\neq$ B. La retta AB non appartiene a $H_{4,q}$ ed incontra $H_{4,q}$ in $\sqrt{q}+1$ punti, siano essi $A_1 = A$, A_2, ..., $A_{\sqrt{q}+1} = B$. Sia τ_{A_i} l'iperpiano tangente in A_i ad $H_{4,q}$. Tali τ_{A_i} s'incontrano nell'S_2 polare della retta AB. Ogni iperpiano per tale S_2, diverso dagli iperpiani τ_{A_i}, $i=1,2,...,\sqrt{q}+1$, incontra $H_{4,q}$ in una forma hermitiana non singolare $H_{3,q}$. Si ha che $\tau_{A_i} \cap F = \{A_i\}$, onde $S_2 \cap F = (\tau_A \cap \tau_B) \cap F = \emptyset$. I $q-\sqrt{q}$ iperpiani per l'S_2, non tangenti, incontrano F ciascuno in $q\sqrt{q}+1$ punti, quelli tangenti (cioe' gli iperpiani τ_{A_i}) incontrano F al piu' in un punto (il punto A_i). Se m e' il numero dei punti della retta AB in comune con F, pensando allora i punti di F distribuiti sugli iperpiani per l'S_2, si ha:

$$q^2\sqrt{q} + 1 = |F| = (q-\sqrt{q})(q\sqrt{q}+1) + m, \qquad 2 \leq m \leq \sqrt{q}+1$$

$\longrightarrow \quad q+m = q^2+\sqrt{q} +1 \le q+\sqrt{q} +1 \quad \longrightarrow \quad q \le 1$. L'assurdo prova l'asserto.

III.- Poniamo $V_{s,q} = Q^-_{2s+1,q}$ ovvero $V_{s,q} = H_{2s,q}$. In $V_{s,q}$, per ogni $s \ge 2$, non esistono primi propri, onde per un insieme intersezione F di $V_{s,q}$ risulta (in forza delle (6.6), (6.3), (6.4), tenuto conto che $\theta_{2s}-q^s = (q^{s+1}+1)\theta_{s-1}$):

(6.10) $\quad V_{s,q} = Q^-_{2s+1,q}, \quad |F| > (q^{s+1}+1)\theta_{s-2},$

(6.11) $\quad V_{s,q} = H_{2s,q}, \quad |F| > (q^s\sqrt{q} +1)\theta_{s-2}.$

Dimostrazione. L'asserto e' vero per $s=2$ (*cfr. prop.* I, II). Procediamo per induzione rispetto ad s, supponendo $s\ge3$, vero l'asserto per $s-1$ e dimostrandolo per s. Supposto esistente un primo proprio F di $V_{s,q}$, sia $A \in F$ e τ_A l'iperpiano tangente in A a $V_{s,q}$. Si consideri un iperpiano Π di τ_A non per A. Si ha che $V_{s,q} \cap \Pi = V_{s-1,q}$, inoltre $F \cap V_{s-1,q}$ e' un primo di $V_{s-1,q}$ ed e' un primo proprio: perche' (tenuto conto che gli spazi massimali di $V_{s,q}$ hanno dimensione $s-1$ e quelli di $V_{s-1,q}$ hanno dimensione $s-2$, *cfr.* (6.3), (6.4)) se $F \cap V_{s-1,q}$ contenesse uno spazio massimale S_{s-2} di $V_{s-1,q}$, l'S_{s-1} proiezione da A di tale S_{s-2} sarebbe contenuto in F e cio' e' escluso essendo F un primo proprio. Dunque $V_{s-1,q}$ contiene il primo proprio $F \cap V_{s-1,q}$ e cio' e' assurdo, per l'induzione. Ne segue l'asserto.

