Problemi e Risultati sulle geometrie di Galois

G. TALLINI (Napoli)

Relazione N. 30

Istituto di Matematica dell'Università di Napoli

ISTITUTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI NAPOLI

Via Mezzocannone, 8 - 80134 NAPOLI (Italia)

Entrato in redazione
il 18 dicembre 1973

PROBLEMI E RISULTATI SULLE GEOMETRIE DI GALOIS

G. Tallini (a Napoli)

1.- Spazi geometrici e k-insiemi.

Sia S un insieme non vuoto ed $\mathfrak{R} = \{r_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ una famiglia non vuota di parti di S. La coppia $(S,\mathfrak{R})$ sara' detta *spazio geometrico*, gli elementi di S si chiameranno *punti*, $\mathfrak{R}$ si dira' *struttura geometrica* ed S *sostegno* dello spazio $(S,\mathfrak{R})$. Dare lo spazio geometrico $(S,\mathfrak{R})$ equivale a dare la struttura d'incidenza $(S,\mathfrak{I},I)$, ove e' $I = \{(P,i) \in S \times \mathfrak{I} : P \in r_i\}$ (cfr. [3], [30]).

La classe degli spazi geometrici puo' strutturarsi in due modi diversi a categoria a seconda che si definiscono i morfismi tra $(S,\mathfrak{R})$ ed $(S', \mathfrak{R}')$ come quelle applicazioni di S in S' le cui immagini di elementi di $\mathfrak{R}$ siano elementi di $\mathfrak{R}'$, ovvero le controimmagini di elementi di $\mathfrak{R}'$ siano elementi di $\mathfrak{R}$. Si ottiene in tal modo *la categoria covariante* ovvero *la categoria controvariante degli spazi geometrici*.

Gli isomorfismi dell'una categoria coincidono con quelli della altra e sono le biezioni che insieme alle loro inverse mutano la struttura geometrica dell'uno spazio in quella dell'altro. Lo studio degli spazi geometrici e' fatto a meno di isomorfismi, cioe' identificando due spazi geometrici tra loro isomorfi. Dato uno spazio geometrico $(S,\mathfrak{R})$, gli automorfismi di esso costituiscono un gruppo da dirsi *gruppo strutturale* di $(S,\mathfrak{R})$, si puo' cosi' definire la *geometria* di $(S,\mathfrak{R})$ rispetto a tale gruppo.

Dato un sottoinsieme K $(\neq \phi)$ di punti di uno spazio geometrico $(S,\mathfrak{R})$, sia $\mathfrak{R}_K$ la famiglia di parti di K intersezione di $\mathfrak{R} = \{r_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ con K :

$$(1) \qquad \mathfrak{R}_K = \{r_i \cap K\}_{i \in \mathfrak{I}} .$$

Lo spazio geometrico $(K,\mathfrak{R}_K)$ dicesi *sottospazio* di $(S,\mathfrak{R})$ ed $\mathfrak{R}_K$ chiamasi struttura geometrica *indotta* da quella di $(S,\mathfrak{R})$ in K .

Nel seguito considereremo solamente spazi geometrici infiniti (supporremo, cioe' S ed $\mathcal{T}$ finiti). Sia $(S, \mathfrak{R} = \{r_i\}_{i \in \mathcal{T}})$ un tale spazio, poniamo

(2) $$\rho = \max_{i \in \mathcal{T}} |r_i| \ .$$

Se K e' un k-insieme $(k = |K| > 0)$ di $(S, \mathfrak{R})$, relativamente al sottospazio $(K, \mathfrak{R}_K)$, porremo, per ogni intero $m \ (\leq \rho)$:

(3) $$\mathcal{T}_m = \{i \in \mathcal{T} : |r_i \cap K| = m\} \ ,$$
$$\mathfrak{R}_{K,m} = \{r_i \cap K\}_{i \in \mathcal{T}_m} \ .$$

$\mathfrak{R}_{K,m}$ e' una sottofamiglia (eventualmente vuota) di $\mathfrak{R}_K$ e si ha :

(4) $$\mathfrak{R}_K = \bigcup_{m=o}^{\rho} \mathfrak{R}_{K,m} \ .$$

Porremo :

(5) $$t_m = |\mathcal{T}_m| \ ,$$

gli interi $t_0, t_1, \ldots, t_\rho$ prendono il nome di *caratteri* del k-insieme K. Chiameremo *specie* di K il piu' piccolo intero tale che sia $t_s \neq 0$ e *grado* di K il piu' grande intero g tale che sia $t_g \neq 0$. Siano $m_0, m_1, \ldots, m_l \ (l \geq 0)$ interi per quali si abbia:

(6) $$0 \leq m_0 < m_1 < \ldots < m_l \leq \rho \ ;$$

diremo che K e' di *classe* $[m_0, m_1, \ldots, m_l]$ se e' $t_n = 0$ per ogni n diverso da $m_0, m_1, \ldots, m_l$. Se K e' di classe $[m_0, m_1, \ldots, m_l]$ ed inoltre e' $t_m \neq 0$ per ogni $m = m_0, m_1, \ldots, m_l$ diremo che K è di *tipo* $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$; allora m_0 e' la specie ed m_l e'il grado di K (se e' $l \geq 1$, se e' $l = 0$ allora $g = s = m_0$).

