Giuseppe Tallini

Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare, $Q_{4,q}$, di $PG(4,q)$.

Seminario di Geometrie Combinatorie
diretto da G. Tallini

n. 90 Dicembre 1988

FIBRAZIONI MEDIANTE RETTE IN UNA QUADRICA NON SINGOLARE, $Q_{4,q}$, DI PG(4,q).

G. Tallini (Roma)

(Ottobre 1988)

1. Introduzione

Sia $Q_{4,q}$ una quadrica non singolare di PG(4,q). Se $P \in Q_{4,q}$ denoteremo con τ_P l'iperpiano tangente in P a $Q_{4,q}$ e con Γ_P il cono, $\tau_P \cap Q_{4,q}$, tangente in P a $Q_{4,q}$. Si ha:

$$(1.1)\quad |\Gamma_P| = \theta_2 = q^2+q+1,\quad |Q_{4,q}| = \theta_3 = \sum_{i=0}^{3} q^i = (q+1)(q^2+1).$$

Sia F una fibrazione mediante rette in $Q_{4,q}$, cioe' un insieme di rette di $Q_{4,q}$ a due a due sghembe. La F si dira' totale se e' un ricoprimento di $Q_{4,q}$, massimale se non e' contenuta propriamente in un'altra fibrazione. Porremo:

$$(1.2)\qquad F = \bigcup_{\ell \in F} \ell .$$

Evidentemente si ha:

$$(1.3)\qquad |F| = |F|(q+1),$$

(1.4) F massimale $\Leftrightarrow$ F e' un insieme intersezione,

(1.5) $|F| \leq q^2+1$; $|F| = q^2+1$ $\Leftrightarrow$ F e' totale.

La $Q_{4,q}$ puo' interpretarsi come una sezione iperpiana non degenere della quadrica di Klein di $PG(5,q)$, rappresentativa delle rette di $PG(3,q)$. I suoi punti allora rappresentano le rette di un complesso lineare, C, non degenere di $PG(3,q)$ e sia π: $PG(3,q) \dashrightarrow PG^*(3,q)$ la polarita' nulla associata a C. Una fibrazione F in $Q_{4,q}$ rappresenta una famiglia di fasci di rette, $\{(P,\pi(P))\}_{P\in K}$, di $PG(3,q)$, con $K\subseteq PG(3,q)$, tale che:

(1.6) $$T\in\pi(P)-\{P\} \Rightarrow P\notin\pi(T); \qquad |K|=|F|,$$

e viceversa. Da (1.6) segue che ogni retta di C incontra K al piu' in un punto e quindi

(1.7) $$\begin{cases} P\in K \Rightarrow K\cap\pi(P)=\{P\}, \\ P\notin K \Rightarrow |K\cap\pi(P)|\leq q+1. \end{cases}$$

Se F e' totale ogni retta di C incontra K in un punto, onde nella $(1.7)_{II}$ vale il segno di uguaglianza e quindi K e' di tipo $(1,q+1)$ rispetto ai piani ed e' $|K| = |F| = q^2+1$ per la (1.5), dunque K e' una (q^2+1)-calotta le cui rette tangenti sono le rette del complesso lineare di rette C, ma allora deve essere q pari. Ne segue che:

(1.8) **Se q e' dispari non esistono fibrazioni totali di $Q_{4,q}$. Se q e' pari ogni fibrazione totale F di $Q_{4,q}$ e' costituita dalle rette che rappresentano i fasci di rette della famiglia $\{(P,\pi(P))\}_{P\in K}$ di $PG(3,q)$, ove K e' una (q^2+1)-calotta tale che: $\forall P\in K \Rightarrow K\cap\pi(P)=\{P\}$.**

Le fibrazioni totali di $Q_{4,q}$ (q pari) sono caratterizzate dalla (1.8). Diamo ora due esempi di fibrazioni massimali non totali in $Q_{4,q}$.

Esempio I. Sia I una quadrica iperbolica sezione iperpiana di $Q_{4,q}$ ed R un regolo di I. Allora R e' una fibrazione massimale in $Q_{4,q}$ con $|R| = q+1$.

Esempio II. Sia I una quadrica iperbolica, sezione di $Q_{4,q}$ con un iperpiano S_3, R un regolo di I e $r\in R$. Sia $P\in r$, τ_P e Γ_P l'iperpiano tangente e il cono tangente in P a $Q_{4,q}$ ed α il piano, di τ_P, tangente a Γ_P lungo r, onde $\alpha\cap Q_{4,q}=r$. Il piano α incontra l'S_3 solo in r, inoltre Γ_P ha in comune con l'S_3 solamente la retta r e la retta di I per P diversa da r. Se $P'\in r-\{P\}$, l'iperpiano $\tau_{P'}$ contiene α e $\Gamma_P\cap\Gamma_{P'}=r$. Ne segue che se si sceglie per ogni punto $\bar{P}$ di r una delle $q-1$ rette di $\Gamma_{\bar{P}}$ non appartenenti ad I, si ottengono $q+1$ rette a due a due sghembe tra loro e dalle rette di $R-\{r\}$. Tali $q+1$ rette e quelle di $R-\{r\}$ costituiscono allora una fibrazione F che e' massimale (perche' $I\subset F$ ed I e' intersecata da ogni retta di $Q_{4,q}$ in almeno un punto) ed e' $|F| = 2q+1$. Se $q>2$ la F non e' totale.