Nel seguito porremo:

$$\theta_s(q^2) = \sum_{i=0}^{s} q^{2i} , \tag{6.12}$$

si ha:

$$\theta_{2n+1} = \theta_1 \cdot \theta_n(q^2) , \quad \theta_{2n} = q\theta_1 \cdot \theta_{n-1}(q^2) + 1. \tag{6.13}$$

Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione di V. Dalle (5.11), (5.12), dalla proposizione II del n. 5 e dalle (6,i) i=1,2,3,4,5, , otteniamo:

$$V = Q_{2s,q} \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \theta_{s-1}(q^2) \\ |\mathcal{F}| = \theta_{s-1}(q^2) \leftrightarrow \underline{\mathcal{F} \text{ e' totale}} \end{cases} \tag{6.14}$$

(6.15)

$$V = Q^{+}_{\substack{2s+1,q \\ s=2n+1}} \begin{cases} |\mathcal{F}| \le [\theta_{2s} + q^s]/\theta_1 = \sum_{i=0}^{2n} q^i(q^{i+1} + (-1)^i), \\ |\mathcal{F}| = [\theta_{2s} + q^s]/\theta_1 \quad \leftrightarrow \quad \underline{\mathcal{F} \text{ e' totale.}} \end{cases}$$

(6.16)

$$V = Q^{+}_{\substack{2s+1,q \\ s=2n}} \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \left[\theta_{2s} + q^s - q^2 - 1\right]/\theta_1 = q(\theta_{2n-1}(q^2) + q(q-1)\theta_{n-2}(q^2)) \\ \underline{\text{non esistono fibrazioni totali.}} \end{cases}$$

(6.17)
$$V=Q^-_{2s+1,q},\ s=2n \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \left[\theta_{2s}-q^{s}\right]/\theta_1 = q\theta_{2n-1}(q^2)-(q-1)\theta_{n-1}(q^2), \\ |\mathcal{F}| = \left[\theta_{2s}-q^{s}\right]/\theta_1 \leftrightarrow \underline{\mathcal{F}\ \text{e' totale}}. \end{cases}$$

(6.18)
$$V=Q^-_{2s+1,q},\ s=2n+1 \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \left[\theta_{2s}-q^{s}-q^2-1\right]/\theta_1 = q(\theta_{2n}(q^2)-q\sum_{i=0}^{2n-2}(-1)^i q^i), \\ \underline{\text{non esistono fibrazioni totali.}} \end{cases}$$

(6.19)
$$V=H_{2s,q},\ s=2n \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \theta_{s-1}(q^s\sqrt{q}+1)/\theta_1 = \theta_{n-1}(q^2)(q^{2n}\sqrt{q}+1), \\ |\mathcal{F}| = \theta_{s-1}(q^s\sqrt{q}+1)/\theta_1 \leftrightarrow \underline{\mathcal{F}\ \text{e' totale}}. \end{cases}$$

(6.20)
$$V=H_{2s,q},\ s=2n+1 \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le [\theta_{s-1}(q^s\sqrt{q}+1)-(q\sqrt{q}+1)]/\theta_1 = q\theta_{n-1}(q^2)(\sqrt{q}(q^{2n+1}q-1)+1 \\ \underline{\text{non esistono fibrazioni totali}} \end{cases}$$

(6.21)
$$V=H_{2s+1,q},\ s=2n+1 \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le \theta_n(q^2)(q^{2n+1}\sqrt{q}+1), \\ |\mathcal{F}| = \theta_n(q^2)(q^{2n+1}\sqrt{q}+1) \leftrightarrow \mathcal{F}\ \text{e' totale} \end{cases}$$

(6.22)
$$V=H_{2s+1,q},\ s=2n \quad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le [\theta_s(q^s\sqrt{q}+1)-q(q-\sqrt{q})-\theta_1]/\theta_1 = q\sqrt{q}\,[q^{2n}\theta_{n-1}(q^2)+ \\ \qquad + \sum_{i=0}^{2n-2}(-1)^i q^i] + q^3\theta_{n-2}(q^2) \\ \underline{\text{non esistono fibrazioni totali}}\ . \end{cases}$$