Fissato uno spazio geometrico $(S, \mathfrak{R})$, si pone il problema di caratterizzare i suoi k-insiemi di data classe o di dato tipo. Tale problema ha particolare interesse nel caso che S sia uno spazio di Galois $S_{r,q}$ ed $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_d$ sia la famiglia propria degli spazi subordina ti S_d di data dimensione d $(0 \leq d \leq r-1)$ di $S_{r,q}$. Faremo percio' ora qualche considerazione preliminare in tale caso.

Relativamente allo spazio geometrico $(S_{r,q}, \mathfrak{R}_d)$, posto :

(7) $$\theta_n = \theta_{n,q} = \sum_{i=0}^{n} q^i ,$$

risulta $\rho_d = \theta_d$. Denoteremo con $\mathcal{G}_{r,d,q}$ la grasmanniana degli S_d di $S_{r,q}$. Posto $\gamma_{r,d} = |\mathcal{G}_{r,d,q}|$, si ha (cfr. [17] n. 167):

(8) $$\gamma_{r,d} = |\mathcal{G}_{r,d,q}| = \prod_{i=0}^{d} \frac{\theta_{r-i}}{\theta_{d-i}} , \quad \textit{per} \quad d \geq 0 ; \qquad \gamma_{r,-1} = 1$$

Dato un k-insieme K di $(S_{r,q}, \mathfrak{R}_d)$, denoteremo con $t_0^d, t_1^d, \ldots$ $\ldots, t_{\theta_d}^d$ i caratteri di K (cioe' il numero degli S_d di $S_{r,q}$ che incontrano K in zero, uno, $\ldots, \theta_d$ punti), con s_d (≥ 0) e $g_d (\leq \theta_d)$ la specie ed il grado di K (cioe' il minimo ed il massimo numero di punti che un S_d ha in comune con K). Si prova facilmente che, per $d \geq 1$, si ha :

(9) $k \geq g_d$; $[k = g_d \Leftrightarrow K \subseteq S_d]$;

(10) $g_d \geq g_{d-1}$; $[g_d = g_{d-1} \Leftrightarrow k = g_d = g_{d-1} \Leftrightarrow K \subseteq S_{d-1}]$;

(11) $s_d \geq s_{d-1}$; $[s_d = s_{d-1} \Leftrightarrow s_d = s_{d-1} = 0 \Leftrightarrow s_h = 0$ *per ogni* $h \leq d]$;

(12) $K \neq S_{r,q} \Leftrightarrow s_{d+1} \geq s_1 \theta_d$.

Fissato un $S_{d-1} (d \geq 1)$ che incontri K in g_{d-1} punti, gli S_d per l'S_{d-1}, che sono in numero di θ_{r-d}, incontrano ciascuno K in al piu' $g_d - g_{d-1}$ punti fuori di S_{d-1}, onde e' $k \leq (g_d - g_{d-1})\theta_{r-d} +$ $+ g_{d-1}$. Analogamente fissato un S_{d-1} che incontri K in s_{d-1} punti, ogni S_d per l'S_{d-1} incontra K in almeno $s_d - s_{d-1}$ punti fuori di S_{d-1}, onde e' $k \geq (s_d - s_{d-1})\theta_{r-d} + s_{d-1}$. Si e' cosi' provato che :

$$(13) \qquad (s_d - s_{d-1})\theta_{r-d} + s_{d-1} \leq k \leq (g_d - g_{d-1})\theta_{r-d} + g_{d-1}, \quad (1 \leq d \leq r-1)$$

Se per K si ha $g_d = s_d$ (cioe' se K ammette un solo carattere diverso da zero nella dimensione d), dalla (13) si ricava (essendo $\theta_{r-d} - 1 > 0$) $g_{d-1} \leq s_{d-1}$; essendo evidentemente $g_{d-1} \geq s_{d-1}$, si ha $g_{d-1} = s_{d-1}$. Procedendo allora induttivamente si ottiene $g_h = s_h$ per h = d, d-1, ..., 2, 1, 0. In particolare risulta $g_0 = s_0$ e cio' equivale ad asserire che e' $K = \phi$ oppure $K = S_{r,q}$. Si e' cosi' provato che :

I. - *Un* k-*insieme* K *di* $S_{r,q}$, *con* $K \neq \phi$, $K \neq S_{r,q}$, *ha sempre almeno due caratteri, nella dimensione* d, *diversi da zero, onde :*

$$(14) \qquad g_d > s_d, \qquad (0 \leq d \leq r-1).$$

Supponiamo che K sia costituito da punti ad h ad h indipendenti. Sia N il numero delle coppie ciascuna costituita da un S_d di $S_{r,q}$ ($d \geq h-1$) ed una l-pla di punti di $K \cap S_d$, con $l = 1, 2, \ldots, h$. Fissata una l-pla $\bar{L}$ di punti di K, essa (essendo costituita da punti indipendenti) e' congiunta da un S_{l-1}; gli S_d per tale S_{l-1} sono in numero di $|\mathcal{G}_{r-l,d-l,q}|$ e con $\bar{L}$ determinano altrettante coppie $(S_d, \bar{L})$ tutte distinte, onde e' :

$$(15) \qquad N = \binom{k}{l} |\mathcal{G}_{r-l,d-l,q}| = \binom{k}{l} \gamma_{r-l,d-l}$$