In forza della (1.8) ci si puo' limitare allo studio delle fibrazioni non totali in $Q_{4,q}$. Di cio' appunto ci occuperemo nel presente lavoro, ove proveremo tra l'altro che:

Teorema I. Sia F una fibrazione in $Q_{4,q}$. Si ha:

(1.9) **F massimale $\Rightarrow$ [$|F| \geq q+1$; $|F| = q+1 \Leftrightarrow$ Esempio I.]**

(1.10) **q dispari $\Rightarrow$ $|F| \leq q^2-q+1$.**

(1.11) **q pari, $q\geq 4$, F massimale non totale $\Rightarrow$ $|F| \leq q^2-3$.**

(1.12) **$q\geq 3$, ogni fibrazione F con $|F| = q+2$ o $|F| = q+3$ non e' mai massimale.**

(1.13) **Per $q=2$ le uniche fibrazioni F massimali sono quelle dell'esempio I ($|F| = 3$) e quelle totali ($|F| = 5$).**

(1.14) **Per $q=3$ le uniche fibrazioni F massimali sono quelle dell'esempio I ($|F| = 4$) e quelle con $|F| = 2q+1 = 7$.**

2. Generalita' sulle fibrazioni in $Q_{4,q}$.

Sia F una fibrazione mediante rette in $Q_{4,q}$, onde risulta (cfr. (1.5)):

(2.1) $$|F| = q^2+1-a, \quad \text{con } a\geq 0.$$

Porremo:

(2.2) $$E=Q_{4,q}-F.$$

Risulta:

(2.3) $$|E|=a(q+1).$$

Si prova facilmente che:

(2.4) **Sia α un piano che incontra $Q_{4,q}$ in una conica non degenere. Sia q dispari. Se la retta r polare di α, rispetto a $Q_{4,q}$, e' esterna a $Q_{4,q}$, dei q+1 iperpiani per α, (q+1)/2 intersecano $Q_{4,q}$ in quadriche ellittiche e (q+1)/2 in quadriche iperboliche. Se r e' secante $Q_{4,q}$, per α passano due iperpiani tangenti, (q-1)/2 iperpiani secanti $Q_{4,q}$ in quadriche ellittiche e (q-1)/2 in quadriche iperboliche.**

Sia q pari. Se α non passa per il nucleo N di $Q_{4,q}$, l'iperpiano congiungente α con N e' tangente a $Q_{4,q}$, dei rimanenti q iperpiani, q/2 intersecano $Q_{4,q}$ in quadriche ellittiche e q/2 in quadriche iperboliche. Se α passa per N ogni S_3 per α e' tangente a $Q_{4,q}$ e quindi incontra $Q_{4,q}$ in un cono.

Un iperpiano, S_3, incontra $Q_{4,q}$ o in una quadrica ellittica $\mathcal{E}$, o in un cono Γ_P, tangente in P a $Q_{4,q}$, ovvero in una quadrica iperbolica I. Si ha:

(2.5) $$|\mathcal{E}| = q^2+1, \quad |\Gamma_P| = q^2+q+1, \quad |I| = q^2+2q+1.$$

Se h e' il numero delle rette di F in S_3 (onde h=0 se

$S_3 \cap Q_{4,q} = \mathcal{E}$ o $S_3 \cap Q_{4,q} = \Gamma_P$ con $P \in E$, mentre h=1 se $S_3 \cap Q_{4,q} = \Gamma_P$ con $P \in F$), le rette di F non in S_3 (che sono in numero di $q^2+1-a-h$) incontrano $S_3 \cap F$ in $q^2+1-a-h$ punti distinti. Ne segue che

(2.6) **Se S_3 contiene h rette di F** $\Rightarrow$ $|S_3 \cap F| = q^2+1-a+hq$.

Dalle (2.5), (2.6) si ha:

(2.7) $S_3 \cap Q_{4,q} = \mathcal{E} \Rightarrow |\mathcal{E} \cap E| = a$

(2.8) $S_3 \cap Q_{4,q} = \Gamma_P,\ P \in E \Rightarrow |\Gamma_P \cap E| = q+a$

(2.9) $S_3 \cap Q_{4,q} = \Gamma_P,\ P \in F \Rightarrow |\Gamma_P \cap E| = a$

(2.10) $S_3 \cap Q_{4,q} = \mathcal{I}$ **contenente h rette di F** $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |\mathcal{I} \cap E| = a-q(h-2).$$

Da (2.10) si ha:

(2.11) **Se $a \leq q-1$ ogni quadrica iperbolica $\mathcal{I} = S_3 \cap Q_{4,q}$ ha al piu' due rette in comune con F e si ha:**

$|\mathcal{I} \cap E| = a+2q \iff h=0$, $|\mathcal{I} \cap E| = a+q \iff h=1$,

$|\mathcal{I} \cap E| = a \iff h=2$.