Tenuto conto che una quadrica rigata non singolare o una forma hermitiana non singolare di $PG(r,q)$, $r\ge3$, sono varieta' speciali e che $Q_{4,q}$, $Q^-_{5,q}$, $H_{3,q}$, $H_{4,q}$ sono varieta', prive di triangoli, di parametri rispettivamente $(\theta_3; q+1; q+1; q+1)$, $(\theta_4 - q^2; q+1; q+1; q^2+1)$, $(\theta_1(q\sqrt{q}+1); q+1; q+1; \sqrt{q}+1)$, $(\theta_1(q^2\sqrt{q}+1); q+1; q+1; q\sqrt{q}+1)$, dalla proposizione II del n. 4, dalla (4.11) e dalla proposizione III di questo numero, otteniamo:

IV. - <u>Sia</u> $\mathcal{F}$ <u>una fibrazione massimale di una quadrica rigata non singolare o di una forma hermitiana non singolare</u> $[V, L]$ <u>di</u> $PG(r,q)$ <u>con</u> $r \geq 3$. <u>Con la notazione (4.1) si ha:</u>

(6.23) $V = Q_{4,q}$, $|\mathcal{F}| \geq q+1$

(6.24) $V = Q_{2s,q}$ $(s=2n+1\geq 3)$, $\begin{cases} |\mathcal{F}| \geq (q^s+1)\theta_{s-2}/\theta_1, \text{ il segno } = \text{ si h} \\ \text{se e solo se, } F \text{ e' un primo pro} \end{cases}$

(6.25) $V = Q_{2s,q}$ $(s=2n\geq 4)$, $|\mathcal{F}| > (q^s+1)\theta_{s-2}/\theta_1$

(6.26) $V = Q^+_{2s+1,q}$ $(s=\geq 2)$, $\begin{cases} |\mathcal{F}| \geq (q^s+1)\theta_{s-1}/\theta_1, \text{ il segno } = \text{ si h} \\ \text{se e solo se, } F \text{ e' un primo propri} \end{cases}$

(6.27) $V = Q^-_{5,q}$, $|\mathcal{F}| \geq q^2+1$

(6.28) $V = Q^-_{2s+1,q}$ $(s=\geq 3)$, $\begin{cases} |\mathcal{F}| > (q^s+1)\theta_{s-2}/\theta_1, \\ F \text{ non e' un primo proprio.} \end{cases}$

(6.29) $V = H_{3,q}$, $|\mathcal{F}| \geq \sqrt{q}+1$

(6.30) $V = H_{4,q}$, $|\mathcal{F}| \geq q\sqrt{q}+1$

(6.31) $V = H_{2s+1,q}$ $(s=2n\geq 2)$, $\begin{cases} |\mathcal{F}| \geq (q^s\sqrt{q}+1)\theta_{s-1}/\theta_1, \text{ il segno = sil} \\ \text{se e solo se, F e' un primo propr} \end{cases}$

(6.32) $V = H_{2s+1,q}$ $(s=2n+1\geq 3)$, $|\mathcal{F}| > (q^s\sqrt{q}+1)\theta_{s-1}/\theta_1$

(6.33) $V = H_{2s,q}$ $(s\geq 3)$, $|\mathcal{F}| > (q^s\sqrt{q}+1)\theta_{s-2}/\theta_1$, F non e' un primo proprio.