D'altra parte, fissato un $\bar{S}_d$ con $m = |K \cap \bar{S}_d| \geq l$, le coppie $(\bar{S}_d, L)$, ove L e' una qualsiasi l-pla di punti di $K \cap \bar{S}_d$ sono in numero di $\binom{m}{l}$; ne segue (essendo t_m^d il numero degli S_d che in-

incontrano K in m punti) che e':

$$N = \sum_{m=l}^{g_d} \binom{m}{l} t_m^d . \tag{16}$$

Tenuto conto che e' $\sum_{m=0}^{g_d} t_m^d = |\mathcal{G}_{r,d,q}| = \gamma_{r,d}$ e delle (15), (16), (8) si ha allora che :

II.- *Per un* k-*insieme* K *di* $S_{r,q}$ *costituito da punti ad* h *ad* h *indipendenti risulta :*

$$\sum_{m=l}^{g_d} \binom{m}{l} t_m^d = \binom{k}{l} \gamma_{r-l,\,d-l} , \quad l = 0,1,2,\ldots,h , \quad (d \geq h-1) . \tag{17}$$

Ne segue che qualsiasi sia il k-*insieme* K *di* $S_{r,q}$ *si ha :*

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{g_d} t_m^d = \gamma_{r,d} \\ \sum_{m=1}^{g_d} m\, t_m^d = k\, \gamma_{r-1,\,d-1} \\ \sum_{m=2}^{g_d} m(m-1)\, t_m^d = k(k-1)\, \gamma_{r-2,\,d-2} \end{cases} \tag{18}$$

Le (18) per d = 1 danno di nuovo le (1),(2),(3) di [37].

2.- Caratterizzazione grafica l-dimensionale di varieta' algebriche in $S_{r,q}$.

Una varieta' algebrica (non vuota) K di $S_{r,q}$ e' un k-insieme di

$(S_{r,q},\mathfrak{R}_d)$ di un dato tipo $(m_0, m_1, \dots, m_l)_d$. La caratterizzazione grafica delle varieta' algebriche immerse in $S_{r,q}$, relativamente alla dimensione d, puo' allora formularsi nel modo seguente: dato un k-insieme di $(S_{r,q},\mathfrak{R}_d)$ di tipo $(m_0, m_1, \dots, m_l)_d$ esso coincide (a meno di omografie) con la varieta'algebrica K ? Se la risposta e'affermativa diremo che la varieta' K ammette *una caratterizzazione grafica d-dimensionale*.

Piu' in generale sia $\{K_i\}_{i\in\mathcal{T}}$, una famiglia di varieta' algebriche proiettivamente distinte di $S_{r,q}$ tutte di data classe $[m_0, m_1, \dots, m_l]_d$, posto $k_0 = \min_{i\in\mathcal{T}} |K_i|$, diremo che la famiglia $\{K_i\}_{i\in\mathcal{T}}$ ammette una *caratterizzazione grafica d-dimensionale di classe* $[m_0, m_1, \dots, m_l]_d$ se si puo' provare che ogni k-insieme K con $k \geq k_0$, di $S_{r,q}$ di classe $[m_0, m_1, \dots, m_l]_d$ e' proiettivamente equivalente ad una varieta' della famiglia $\{K_i\}_{i\in\mathcal{T}}$, (per esempio la famiglia degli spazi subordinati di $S_{r,q}$ ammette una caratterizzazione grafica di classe $[0, 1, q+1]_1$, in quanto subito si prova che ogni k-insieme di $S_{r,q}$ di classe $[0, 1, q+1]_1$ e' uno spazio subordinato di $S_{r,q}$). Si pongono in tal modo problemi per le suddette caratterizzazioni per ogni dimensione d, con $1 \leq d \leq r-1$. Altri tipi di caratterizzazioni grafiche di varieta'algebriche si possono formulare e saranno viste nel seguito.

I primi risultati fondamentali, che hanno dato l'avvio a tali ricerche, sono stati ottenuti da **B. Segre**, cfr. [11], [12], [14], [16], [17], [19]. Tra i molteplici e profondi risultati che si trovano in detti Lavori evidenziamo i seguenti :

III. - *Ogni* k-*insieme di* $S_{2,q}$, *con* q *dispari, di grado* $g_1=2$ *e' una conica, se e'* $k \geq q+1$, *oppure e' contenuta in una conica se* $k > q - \frac{\sqrt{q}}{4} + \frac{7}{4}$.