Proviamo che:

(2.12) **Se α e' un piano intersecante $Q_{4,q}$ in una conica C non degenere e, se q e' pari α non passa per il nucleo N di $Q_{4,q}$, risulta: $|\alpha \cap E| \leq a$. Se q e' pari ed α passa per N, allora $|\alpha \cap E|$ uguaglia il numero dei coni per α tangenti $Q_{4,q}$ in punti di E.**

Dimostrazione. Se q e' dispari ovvero se q e' pari ed α non passa per N, in forza della (2.4) per α passa almeno un S_3 intersecante $Q_{4,q}$ in una quadrica ellittica $\mathcal{E}$; dalla (2.7) si ha allora $|\alpha \cap E| \leq |\mathcal{E} \cap E| = a$. Se q e' pari ed α passa per N, sia $c = |\alpha \cap E| = |C \cap E|$ ed u il numero dei coni per α tangenti a

$Q_{4,q}$ in punti di E. Si ha per le (2.3), (2.8), (2.9):
$u(q+a-c)+(q+1-u)(a-c)=a(q+1)-c$ da cui $u=c$, onde l'asserto.

(2.13) **Se $a\leq q$ ogni retta non contenuta in E incontra E al piu' in a punti. Ne segue che se F e' massimale ogni retta di $Q_{4,q}$ incontra E in al piu' a punti.**

Dimostrazione. Sia ℓ una retta di $Q_{4,q}$ non contenuta in E e sia $P\in\ell-E$. Il cono T_P contiene ℓ ed ha a punti in comune con E (cfr. (2.9)), onde ℓ ha al piu' a punti in comune con E.

(2.14) **Se $a\leq q$, sia ℓ una retta con $|\ell\cap E|=a$ e $P\in\ell-E$. Allora ogni retta per P diversa da ℓ e' tutta contenuta in F.**

Dimostrazione. Segue da (2.9).

(2.15) **Se r,s sono due rette di $Q_{4,q}$ incidenti in un punto P di F, si ha: $|(r\cup s)\cap E|\leq a$.**

Dimostrazione. Segue da (2.9).

(2.16) **Se r,s sono due rette di $Q_{4,q}$, ciascuna non contenuta in E, incidenti in un punto P di E, si ha $|(r\cup s)\cap E|\leq 2a-1$ se $a\leq q$.**

Dimostrazione. Segue dalla (2.13).

(2.17) **Sia $a\leq q-1$, per la (2.11) e le (2.7),(2.8),(2.9) ogni S_3 incontra E in a, a+q, a+2q punti. Siano t_0,t_1, t_2 rispettivamente il numero degli S_3 che incontrano E in a, a+q, a+2q punti. Risulta:**

$t_0=\theta_4-a\theta_2+a(a-1)/2$, $\quad t_1=a(\theta_2+1-a)$,

$t_2=a(a-1)/2$.

Dimostrazione. Si ha evidentemente:

$$\begin{cases} t_0+t_1+t_2=\theta_4 \\ at_0+(a+q)t_1+(a+2q)t_2=|E|\theta_3=a(q+1)\theta_3 \\ a(a-1)t_0+(a+q)(a+q-1)t_1+(a+2q)(a+2q-1)t_2= \\ \qquad\qquad =a(q+1)[a(q+1)-1]\theta_2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo l'asserto.

Dalla (2.10) otteniamo:

(2.18) **Sia I una quadrica iperbolica sezione iperpiana di $Q_{4,q}$ ed h il numero delle rette di F in I. Si ha:**

$$I \subset F \iff a=q(h-2).$$

Ne segue:

$$I \subset F \implies h\geq 2.$$

$$I \subset F,\ h=2 \implies a=0 \iff F \text{ e' totale.}$$

$$|F|\not\equiv 1 \bmod q \implies \text{non esistono quadriche iperboliche } I \subset F.$$

Dalla (2.18) si deduce la seguente caratterizzazione delle fibrazioni totali di $Q_{4,q}$.

II. Se esiste una quadrica iperbolica I, sezione iperpiana di $Q_{4,q}$, contenuta in F e contenente esattamente h=2 rette di F allora F e' una fibrazione totale. Viceversa se F e' totale ogni quadrica iperbolica I contiene esattamente due rette di F.

Dalle (2.1), (2.18) si ha:

III. Se esiste una quadrica iperbolica *I* contenuta in F ed e' $|F| < 3q+1$ allora *F* coincide con l'esempio I o con l'esempio II del n.1.

Proviamo che:

IV. Per ogni fibrazione massimale *F* in $Q_{4,q}$ si ha: $|F| \geq q+1$, il segno di uguaglianza avendosi se, e solo se, la *F* coincide con l'esempio I n.1.