Relativamente alle fibrazioni $\mathcal{F}$ in $Q_{4,q}$ e $Q^-_{5,q}$ i risultati precedenti possoni migliorarsi. Precisamente in [6] *teor.* I *n.* 1 e in [5] *prop.* I *n.* 3 si dimostrano rispettivamente i seguenti teoremi

V. - Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione in $Q_{4,q}$. Si ha:

(6.34) $\mathcal{F}$ massimale $\longrightarrow$ $[|\mathcal{F}|\geq q+1;\ |\mathcal{F}|=q+1 \longleftrightarrow \mathcal{F}$ e' un regolo di una quadrica iperbolica sezione iperpiana di $Q_{4,q}]$;

(6.35) q pari $\longrightarrow$ $[|\mathcal{F}|\leq q^2+1;\ |\mathcal{F}|=q^2+1 \longleftrightarrow \mathcal{F}$ e' totale, le $\mathcal{F}$ totali esistono e sono tutte caratterizzate$]$;

(6.36) q dispari $\longrightarrow$ $|\mathcal{F}| \leq q^2-q+1$;

(6.37) q pari, $q\geq 4$, $\mathcal{F}$ massimale non totale $\longrightarrow$ $|\mathcal{F}|\leq q^2-3$;

(6.38) $q\geq 3$, ogni fibrazione $\mathcal{F}$ con $|\mathcal{F}|=q+2$ o $|\mathcal{F}|=q+3$ non e' mai massimale.

VI. - Sia $\mathcal{F}$ una fibrazione massimale in $Q^-_{5,q}$. Si ha:

(6.39) $|\mathcal{F}| \leq q^3 + 1$;

(6.40) *q pari* $\longrightarrow$ $\Big[|\mathcal{F}| \geq q^2+1$; $|\mathcal{F}| = q^2+1 \longleftrightarrow \mathcal{F}$ *e' una fibrazione totale di una* $Q_{4,q}$ *sezione iperpiana di* $Q^-_{5,q}\Big]$.

(6.41) *q dispari* $\longrightarrow$ $|\mathcal{F}| > q^2+1$.

7.- Insiemi intersezioni, primi, fibrazioni nella grassmanniana delle rette, $\mathcal{G}_{r,q}$, di PG(r,q).

Sia $\mathcal{G}_{r,q}$ la grassmanniana delle rette di PG(r,q), [4]. Se $\mathbb{L}$ e' la famiglia delle rette di $\mathcal{G}_{r,q}$ (cioe' la famiglia dei fasci di rette di PG(r,q)) si ha che $\left[V=\mathcal{G}_{r,q},\mathbb{L}\right]$ e' una varieta' di spazi lineari di parametri (*cfr.* n. 2, *es.* V):

(7.1) $(v=\theta_r\theta_{r-1}/\theta_1;\, q+1;\, u_1=\theta_{r-1},\, u_2=\theta_2;\, n_1=q+1,\, n_2=\theta_{r-2})$.

Gli spazi massimali si suddividono in due famiglie: $\mathbb{S}_1$ costituita dagli spazi immagini delle stelle di rette di PG(r,q), $\mathbb{S}_2$ costituita dai piani immagini dei piani rigati di PG(r,q). La $\left[V,\mathbb{L}\right]$ risulta speciale e sottile. Cominciamo a provare che:

I. - <u>Ogni primo</u> F $\left[\neq V\right]$ <u>di</u> $\left[V,\mathbb{L}\right]$ <u>e' una sezione iperpiana di</u> $\mathcal{G}_{r,q}$ <u>e viceversa; cioe'</u> F <u>e' rappresentativo di un complesso lineare di rette</u> $\mathcal{C}$ <u>di PG(r,q) relativo ad una polarita' nulla</u>

$$\Pi:\ PG(r,q) \longrightarrow PG^*(r,q)$$

<u>che ha come spazio singolare un</u> S_h <u>con</u> $r\equiv h$ mod 2.

<u>*Dimostrazione.*</u> *Il viceversa* essendo evidente, proviamo la parte diretta, cioe' che un primo F di $\left[V,\mathbb{L}\right]$ e' rappresentativo di un complesso lineare di rette di

PG(r,q).