IV. - *Ogni* k-*insieme di* $S_{3,q}$, *con* q *dispari, di grado* $g_2=3$ *e' una cubica sghemba se' e'* $k \geq q+1$ *oppure e' contenuto in una cubica sghemba se e'* $k > q - \frac{\sqrt{q}}{4} + \frac{11}{4}$.

Come conseguenza della proposizione III si ha (crr. [1], [9]) :

V.- *Ogni* k-*insieme di* $S_{3,q}$, *con* q *dispari, di grado* $g_1 = 2$ *e con* $k \geq q^2 + 1$ *e' una quadrica ellittica.*

In questo numero ci occuperemo del posto problema relativamente alla dimensione $d = 1$, esponendo i risultati che sono stati ottenuti al riguardo.

Allo scopo di caratterizzare le quadriche e le forme hermitiane di $S_{r,q}$, prendiamo in considerazione i k-insiemi propri di $S_{r,q}$ di classe $[0,1,\ n,\ q+1]_1$, con $2 \leq n \leq q$. Un punto di un tale k-insieme K sara' detto *singolare* se per esso non passano rette n-secanti. K dicesi *singolare* se ammette punti singolari, *non singolare* in caso contrario.

Ragionando come nelle prop. I, II di [36] n.2 si ha che :

VI.- *L'insieme dei punti singolari di un* k-*insieme* K ($\neq S_{r,q}$) *di classe* $[0,1,\ n,\ q+1]_1$ *singolare e' uno spazio subordinato* S_t $(0 \leq t \leq r-1)$ *di* $S_{r,q}$, *detto spazio singolare di* K. *Inoltre* K *risulta un iperpiano (se* $t = r-1$) *o un cono con vertice l'*S_t $(0 \leq t \leq r-2)$ *e proiettante da* S_t *un* k'-*insieme di classe* $[0,1,n,q+1]_1$ *non singolare di un* S_{r-t-1} *sghembo con l'*S_t.

Una quadrica di $S_{r,q}$ e' un k-insieme di classe $[0,1,2,\ q+1]_1$. Ricordiamo che (cfr.per esempio [14], [20]) due quadriche di $S_{r,q}$, i cui spazi singolari abbiano la stessa dimensione t (con $-1 \leq t \leq r-1$, per $t = -1$ avendosi le quadriche non singolari), sono proiettivamente equivalenti se, e solamente se, hanno lo stesso numero di punti, inoltre denotato con Q_t una tale quadrica risulta :

$$|Q_t| = \begin{cases} = \theta_{r-1} + q^{\frac{r+t}{2}}, & r+t \text{ pari}, \\ = \theta_{r-1}, & r+t \text{ dispari}, \\ = \theta_{r-1} - q^{\frac{r+t}{2}}, & r+t \text{ pari}, \end{cases}$$

nei tre rispettivi casi Q_t sara' detta di tipo *iperbolico, parabolico, ellittico* (perche' per $r = 3$ tale definizione da' quella classica, se Q_t e' irriducibile). Ricordiamo anche che l'insieme dei punti di $S_{r,q}$ per ciascuno dei quali non passano rette 2-secanti di Q_t (con $t \leq r-3$) e' uno spazio subordinato di $S_{r,q}$, che chiamasi *spazio nucleo* di Q_t. Esso coincide con lo spazio singolare S_t di Q_t se e' q dispari, oppure q pari ed $r+t$ pari, mentre se e' q pari ed $r+t$ dispari risulta un S_{t+1} che interseca Q_t in S_t.

Cio' premesso in [21] viene provato che (per il caso $r=3$, cfr. anche [1], [9]):

VII.- *Sia* K *un* k-*insieme proprio di* $S_{r,q}$ $(r \geq 3,\ q > 2)$ *di classe* $[0,1,2,\ q+1]_1$ *con* $k \geq \theta_{r-1}$. *Se* q *e' dispari* K *e' necessariamente una quadrica iperbolica o parabolica, ovvero e' costituito da un iperpiano e un sottospazio di* $S_{r,q}$. *Se* q *e' pari, oltre ai casi precedenti,* K *si puo' comporre di una quadrica parabolica ed un sottospazio del suo spazio nucleo, ovvero di un cono proiettante da un* S_{r-3} *un* $(q+1)$-*arco piano e di un sottospazio dell'*S_{r-2} *congiungente il nucleo del* $(q+1)$-*arco con l'*S_{r-3}.