Dimostrazione. Se *F* e' totale, per la (1.5) si ha $|F| = q^2+1 > q+1$. Supposto la *F* non totale, sara' $E \neq \emptyset$ e sia $P \in E$. Il cono Γ_P, tangente in P a $Q_{4,q}$, non contiene rette di *F*, onde:

$$|F| = |\Gamma_P \cap F|,$$

d'altra parte, essendo *F* massimale, ciascuna delle q+1 rette di Γ_P incontra F in almeno un punto ($\neq P$) e quindi:

$$|F| = |\Gamma_P \cap F| \geq q+1.$$

Se $|F| = q+1$ ogni retta di Γ_P incontra F esattamente in un punto, cioe' ogni retta non contenuta in F incontra F esattamente in un punto. Sia *I* la quadrica iperbolica sezione di $Q_{4,q}$ con l'S_3 congiungente due rette r,s di *F*. Se $T \in I - r \cup s$, la retta, t, per T incidente r ed s, avendo due punti in comune con F (i punti $r \cap t$ ed $s \cap t$) appartiene ad F, dunque $I \subset F$. Dalla proposizione III segue allora che *F* coincide con l'esempio I del n.1. Si ha cosi' l'asserto.

3. Fibrazioni F in $Q_{4,q}$ con $|F| \leqslant q+3$.

Sia F una fibrazione massimale in $Q_{4,q}$. Per la prop. IV possiamo supporre $|F| > q+1$. Porremo allora:

(3.1) $$|F| = q+b, \quad \text{con } b \geqslant 2.$$

Supponiamo che vi sia una retta r non di F contenuta in F. Essendo $|F| > q+1$ esiste qualche retta s di F sghemba con r. Si consideri la quadrica iperbolica I sezione di $Q_{4,q}$ con l'S_3 congiungente r ed s. Sia R il regolo di I contenente r ed s, m il numero delle rette di R appartenenti ad F ed U l'unione di tali m rette. Le rette di $F-R$ sono in numero di $|F|-m=q+b-m$. Esse intersecano I in punti distinti e costituiscono l'insieme $I \cap F-U$. I punti di $I \cap F-U$ che non stanno su r sono in numero di $q+b-m-(q+1) = b-m-1$. Ciascuna delle $q-m$ rette di R diverse da r e dalle m rette di R appartenenti ad F, contiene almeno un punto di $I \cap F-r \cup U$ (perche' F e' massimale) e quindi risulta: $q-m \leqslant b-m-1$, cioe' $b \geqslant q+1$. Si e' cosi' provato che:

(3.2) **Sia F una fibrazione massimale in $Q_{4,q}$. Se F contiene una retta non di F deve essere $b \geqslant q+1$ cioe' $|F| \geqslant 2q+1$. Ne segue che se $b \leqslant q$, cioe' $|F| \leqslant 2q$, ogni retta contenuta in F e' una retta di F.**

Se $F \in E$ si ha $|\Gamma_P \cap F| = |F| = q+b$, poiche' ognuna delle q+1 rette di Γ_P ha almeno un punto in comune con F (essendo F massimale), si ha che ciascuna di tali rette ha al piu' b punti in comune con F ed inoltre due di tali rette hanno complessivamente al piu' b+1 punti in comune con F. Da (3.2) segue allora che:

(3.3) **Se $b \leq q$, cioe' $|F| \leq 2q$, F massimale, ogni retta non di F ha al piu' b punti in comune con F. Inoltre se r,s sono rette di $Q_{4,q}$ incidenti in un punto $P \notin F$ risulta $|(r \cup s) \cap F| \leq b+1$.**

Proviamo ora che:

V. Una fibrazione F in $Q_{4,q}$ con $|F| = q+b$, $b=2,3$, non e' mai massimale per $b=2$ e q qualsiasi, per $b=3$ e $q \geq 3$.

Dimostrazione. Supponiamo F massimale. Siano $r,s \in F$, I la quadrica iperbolica sezione di $Q_{4,q}$ con l'S_3 congiungente r, s, R il regolo di I a cui r,s appartengono. Siano m (≥ 2) le rette di F appartenenti ad R ed U l'unione di tali rette. Poiche' $|F| > q+1$ esiste un punto $T \in I \cap F - U$. Sia t la retta per T incidente r,s. Essa ha almeno tre punti in comune con F (i punti T, $r \cap t$, $s \cap t$) e quindi, se $b=2$, per la (3.3), appartiene ad F e cio' e' assurdo (perche' t incide rette di F). Si ha cosi' l'asserto per $b=2$ e $q \geq 2$.