Sia $\mathfrak{C}$ l'insieme delle rette di PG(r,q) rappresentato da $\mathfrak{F}$. Si ha:

(7.2) *Ogni fascio di rette di PG(r,q) o appartiene a $\mathfrak{C}$ ovvero contiene una sola retta di $\mathfrak{C}$.*

Dalla (7.2) segue che:

(7.3) *Per ogni $P \in$ PG(r,q) o tutte le rette per P appartengono a $\mathfrak{C}$ (ed allora P si dira' singolare per $\mathfrak{C}$) ovvero l'unione delle rette di $\mathfrak{C}$ per P costituisce un iperpiano $\Pi(P)$ (iperpiano polare di P rispetto a $\mathfrak{C}$).*

Proviamo intanto che:

(7.4) *Se $\mathfrak{C}$ non ammette punti singolari, l'applicazione Π: $P \in PG(r,q) \longrightarrow \Pi(P) \in PG^*(r,q)$ e' una polarita' nulla non degenere ed allora r e' dispari e $\mathfrak{C}$ e' un complesso lineare di rette non degenere.*

L'applicazione Π: $PG(r,q) \longrightarrow PG^*(r,q)$, se $\mathfrak{C}$ non ammette punti singolari, *e' biettiva*. Infatti se fosse $\Pi(A)=\Pi(B)$ con $A \neq B$, la retta AB apparterrebbe a $\mathfrak{C}$ e per ogni $P \in AB$ si avrebbe $\Pi(P)=\Pi(A)=\Pi(B)$ (infatti per ogni $X \in \Pi(A)=\Pi(B)$ le rette XA ed XB appartengono a $\mathfrak{C}$ e quindi, per la (7.2), il fascio da esse determinato appartiene a $\mathfrak{C}$ onde $XP \in \mathfrak{C}$). Sia $Z \in PG(r,q)-\Pi(A)$ e

$T=\Pi(Z)\cap AB$, allora $\Pi(T)=\Pi(A)$ e contiene la retta ZT, ma cio' e' assurdo, onde $\Pi(A)\neq\Pi(B)$.

Sempre dalla (7.2) segue subito che, per ogni retta ℓ di $PG(r,q)$, se $A, B \in \ell$ gli iperpiani $\Pi(P)$, al variare di P in ℓ, descrivono il fascio di asse $\Pi(A)\cap\Pi(B)$. Ne segue che $\Pi: PG(r,q) \longrightarrow PG^{*}(r,q)$ e' una polarita' nulla e quindi l'asserto della (7.4).

Se $\mathfrak{C}$ ammette punti singolari, sia H l'unione di tali punti. Se $A, B \in H$, ogni punto P della retta AB e' singolare (infatti per ogni $X\in PG(r,q)-AB$, le rette XA e XB appartengono a $\mathfrak{C}$ e quindi il fascio da esse determinato appartiene a $\mathfrak{C}$ onde $XP \in \mathfrak{C}$). Ne segue che H e' un sottospazio S_h, con $0\le h\le r-2$, inoltre per ogni $P\in PG(r,q)-H$, $\Pi(P)$ contiene $H=S_h$. Si consideri un S_{r-h-1} sghembo con l' $S_h=H$, l'applicazione

$$\Pi': S_{r-h-1} \longrightarrow S^{*}_{r-h-1},$$

definita da:

$$(7.5) \qquad P \in S_{r-h-1}, \ \Pi'(P) = \Pi(P)\cap S_{r-h-1},$$

e' una polarita' nulla non degenere di S_{r-h-1}, onde $r-h-1$ e' dispari, cioe' $r\equiv h \bmod 2$. Se ne deduce che $\Pi: PG(r,q) \longrightarrow PG^{*}(r,q)$ e' una polarita' nulla che ha come spazio singolare l'$S_h=H$, cioe' l'asserto della prop. I.