Per quanto riguarda la caratterizzazione delle quadriche ellittiche in [22] e' provato che:

VIII. *In un* $S_{r,q}$ $(r \geq 4,\ q > 3)$ *un* k-*insieme* K *di classe* $[0,1,2,\ q+1]_1$ *con* $k = \theta_{r-1} - q^{\delta+1}$, *ove* δ *e' la dimensione massima degli spazi contenuti in* K, *e' una quadrica ellittica oppure un cono proiettante da un* S_{r-4} *una* (q^2+1)-*calotta di un* S_3 *(quest'ultimo caso potendo non essere una quadrica solo per* q *pari).*

Passando a trattare la caratterizzazione delle forme hermitiane, prendiamo in considerazione i k-insiemi propri di $S_{r,q}$ di classe $[1,n,\ q+1]_1$, con $2 \leq n \leq q$. Per un tale k-insieme K deve aversi $k \geq \theta_{r-1}$ (in quanto ciascuna delle θ_{r-1} rette per un punto esterno a K ha in comune con K almeno un punto), dalla prop. VII segue allora che: *se e'* $n=2$, K *si compone di un iperpiano ed un sottospazio di* $S_{r,q}$ Inoltre per $n=q$ e' stato provato in [36] prop. VI n. 4 che:

IX.- *In* $S_{r,q}$ *ogni* k-*insieme di classe* $[1,q,\ q+1]_1$ *e' costituito dai punti esterni ad un* S_h $(0 \leq h \leq r)$ *e da quelli di un* S_{h-1}

contenuti nell'S_h .

Possiamo dunque supporre $3 \leq n \leq q-1$. Relativamente a siffatti k-insiemi e' stato ottenuto, per $q > 4$, il seguente risultato in [36].

X.- *In un* $S_{r,q}$ ($r \geq 3$, $q > 4$) *un k-insieme proprio* K *di classe* $[1, n, q+1]_1$, *con* $3 \leq n \leq q-1$, *e' una forma hermitiana non singolare o singolare (e quindi* q *e' un quadrato ed* $n = \sqrt{q}+1$), *oppure e' un cono con vertice un* S_{r-3} *proiettante uno dei seguenti insiemi di un piano* $S_{2,q}$ *(sghembo con l'*S_{r-3}*):*

(α) *uno o* n *rette formanti fascio,*
(β) *un subpiano* $S_{2,\sqrt{q}}$ *di* $S_{2,q}$ *o un arco hermitiano di* $S_{2,q}$,
(γ) *una retta ed un insieme di tipo* $(0, n-1)_1$ *di* $S_{2,q}$,
(δ) *il complementare di un insieme di tipo* $(0, q-n+1)_1$ *di* $S_{2,q}$.

Il caso escluso $q = 4$ trovasi trattato in [10], e sotto condizioni piu' restrittive in [2]. In [10] viene provato che :

XI.- *In un* $S_{r,4}$ ($r \geq 3$) *un k-insieme di classe* $[1,\ n=3,\ q+1=5]_1$ *non singolare, con* $k > (10 \cdot 4^{r-2} - 3)$, *risulta necessariamente una forma hermitiana non singolare.*

La caratterizzazione delle forme hermitiane singolari per $q = 4$ si desume dalle proposizioni VI ed XI precedenti e dalla prop. III di [33], si ha precisamente che :

XII.- *Sia* K *un k-insieme di* $S_{r,4}$ ($r \geq 4$) *di classe* $[1, n=3, q+1 = 5]_1$ *singolare e sia* S_t *il suo spazio singolare* ($0 \leq t \leq r-1$) . *Se e'* $t \leq r-4$ *e* $k > 10 \cdot 4^{r-2} - (2 \cdot 4^{t+2}+1)/3$, K *risulta necessariamente una forma hermitiana singolare con vertice l'*S_t . *Se e'* $t = r-3$, K *e' un cono hermitiano oppure un cono proiettante dall'*S_{r-3} *singolare uno dei seguenti insiemi di un* S_2 *(sghembo con l'*S_{r-3}*): un subpiano* $S_{2,2}$ *di* S_2, *una retta e un* 6_r*-arco, il complementare di un* 6*-arco. Se e'* $t \geq r-2$, K *e' costituito da un iperpiano o tre iperpiani formanti fascio.*

Uno studio sistematico degli insiemi di $S_{r,q}$ di classe $[0, 1, n, q+1]_1$ e' tutt'ora aperto.

Volendo caratterizzare graficamente le superfici cubiche di un $S_{3,q}$ mediante il comportamento delle rette, fissiamo l'attenzione sui k-insiemi di $S_{3,q}$ di classe $[0,1,2,3, q+1]_1$. Converra' inoltre supporre - se si vogliono escludere casi banali - che tali insiemi non contengono come parte piani, quadriche, ne' si riducono a coni (ossia non consistino di rette per uno stesso punto). In un siffatto insieme chiameremo *punto doppio* ogni suo punto tale che per esso non passino rette 3-secanti; supporremo infine che l'insieme gode della ulteriore proprieta' di contenere ogni retta congiungente due suoi punti doppi. Un k-insieme di $S_{3,q}$ godente delle proprieta' suddette sara' denotato con $\mathcal{F}_3(k)$. In [24] viene provato che :

XIII. *In un* $S_{3,q}$ $(q > 3$, q *dispari) ogni* $\mathcal{F}_3(k)$ *con* $k \geq q^2 + 2q+1$, *contenente tre punti doppi allineati, risulta una rigata cubica a direttrici rettilinee distinte (e quindi e'* $k = q^2 + q + 1$). *Ogni* $\mathcal{F}_3(k)$ *con* $k \geq q^2 + 3q + 1$, *contenente quattro punti doppi indipendenti, risulta una superficie cubica con quattro punti doppi (e quindi e'* $k = q^2 + 3q + 1$). *Ogni* $\mathcal{F}_3(k)$ *con* $k \geq q^2 + 4q + 1$, *contenente tre punti doppi indipendenti, risulta una superficie cubica con tre punti doppi (e quindi e'* $k = q^2 + 4q + 1$).