Sia $b=3$, $q \geq 3$. La t ha in comune con F almeno $m+1$ punti, onde $m+1 \leq b = 3$ (cfr.(3.3)). Dunque $m=2$, cioe' $U = r \cup s$. Una retta ℓ di R, diversa da r,s ha al piu' tre punti in comune con F (cfr.(3.3)). Sia quindi $P \in \ell - F$ e p la retta per P incidente r,s. Le rette ℓ, p (incidenti in $P \notin F$) hanno al piu' $b+1 = 4$ punti complessivamente in comune con F (cfr.(3.3)) e quindi (essendo $p \cap r \in F$, $p \cap s \in F$) la ℓ ha al piu' due punti in comune con $I \cap F - U$. Poiche' le rette di F che non sono in I sono $q+1$, sara' $|I \cap F - U| = q+1$. D'altra parte le rette di $R - \{r,s\}$ sono $q-1$. Ne segue che esiste una retta $\bar{\ell} \in R - \{r,s\}$ che ha esattamente due punti L_1, L_2 in comune con F. Per ogni $P \in \bar{\ell} - F$

la retta, p, per P incidente r,s ha in comune con F solamente i punti $p\cap r$, $p\cap s$ (altrimenti $|(\bar{\ell}\cup p)\cap F| \geq 5$ e cio' e' escluso per la (3.3)). Ne segue che i $q+1$ punti di $I\cap F-U$ appartengono alle rette p_1,p_2 per L_1,L_2 incidenti r,s. Ma allora le rette p_1,p_2 hanno ciascuna quattro punti in comune con F e quindi, per la (3.3), appartengono ad F, ma cio' e' assurdo (in quanto p_1,p_2 incidono le rette r,s di F). Si ha cosi' l'asserto.

Dalle proposizioni IV n.2 e V si ha:

VI. Le uniche fibrazioni massimali in $Q_{4,q}$, con $q=2$, sono quelle totali e quelle dell'esempio I n.1.

Dalla proposizione V segue che per una fibrazione F in $Q_{4,q}$ risulta:

(3.4) **$q\geq 3$, F massimale, $|F| > q+1 \Rightarrow |F| \geq q+4$.**

4. Fibrazioni in $Q_{4,q}$ con q dispari.

Usando le notazioni del n.2, dalle (2.9) segue subito che:

(4.1) **Qualsiasi sia la fibrazione F in $Q_{4,q}$ (q pari o dispari) con $a \leq q-2$, per ogni $P \in F$ passano due rette non di F ma tutte contenute in F.**

Proviamo che:

(4.2) **Non puo' esistere in $Q_{4,q}$, con q dispari, una fibrazione F con $a \leq q-1$, tale che esistano in $Q_{4,q}$ due rette incidenti, non di F, ma contenute in F. Dalla (4.1) segue allora che qualsiasi sia la fibrazione F in $Q_{4,q}$, con q dispari, deve aversi $|F| \leq q^2-q+2$.**

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che esistano due rette t,s di $Q_{4,q}$, q dispari, non di F ma contenute in F, incidenti in un punto P ($\in$F). Sia α il piano congiungente r ed s e τ_P l'iperpiano tangente in P a $Q_{4,q}$. Esso contiene α. Ogni S_3 per α distinto da τ_P incontra $Q_{4,q}$ in una quadrica iperbolica I. Per la (2.11), essendo $a \leq q-1$, I contiene al piu' due rette di F (appartenenti ad uno stesso regolo di I) le quali incontrano α in punti, distinti, di $r \cup s-\{P\}$. Siano u_0, u_1,u_2 rispettivamente il numero degli S_3 per α che incontrano $Q_{4,q}$ in quadriche iperboliche contenenti zero, uno o due rette di F. Tenuto conto che per ogni punto di $r \cup s-\{P\}$ passa una retta di F che e' congiunta ad α da un S_3 intersecante $Q_{4,q}$ in una quadrica iperbolica, si ha:

$$u_0+u_1+u_2 = q, \qquad u_1+2u_2 = |r \cup s-\{P\}| = 2q.$$

Da cio' segue, per differenza: $u_2 = q+u_0$. D'altra parte, dalla prima delle precedenti uguaglianze si ha $u_2 \leqslant q$, onde deve essere: $u_0=0$, $u_2=q$, $u_1=0$. Ne segue che per ogni punto $R \in r-\{P\}$, l'S_3 congiungente α con la retta ℓ di F per R, incontra $Q_{4,q}$ in una quadrica iperbolica I che contiene due rette di F : la ℓ ed un'altra ℓ', ambedue appartenenti al regolo di I che non contiene r, onde $\ell' \cap r = \{R'\}$ con $R' \neq R$, $R' \neq P$. L'applicazione biettiva:

$$\varphi: R \in r-\{P\} \dashrightarrow R' \in r-\{P\}$$

e' involutoria e priva di punti uniti, onde $q = |r-\{P\}|$ deve essere pari, ma cio' e' contro il supposto. Ne segue l'asserto.

VII. Ogni fibrazione F in $Q_{4,q}$, con q dispari, e' tale che: $|F| \leqslant q^2-q+1$.

Dimostrazione. In forza della (4.2) si tratta di provare che non esiste una fibrazione F in $Q_{4,q}$ (q dispari) con $|F| = q^2-q+2$, cioe' $a=q-1$. Supposto per assurdo che una tale F esista, per la (4.2) essa e' massimale ed inoltre non vi sono in $Q_{4,q}$ due rette incidenti non di F ma contenute in F. Sia $P \in F$. Poiche' $|\Gamma_P \cap E| = a = q-1$ (cfr.(2.9)) delle q rette di Γ_P, diverse dalla retta di F per P, una e' contenuta in F e le altre sono 1-secanti E. Poiche', essendo F massimale, ogni retta ℓ di $Q_{4,q}$ contiene un punto P di F, si ha che o $\ell \subseteq F$ ovvero $|\ell \cap E| = 1$. Se $T \in E$, ciascuna delle q+1 rette di Γ_T, per quanto ora detto, ha il solo punto T in comune con E, onde $|\Gamma_T \cap E| = 1$ e cio' e' assurdo per la (2.8). Ne segue l'asserto.