Dalla prop. I si ha che:

II.- Se $r \geq 4$ non esistono primi propri in $\mathscr{G}_{r,q}$. Se $r=3$ ogni sezione iperpiana non tangente di $\mathscr{G}_{3,q}=Q^+_{5,q}$ e' un primo proprio e viceversa.

Dimostrazione. Se $r \geq 4$ esistono piani rigati di PG(r,q) contenuti in un complesso lineare di rette $\mathscr{C}$ di PG(r,q).

Sia $\mathscr{F}$ una fibrazione massimale di $\mathscr{G}_{r,q}$. Con la notazione (4.1) allora, per la (4.2), $\mathscr{F}$ e' un insieme intersezione e quindi, per la (3.12), risulta (tenuto conto della (7.1)):

(7.6) $$|F| \geq \theta_r \theta_{r-2} / \theta_1 ,$$

cioe', per la (4.4):

(7.7) $$|\mathscr{F}| \geq \theta_r \theta_{r-2} / \theta_1^2 .$$

Se nella (7.6) vale il segno di uguaglianza, essendo $\left[\mathscr{G}_{r,q}, L\right]$ speciale, deve essere F un primo che non contiene nessuno spazio di S_1 (*cfr.* (3.13)), cioe', in forza della prop. I, F e' una sezione iperpiana non singolare di $\mathscr{G}_{r,q}$, ossia rappresenta un complesso lineare di rette non singolare di PG(r,q), ma allora deve essere r dispari. Viceversa, se r e' dispari ed F *e' una sezione iperpiana di* $\mathscr{G}_{r,q}$ non singolare, una qualsiasi fibrazione totale $\mathcal{F}$ di F (ammesso esistente) e' una fibrazione massimale di $\mathcal{G}_{r,q}$, per la quale nella (7.6) e cioe' nella (7.7) vale il segno di uguaglianza (*cfr.* (3.13)). Se ne deduce che:

III. - In $\mathcal{G}_{8,q} = Q^+_{5,q}$ per una fibrazione massimale $\mathcal{F}$ si ha (cfr. prop V *n.* 6):

(7.8) q pari $\longrightarrow$ $\left[|\mathcal{F}|\geq q^2+1;\ |\mathcal{F}|=q^2+1 \longleftrightarrow \mathcal{F}\right.$ e' una fibrazione totale di $Q_{4,q}$ sezione iperpiana di $\left.Q^+_{5,q}\right]$.

(7.9) q dispari $\longrightarrow$ $|\mathcal{F}| > q^2+1$.

IV. - In $\mathcal{G}_{r,q}$, con $r=2s\geq 4$, per una fibrazione massimale $\mathcal{F}$ si ha:

(7.10) $$|\mathcal{F}| > \theta_r\theta_{r-2}/\theta_1^2 .$$

V. - In $\mathcal{G}_{r,q}$, con $r=2s+1\geq 5$, per una fibrazione massimale $\mathcal{F}$ si ha:

(7.11) $$|\mathcal{F}| \geq \theta_r\theta_{r-2}/\theta_1^2 ,$$

(7.12) $|\mathcal{F}| = \theta_r\theta_{r-2}/\theta_1^2 \longleftrightarrow \mathcal{F}$ e' una fibrazione totale di una sezione iperpiana non singolare di $\mathcal{G}_{r,q}$.

Qualsiasi sia la fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{r,q}$ dalle (4.5) e (4.6) otteniamo (*cfr.* (7.1)):

$$(7.13)\qquad \begin{cases} |\mathcal{F}| \le |\mathcal{G}_{r,q}|/\theta_1 = \theta_r\theta_{r-1}/\theta_1^2 \\ |\mathcal{F}| = \theta_r\theta_{r-1}/\theta_1^2 \iff \mathcal{F} \text{ e' totale.} \end{cases}$$