3.- I k-insiemi di tipo $(m,n)_d$ in $S_{r,q}$.

In forza della prop. I nello studio dei k-insiemi di $(S_{r,q}, \mathfrak{R}_d)$ i primi che si presentano in ordine di difficolta' sono quelli che hanno due caratteri diversi da zero, cioe i k-insiemi K di tipo $(m,n)_d$, con $0 \leq m < n \leq \theta_d$. Di cio' appunto ci occuperemo in questo numero, supponendo sempre $K \neq \phi$ e $K \neq S_{r,q}$ (cioe' $0 < k < \theta_r$) ed inoltre, salvo esplicito avviso contrario, $d \geq 2$ (in quanto per $d = 1$ essi si trovano trattati in [35], [37]). Si osservi che ne esistono di siffatti k-insiemi, (per esempio per $d = r-1$ una qualsiasi forma hermitiana non singolare di $S_{r,q}$).

Studiamo dapprima gli insiemi di tipo $(0,n)_d$. Sia K un tale k-insieme. Fissato un qualsiasi S_{d-1}, con $S_{d-1} \cap K \neq \phi$, ciascuno dei θ_{r-d} spazi S_d per S_{d-1} risulta n-secante K, onde, posto, $n_{d-1} = |S_{d-1} \cap K|$, si ha $\theta_{r-d}(n-n_{d-1}) + n_{d-1} = k$, da cui $n_{d-1} = n - (k-n)/(\theta_{r-d}-1)$. Tale intero n_{d-1} rimane fisso al variare dell'S_{d-1} ad intersezione non vuota con K. Ne segue che K e' di tipo $(0,n_{d-1})_{d-1}$. Procedendo per induzione decrescente rispetto a d si ha che K e' di tipo $(0,n_1)_1$ rispetto alle rette, ove a priori e' $1 \leq n_1 \leq q+1$. Evidentemente non puo' aversi $n_1 = q+1$ e, se e' $n_1 = 1$, K riducendosi ad un punto. Se poi e' $n_1 = q$, $S_{r,q} - K$ e' di tipo $(1, q+1)_1$ cioe' e' un iperpiano S_{r-1} di $S_{r,q}$ e quindi $k = S_{r,q} - S_{r-1}$. Infine, se e' $2 \leq n_1 \leq q-1$, in [36] prop. VIII si prova che non esiste nessun k-insieme di tipo $(0,n_1)_1$. Concludendo si ha:

XIV.- *In un* $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ *un* k-*insieme di tipo* $(0,n)_d$, *con* $1 \leq d \leq r-1$, *risulta necessariamente costituito da un punto (ed allora e'* $n=1$, $k=1$) *o dal complementare di un iperpiano (ed allora e'* $n = q^d$, $k = q^r$).

Se K e' un k-insieme di $S_{r,q}$ di tipo $(m, \theta_d)_d$, l'insieme $S_{r,q} - K$ e' di tipo $(0, \theta_d - m)$. Dalla prop. XIV segue allora che:

XV.- *In un* $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ *un* k-*insieme di tipo* $(m, \theta_d)_d$, *con* $1 \leq d \leq r-1$, *risulta necessariamente costituito dal complementare di un punto (ed allora e'* $m = \theta_d - 1$, $k = \theta_r - 1$) *o da un iperpiano (ed allora e'* $m = \theta_{d-1}$, $k = \theta_{r-1}$).

In forza delle prop. XIV e XV nello studio degli insiemi di tipo $(m,n)_d$ di $S_{r,q}$ possiamo supporre:

(20) $$0 < m < n < \theta_d .$$

Per un k-insieme K di tipo $(m,n)_d$ di $S_{r,q}$ il sistema (18) di venta :

$$(21)\qquad \begin{cases} t_m^d + t_n^d = \gamma_{r,d}, \\ m\, t_m^d + n\, t_n^d = k\, \gamma_{r-1,d-1}, \\ m(m-1)\, t_m^d + n(n-1)\, t_n^d = k(k-1)\, \gamma_{r-2,d-2} . \end{cases}$$

Eliminando t_m^d e t_n^d dalle (21), tenuto conto che, in forza della (8), risulta $\gamma_{r-1,d-1}/\gamma_{r-2,d-2} = \theta_{r-1}/\theta_{d-1}$ e $\gamma_{r,d}/\gamma_{r-2,d-2} = \theta_r\theta_{r-1}/\theta_d\theta_{d-1}$, si ha che k deve soddisfare l'equazione:

$$(22)\qquad x^2 - x[1 + (m+n-1)\theta_{r-1}/\theta_{d-1}] + m\,n\,\theta_r\theta_{r-1}/\theta_d\theta_{d-1} = 0 ,$$

onde :

XVI.- *Se in* $S_{r,q}$ *esiste un* k-*insieme di tipo* $(m,n)_d$ *l'intero* k *deve soddisfare l'equazione* (22) *e quindi tale equazione deve ammettere una radice intera, onde il suo discriminante*

$$(23)\qquad \Delta = [1 + (m+n-1)\theta_{r-1}/\theta_{d-1}]^2 - 4\,m\,n\,\theta_r\theta_{r-1}/\theta_d\theta_{d-1}$$

deve essere un quadrato.