Dalle proposizioni VII, IV n.2, V n.3 si ha:

VIII. Le uniche fibrazioni massimali F in $Q_{4,q}$ con $q=3$ sono quelle dell'esempio I n.1 ($|F| = 4$) e quelle con $|F| = 2q+1 = 7$ (un esempio essendo dato dall'es. II n.1).

5. Fibrazioni non totali F in $Q_{4,q}$, q pari e $q \geq 4$, con $|F| \geq q^2-2$.

Per la proposizione VI nello studio delle fibrazioni in $Q_{4,q}$, q pari, possiamo supporre $q \geq 4$. Proviamo che:

(5.1) **Ogni fibrazione F in $Q_{4,q}$, q pari e $q>4$, con $|F| = q^2$ (cioe' a=1, cfr. n.2) non e' mai massimale ed e' contenuta in una unica fibrazione totale.**

Dimostrazione. Supposto la F massimale, siano A,B punti distinti di E ($|E| = q+1 > 2$, cfr.(2.3)) e sia α un piano per A, B e non passante per il nucleo N di $Q_{4,q}$. Essendo a=1, per le (2.12),(2.13),(2.15),(2.16) si ha $|\alpha \cap E| \leq 1$, ma cio' e' assurdo essendo $A,B \in \alpha \cap E$. Ne segue l'asserto.

(5.2) **Ogni fibrazione F in $Q_{4,q}$, q pari e $q \geq 4$, con $|F| = q^2-1$ (cioe' a=2) non e' mai massimale e contenuta in una unica fibrazione totale.**

Dimostrazione. Supposto la F massimale, per la (2.17) (essendo $a = 2 \leq q-1$) esiste un sol S_3 contenente 2+2q punti di E e cioe' contenente E, essendo $|E| = 2+2q$ (cfr.(2.3)). Tale S_3 interseca $Q_{4,q}$ in una quadrica iperbolica (cfr.(2.7),(2.8),(2.9)) e quindi non passa per il nucleo N di $Q_{4,q}$. Se A,B sono punti distinti di E, i q+1 piani per A,B di S_3 incontrano E al piu' in tre punti (cfr.(2.16),(2.15),(2.12),(2.13)) e quindi $|E| = 2q+2 \leq (q+1)+2$ e cio' e' assurdo. Ne segue l'asserto, tenuto conto della (5.1).

Sia ora F una fibrazione massimale in $Q_{4,q}$, q pari e $q\geq 4$, con $|F| = q^2+1-a$ e $3 \leq a \leq q-1$. Per la (2.17) esistono allora $a(a-1)/2 \geq 3$ iperpiani che contengono ciascuno punti di E e quindi che incontrano $Q_{4,q}$ in quadriche iperboliche prive di rette di F (cfr. (2.7), (2.8), (2.9), (2.10)). Siano S'_3 ed S''_3 due distinti di essi. Si ha: $|S'_3 \cap E| = 2q+a$, onde $|E-S'_3| = |E|-(2q+a) = q(a-2)$ (essendo $|E| = a(q+1)$, cfr. (2.3)). Sia $\alpha = S'_3 \cap S''_3$. Si ponga:

$$(5.3) \qquad \begin{cases} x = |E\cap S''_3-\alpha| = |E\cap S''_3-S'_3| \\ y = |E\cap\alpha|. \end{cases}$$

Si ha:

$$(5.4) \qquad x+y = |E\cap S''_3| = 2q+a,$$

d'altra parte risulta:

$$(5.5) \qquad q(a-2) = |E-S'_3| \geq |E\cap S''_3-S'_3| = x.$$

Da cio' e dalla (5.4) otteniamo:

$$(5.6) \qquad y \geq a+q(4-a),$$

il segno di uguaglianza in (5.6) avendosi se, e solo se, esso vale in (5.5) , cioe' se, e solo se, $E \subseteq S'_3 \cup S''_3$.

Se a=3 da (5.6) si ha $y = |E\cap\alpha| \geq q+3$ e quindi α incontra $Q_{4,q}$ in due rette, r ed s, distinte e sia $P = r\cap s$. Se $P\in F$ si ha l'assurdo (cfr. (2.15)):

$$3 = a \geq |E\cap(r\cap s)| = |E\cap\alpha| = y \geq q+3.$$

Se $P\in E$ (tenuto conto della (2.16) e che F e' massimale e quindi che ne' r ne' s sono contenute in E) si ha ancora l'assurdo:

$$5 = 2a-1 \geq |E\cap(r\cup s)| = |E\cap\alpha| = y \geq q+3.$$

Se ne deduce, anche in forza delle (5.1) e (5.2), che:

(5.7) **Ogni fibrazione F in $Q_{4,q}$, q pari e $q\geq 4$, con $|F| = q^2-2$ non e' mai massimale e contenuta in una unica fibrazione totale.**

Dalle (5.1),(5.2),(5.7) si ha:

IX. In $Q_{4,q}$, q pari e $q \geq 4$, ogni fibrazione F massimale non totale e' tale che $|F| \leq q^2-3$.

Dalle proposizioni IV,VII,IX,V,VI,VIII segue il Teorema I del n.1.