Si ha (*cfr.* (6.13)):

$$(7.14)\qquad v=|\mathcal{G}_{2s+1,q}|=\theta_{2s+1}\theta_{2s}/\theta_1=\theta_s(q^2)\cdot\theta_{2s}\equiv s+1 \bmod \theta_1 ,$$

$$(7.15)\qquad v=|\mathcal{G}_{2s,q}| = \theta_{2s}\theta_{2s-1}/\theta_1=\theta_{s-1}(q^2)\cdot\theta_{2s}\equiv s \bmod \theta_1 ,$$

Da cio' e dalla (7.13) segue che:

$$(7.16)\qquad \begin{cases} s+1\not\equiv 0 \bmod \theta_1 \longrightarrow \text{non esistono fibrazioni totali in } \mathcal{G}_{2s+1,q}, \\ s\not\equiv 0 \bmod \theta_1 \longrightarrow \text{non esistono fibrazioni totali in } \mathcal{G}_{2s,q}. \end{cases}$$

E' aperto il problema dell'esistenza di fibrazioni totali in $\mathcal{G}_{2s+1,q}$ con $s+1\equiv 0 \bmod \theta_1$, ovvero in $\mathcal{G}_{2s,q}$ con $s\equiv 0 \bmod \theta_1$. I primi casi che si presentano da esaminare sono le fibrazioni totali $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}_{5,2}$ $\left(|\mathcal{F}|=651\right)$, $\mathcal{G}_{6,2}$ $\left(|\mathcal{F}|=2667\right)$, $\mathcal{G}_{7,3}$ $\left(|\mathcal{F}|=896260\right)$, $\mathcal{G}_{8,3}$, $\mathcal{G}_{9,4}$, $\mathcal{G}_{10,4}$.

Sia P un primo di $\mathcal{G}_{r,q}$. Esso per la prop. I rappresenta un complesso lineare di rette di PG(r,q), il quale ha uno spazio singolare S_{r-2h}, con $h=0,1,\dots,[(r+1)/2]$. Denotato con $\mathcal{C}_h$ tale complesso lineare si ha che per ogni punto $X\in S_{r-2h}$ ogni retta per X appartiene a $\mathcal{C}_h$, per ogni $X\in PG(r,q)-S_{r-2h}$ le rette di $\mathcal{C}_h$ per X sono quelle per X appartenenti all'iperpiano polare $\Pi(X)$ rispetto alla polarita' nulla associata a $\mathscr{C}_h$. Contando allora nei due modi possibili le coppie (X, l), ove $X\in PG(r,q)$, $l\in\mathscr{C}_h$, $X\in l$, si ha: $\theta_1|\mathscr{C}_h|=(\theta_r-\theta_{r-2h})\theta_{r-2}+\theta_{r-2h}\theta_{r-1}$, da cui (*cfr.* (6.13)):

(7.17) $$|P|=|\mathscr{C}_h|=q^{r-2h+1}\theta_{r-2}\cdot\theta_{h-1}(q^2)+\theta_{r-2h}\theta_{r-1}/\theta_1 .$$

Ne segue in ogni caso:

(7.18) $$|P| = |\mathscr{C}_h| \equiv 1 \ mod\ q ,$$

(infatti se $r-2h+1\geq 1$ dalla (7.17) si ha subito, tenuto conto della (6.13), la (7.18); se $r-2h+1=0$, essendo $\theta_{-1}=0$, da (7.17) si ha $|\mathscr{C}_h|=\theta_{2h-3}\cdot\theta_{h-1}(q^2)$ e quindi, essendo $r\geq 3$ e cioe' $h\geq 2$, si ha ancora la (7.18)).

Dalle (7.14), (7.15) si ha:

(7.19) $$|\mathscr{G}_{r,q}| \equiv 1 \ mod\ q .$$

In ogni caso e' dunque (*cfr.* (7.18), (7.19)):

(7.20) <u>Per ogni primo</u> P <u>di</u> $\mathscr{G}_{r,q}$: $|P|\equiv|\mathscr{G}_{r,q}|\equiv\upsilon \ mod\ q$.