Supposto $d \le r-2$, si consideri un S_h di $S_{r,q}$, con $h \ge d+1$. Esso interseca il k-insieme K di tipo $(m,n)_d$ in un k'-insieme K' di S_h ancora di tipo $(m,n)_d$ (per la prop.I ed in virtu' della (20)); quindi per la prop.XVI, k' deve soddisfare l'equazione :

$$(24)\qquad x^2 - x\,[1 + (m+n-1)\theta_{h-1}/\theta_{d-1}] + m\,n\,\theta_h\theta_{h-1}/\theta_d\theta_{d-1} = 0 .$$

Ne segue (per la prop.I) che K e' di tipo $(k_1, k_2)_h$, nella dimensione h, ove k_1, k_2 sono le due radici della (24). Se ne deduce che :

XVII. - *Se in* $S_{r,q}$ *esiste un* k-*insieme* K *di tipo* $(m,n)_d$, *con* $d \leq r-2$, *per ogni fissato* $h = d+1,\dots,r-1$ *l'equazione* (24) *deve ammettere due radici intere distinte* k_1, k_2 (*con* $k_1 < k_2$), K *risultando allora di tipo* $(k_1, k_2)_h$. *Quindi il coefficiente di* x *ed il termine noto della* (24) *debbono essere interi, cioe'* :

$$(25) \qquad \begin{cases} (m+n-1)\ \theta_{h-1} \equiv 0 & \mathrm{mod}\ \theta_{d-1} \\ m\ n\ \theta_h \theta_{h-1} \equiv 0 & \mathrm{mod}\ \theta_d\, \theta_{d-1} \end{cases}$$

Per $h = d+1$ dalla $(25)_{\mathrm{I}}$ si ha (essendo θ_d e θ_{d-1} primi tra loro):

$$(26) \qquad m + n \equiv 1 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{d-1}\,,$$

e quindi l'equazione (22) deve ammettere due radici intere (per la prop.XVI e risultando, per la (26), intero il coefficiente della x nella (22)). Quindi, in forza anche delle $(25)_{\mathrm{II}}$, deve aversi :

$$(27) \qquad m\ n\ \theta_h \theta_{h-1} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_d \theta_{d-1}\,, \quad \textit{per} \quad h = d+1,\dots,r\,.$$

Dalla $(25)_{\mathrm{II}}$ per $h = d+1$ si ha : $m\ n\ \theta_{d+1} \equiv 0$ mod θ_{d-1}, quindi (essendo $\theta_{d+1} = q^d(q+1) + \theta_{d-1}$ e q^d primo con θ_{d-1}) :

$$(28) \qquad m\ n(q+1) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{d-1}\,.$$

Se d e' *pari* risulta $\theta_{d-1} = \theta_{d-1,q} = (q+1)\,\theta_{\frac{d}{2}-1,\,q^2}$, dalla (28) allora otteniamo :

$$(29) \qquad m\ n \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{\frac{d}{2}-1,\,q^2}\,, \quad (d\ \textit{pari}).$$

Se d e' *dispari* risulta θ_{d-1} primo con $(q+1)$, dalla (28) allora otteniamo :

$$(30) \qquad m\ n \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{d-1}\,, \quad (d\ \textit{dispari}).$$

Dalle (26), (29) si ha :

(31) $$m^2 - m \equiv n^2 - n \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{\frac{d}{2}-1,\,q^2}\ , \quad (d\ pari)$$

Dalle (26), (30) si ha :

(32) $$m^2 - m \equiv n^2 - n \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \theta_{d-1}\ , \quad (d\ dispari)\ .$$

Se ne deduce che :

XVIII.- *In* $S_{r,q}$ *sia* K *un* k-*insieme di tipo* $(m,n)_d$ *, con* $d \leq r-2$. *Gli interi* m, n *debbono allora soddisfare le* (26), (27) *e, se* d *e' pari, la* (29) *e quindi la* (31), *se* d *e' dispari, la* (30) *e quindi la* (32). *Ne segue che non esistono siffatti* k-*insiemi se e'* :

(33) $$m + n \leq \theta_{d-1}\ ,$$

oppure se e' :

(34) $$0 < m^2 - m < \theta_{\frac{d}{2}-1,\,q^2} \qquad per\ \ d\ pari\ ,$$

(35) $$0 < m^2 - m < \theta_{d-1} \quad ,\ per\ d\ dispari\ .$$

Osservato che, se e' $1 < m \leq q$ e d pari, $d > 2$, risulta $0<m^2 - m < \theta_{1,q^2} \leq \theta_{\frac{d}{2}-1,\,q^2}$ e che, se e' $1 < m \leq q+1$ e d dispari, risulta $0 < m^2 - m < \theta_{2,q} \leq \theta_{d-1}$, dalla prop. XVIII si ha :

XIX.- *In* $S_{r,q}$ *non esistono* k-*insiemi di tipo* $(m,n)_d$*, ove e'* $3 \leq d \leq r-2$ *ed* $m > 1$, *con* $m<q$ *se* d *e' pari, con* $m \leq q+1$ *se* d *e' dispari*.