6. Insiemi di classe [0,1] rispetto alle rette di un complesso lineare in PG(3,q).

Sia C un complesso lineare di rette non degenere di PG(3,q) e π: $P\in PG(3,q) \dashrightarrow \pi(P)\in PG^*(3,q)$ la polarita' nulla associata a C (cioe' la polarita' nulla che fa corrispondere ad ogni P di PG(3,q) il piano $\pi(P)$ unione delle rette di C per P). Un insieme K di PG(3,q) sara' detto di classe [0,1] rispetto a C se ogni retta di C incontra K in zero ovvero un punto. K sara' detto massimale se non e' contenuto propriamente in un insieme K' ancora di classe [0,1] rispetto a C.

Tenuto conto di quanto esposto nel n.1, le rette di C possono interpretarsi come i punti di una quadrica $Q_{4,q}$ sezione iperpiana (non tangente) della quadrica di Klein. Un insieme K di PG(3,q) di classe [0,1] rispetto a C determina allora una fibrazione F in $Q_{4,q}$, con $|F| = |K|$, le rette di F essendo l'immagine in $Q_{4,q}$ dei fasci $\{(P,\pi(P)),P\in K\}$. Viceversa ogni fibrazione F in $Q_{4,q}$ determina in PG(3,q) un insieme K, con $|K| = |F|$, di classe [0,1] rispetto a C costituito dai centri dei fasci che rappresentano le rette di F. Inoltre la F e' massimale se, e solo se, l'insieme K ad esso associato e' massimale, cioe' se, e solo se, ogni piano di PG(3,q) interseca K almeno in un punto, ossia (tenuto conto della $(1.7)_{II}$) se, e solo se, K e' un blocking set rispetto ai piani.

Dunque lo studio delle fibrazioni in $Q_{4,q}$ equivale a quello degli insiemi K di classe [0,1] rispetto a C. Allora dal Teorema I e dalle (1.5),(1.8) deduciamo il seguente teorema relativo agli insiemi di classe [0,1] rispetto a C.

X. Sia C un complesso lineare di rette non degenere di $PG(3,q)$ e K un insieme di classe $[0,1]$ rispetto a C. Si ha:

(6.1) **$|K| \leq q^2+1$; $|K| = q^2+1 \iff q$ pari e K e' una (q^2+1)-calotta.**

(6.2) **K massimale $\Rightarrow [|K| \geq q+1;\ |K|=q+1 \iff K$ e' una retta$]$.**

(6.3) **q dispari $\Rightarrow |K| \leq q^2-q+1$.**

(6.4) **q pari, $q\geq 4$, K massimale, $|K|<q^2+1 \Rightarrow |K|\leq q^2-3$.**

(6.5) **$q\geq 3$, K massimale, $|K| > q+1 \Rightarrow |K| \geq q+4$.**

(6.6) **Per $q=2$ gli unici insiemi K massimali sono le rette e le (q^2+1)-calotte.**

(6.7) **Per $q=3$ gli unici insiemi K massimali sono le rette e quelli con $|K| = 7$.**

Ai risultati precedenti si puo' giungere studiando direttamente gli insiemi K di $PG(3,q)$ di classe $[0,1]$ rispetto a C. Al riguardo daremo ora una diversa dimostrazione della (6.3) ed ulteriori precisazioni circa la cardinalita' di una fibrazione massimale non totale F di $Q=Q_{4,q}$, q pari.

Sia m il massimo numero di punti allineati di K. Poiche' ogni piano per una retta r che sia m-secante K ha in comune con K al piu' $q+1$ punti, si avra': $|K| \leq (q+1)(q+1-m)+m$, cioe':

(6.8) $$|F| = |K| \leq q^2+1-(m-2)q, \quad m = \max(K\cap r), \text{ con } r \text{ retta di } PG(3,q).$$

Proviamo ora che:

X. Se q e' dispari ogni fibrazione F massimale di $Q_{4,q}$ e' tale che:

(6.9) $$q+1 \leq |F| \leq q^2-q+1.$$

Inoltre:

(6.10) **Se K e' una calotta risulta $|K| = |F| \leq q^2-q-1$.**

Dimostrazione. Per la (6.2) basta provare che $|F| \leqslant q^2-q+1$ e la (6.10). Se K non e' una calotta, sara' $3 \leqslant m = \max(H \cap r)$ (r retta di $PG(3,q)$) e quindi per la (6.8) si ha $|F| \leqslant q^2-q+1$. Se K e' una calotta ogni piano π e' tale che $|K \cap \pi| \leqslant q$ (infatti se esistesse un piano π tale che $|K \cap \pi| = q+1$, allora $K \cap \pi$ sarebbe una conica di π tale che per $P = \varphi^{-1}(\pi)$ ogni retta di π e' tangente e cio' e' assurdo essendo q dispari). Siano A_1, A_2 due distinti punti di K. Ciascuno dei $q+1$ piani per A_1A_2 incontra K in al piu' $q-2$ punti diversi da A_1, A_2, onde e' $|K| \leqslant (q+1)(q-2)+2 = q^2-q < q^2-q+1$, ne segue la (6.9). Se K e' una calotta ed e' $|K| = q^2-q$ ogni piano, avente due punti in comune con K, incontra K in un q-arco. Quindi (essendo F massimale) ogni piano α di $PG(3,q)$ incontra K o in un punto P, ed allora $\alpha=\pi(P)$, oppure in un q-arco. Siano A_1, A_2 due punti di K ed $r = \pi(A_1) \cap \pi(A_2)$. La r e' esterna a K ed e' la polare di A_1A_2 rispetto alla polarita' π, quindi ogni piano per r, diverso da $\pi(A_1), \pi(A_2)$, incontra K in un q-arco (perche' $A_1A_2 \cap K = \{A_1, A_2\}$). Ne segue che: $|K| = q(q-1)+2$ e cio' e' escluso essendo $|K| = q(q-1)$. Ne segue la (6.10).

Se q e' pari, sia N il nucleo di $Q_{4,q}$ (cioe' il punto per cui passano tutti gli iperpiani tangenti di $Q_{4,q}$, onde ogni retta per N e' tangente a $Q_{4,q}$). Proiettando $Q_{4,q}$ da N su un $S_3 = PG(3,q)$ di $PG(4,q)$ non per N, si ottiene una biezione che muta le rette di $Q_{4,q}$ nelle rette di un complesso lineare Γ. Ogni fibrazione F di $Q_{4,q}$ si muta in una fibrazione F', mediante rette di Γ, in $PG(3,q)$. Si ha che F e' massimale se, e solo se, F' e' massimale rispetto a Γ (cioe' ogni retta di Γ incide qualche retta di F') e quindi:

F' massimale in $PG(3,q)$ $\Rightarrow$ F e' massimale in $Q_{4,q}$.

Ma non vale il viceversa, cioe' potrebbe esistere una fibrazione F massimale in $Q_{4,q}$ tale che la sua proiezione F' non sia massimale in PG(3,q) (pur essendo massimale rispetto a Γ): per esempio il regolo di una quadrica iperbolica sezione di $Q_{4,q}$ con un iperpiano. Si osservi pero' che se F e' totale, anche la sua proiezione F' e' totale e viceversa (perche' $|F| = |F'| = q^2+1$).

Sia F una qualsiasi fibrazione non totale di $Q_{4,q}$, allora F' e' una fibrazione non totale di PG(3,q). Se la F' non e' contenuta in una fibrazione totale di PG(3,q) sara' $|F| = |F'| \leqslant q^2-\sqrt{q}$. Se ne deduce che:

XI. Se q e' pari, ogni fibrazione F di $Q_{4,q}$ massimale non totale, tale che la sua proiezione F' da N non sia contenuta in una fibrazione totale di PG(3,q), soddisfa alla:

(6.11) $$q+1 \leqslant |F| \leqslant q^2-\sqrt{q}.$$

In ogni caso, se q e' pari ed F e' una fibrazione massimale non totale di $Q_{4,q}$, sia K il sottoinsieme di PG(3,q) ad essa associato. Se K non e' una calotta per la (6.8) risultera' $|F| = |K| \leqslant q^2-q+1$ (perche' $m \geqslant 3$); se K e' una calotta, non potra' essere contenuta in una (q^2+1)-calotta (altrimenti F non sarebbe massimale non totale), dunque K sara' una calotta completa diversa da (q^2+1)-calotta, ne segue che:

XII. Se q e' pari, denotato con $M_{3,q}$ il massimo numero di punti di una calotta completa, diversa da una (q^2+1)-calotta, di PG(3,q), per ogni fibrazione F di $Q_{4,q}$ massimale non totale risulta:

(6.12) $$|F| \leqslant M_{3,q},$$

quindi, essendo $M_{3,q} \leqslant q^2-\sqrt{q}/2+1$, cfr.[1], si ha:

(6.13) $$|F| \leqslant q^2-\sqrt{q}/2+1.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] **B. Segre.** *Introduction to Galois geometries* . Mem. Acc. Naz. Lincei (8) 8 (1967) pp.133-236.

[2] **G. Tallini.** *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti* . Note I,II, Rend. Acc. Lincei (8) 20 (1956) pp.311-317; pp.442-446.

[3] **G. Tallini.** *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois* . Relazione n.30 Ist. Mat. Univ. Napoli (1974).

[4] **G. Tallini.** *Fibrazioni mediante rette in PG(r,q)* . Le Matematiche XXXVII, fasc.I, 1982 pp.8-27.