Essendo manifestamente $s+1 \equiv q(q-s)\ mod\ \theta_1$ ed $s\equiv q(q-s+1)\ mod\ \theta_1$ dalle (7.14), (7.15) otteniamo:

(7.21) $$\upsilon=|\mathscr{G}_{2s+1,q}| \equiv q(q-s)\ mod\ \theta_1$$

(7.22) $$\upsilon=|\mathscr{G}_{2s,q}| \equiv q(q-s+1)\ mod\ \theta_1 .$$

Inoltre manifestamente e':

(7.23) $$\upsilon=|\mathscr{G}_{r,q}| > q(q-1) .$$

Dalla prop. II del n. 5, tenuto conto delle (7.23), (7.20) e delle (7.21), (7.22) si ha che qualsiasi sia la fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{r,q}$ risulta:

(7.24) $r=2s+1$, $|\mathcal{F}|\le\theta_{2s+1}\theta_{2s}/\theta_1^2-q(q-s)/\theta_1-1$, $1\le s\le q-1$,

(7.25) $r=2s$, $|\mathcal{F}|\le\theta_{2s}\theta_{2s-1}/\theta_1^2-q(q-s+1)/\theta_1-1$, $2\le s\le q$.

Facilmente si ha, per la (6.13):

$$\theta_{2s+1}\theta_{2s}/\theta_1^2-q(q-s)/\theta_1=q\theta_s(q^2)\cdot\theta_{s-1}(q^2)+(q-1)\sum_{i=1}^{s-1}\theta_i(q^2)+s$$

$$\theta_{2s}\theta_{2s-1}/\theta_1^2-q(q-s+1)/\theta_1=q(\theta_{s-1}(q^2))^2+(q-1)\sum_{i=1}^{s-2}\theta_i(q^2)+s-1 ,$$

da cio' e da quanto precede otteniamo allora che:

VI. - <u>Qualsiasi sia la fibrazione $\mathcal{F}$ di $\mathcal{G}_{r,q}$ risulta:</u>

(7.26) $r=2s+1$, $|\mathcal{F}|\le q\theta_s(q^2)\cdot\theta_{s-1}(q^2)+(q-1)\sum_{i=1}^{s-1}\theta_i(q^2)+s-1$, $1\le s\le q-1$

(7.27) $r=2s$, $|\mathcal{F}|\le q(\theta_{s-1}(q^2))^2+(q-1)\sum_{i=1}^{s-2}\theta_i(q^2)+s-2$, $2\le s\le q$.

<u>In particolare si ha:</u>

(7.28) in $\mathcal{G}_{3,q}$, $|\mathcal{F}| \le q^3+q$, $q\ge2$,

(7.29) in $\mathcal{G}_{4,q}$, $|\mathcal{F}| \le q(q^2+1)^2$, $q\ge2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Tallini, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli, (1973), pp. 1-30.

[2] G. Tallini, *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Conv. Teorie Combinatorie (Roma, settembre 1973), Acc. Naz. Lincei 1976, pp. 1-7.

[3] G. Tallini, *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois. Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb., Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", Quaderno n. 64, maggio 1985, pp. 1-139.

[4] G. Tallini, *Lezioni di Geometria III, anno acc. 1986-87*. Ist. Mat. "G. Castelnuovo" Fac. Sc. Mat. Fis. Naturali Univ. Roma (1987).

[5] G. Tallini, *Fibrazioni mediante rette in quadriche e varieta' di Grassmann di PG(r,q)*, Testo Conferenza tenuta nel Dip. Sc. Storia dell'Architettura Univ. G. D'Annunzio (Pescara), aprile 1988, pp. 1-31.

[6] G. Tallini, *Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare*, $Q_{4,q}$ *di PG(4,q)*. Sem. Geom. Comb., Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", Quaderno n. 90, dicembre 1988, pp. 1-22.