Riguardo al caso $m = 1$, con $d \leq r-2$, proveremo ora che :

XX.- *In un* $S_{r,q}$ $(r \geq 4)$ *non esistono* k-*insiemi di tipo* $(1,\ n)_d$ *, con* $2 \leq d \leq r-2$.

Ragionando per assurdo sia K un k-insieme di tipo $(1,n)_d$, con $2 \leq d \leq r-2$. Cominciamo a supporre $d = r-2$; per la prop. XVIII debbono valere le (26), (27) per $m = 1$, $d = r-2$, $h = r$. Deve dunque aversi :

$$n = a\,\theta_{r-3}, \quad \textit{con } a \textit{ intero positivo}, \tag{36}$$

$$a\,\theta_r\theta_{r-1} \equiv 0 \mod \theta_{r-2} \tag{37}$$

Essendo $\theta_r = q^{r-1}(q+1) + \theta_{r-2}$ e risultando θ_{r-2}, $q^{r-1}\theta_{r-1}$ primi tra loro, dalla (37) si ha : $a(q+1) \equiv 0 \mod \theta_{r-2}$, cioe' :

$$a(q+1) = b\,\theta_{r-2}, \quad \textit{con } b \textit{ intero positivo}. \tag{38}$$

D'altra parte dalle (36), (20) si ha $a \leq q$ e quindi $a(q+1) \leq q^2 + q < \theta_2$. Dalla (38) si ha allora : $\theta_2 \leq \theta_{r-2} \leq b\,\theta_{r-2} = a(q+1) < \theta_2$. l'assurdo prova l'asserto per $d = r-2$. Il caso $d < r-2$ si riconduce al precedente tenuto conto che un $S_{r'}$, con $r' = d+2$, di $S_{r,q}$ interseca K in un k'-insieme di tipo $(1,n)_{r'-2}$. Si ha cosi' completamente l'asserto.

Per $m = 1$ e $d = r-1$ in [38] viene provato che :

XXI.- *In un* $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ *un* k-*insieme* K *di tipo* $(1,n)_{r-1}$ *e' necessariamente una retta oppure e'* $r = 3$ *e* K *risulta una* (q^2+1) *-calotta (e quindi, se* q *e' dispari, una quadrica ellittica, cfr. prop. V).*

4.- Risultati e problemi sui k-insiemi delle grasmanniane di $S_{r,q}$.

Sia $\mathcal{G}_{3,1,q}$ la grasmanniana delle rette di $S_{3,q}$ e siano $\mathfrak{R}_1$ ed $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2' \cup \mathfrak{R}_2''$ la famiglia delle rette e quella dei piani di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ ($\mathfrak{R}_1$ essendo immagine dei fasci di rette di $S_{3,q}$, $\mathfrak{R}_2'$ ed $\mathfrak{R}_2''$ essendo immagini rispettivamente delle stelle di rette e dei piani rigati di $S_{3,q}$). Un k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ (che supporremo sempre proprio e non vuoto) puo' essere studiato rispetto alle strutture geometriche $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ di $\mathcal{G}_{3,1,q}$. Si pongono all'uopo svariati problemi, analoghi a quelli visti precedentemente ed altri se ne possono porre generalizzando questo esempio.

Evidentemente ogni k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ ha almeno due caratteri diversi da zero rispetto ad $\mathfrak{R}_1$. Mentre ne esistono che hanno un sol carattere non nullo rispetto ad $\mathfrak{R}_2$. Per esempio l'immagine in $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di un complesso lineare di rette di $S_{3,q}$ e' un θ_3-insieme di tipo $(q+1)_2$. Così l'immagine su $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di una fibrazione di rette di $S_{3,q}$ e' un (q^2+1)-insieme di tipo $(1)_2$; viceversa un k-insieme di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di tipo $(1)_2$ e' l'immagine di una fibrazione di rette di $S_{3,q}$ (onde e' $k = q^2+1$). E' un problema aperto quello di determinare tutti i k-insiemi di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ con un sol carattere non nullo rispetto ad $\mathfrak{R}_2$.

Occupiamoci ora dei k-insiemi K di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ di classe $[0,1,n]_1$, rispetto ad $\mathfrak{R}_1$, e di classe $[0,n]_2$, rispetto ad $\mathfrak{R}_2$. Evidentemente ogni piano $\pi \in \mathfrak{R}_2$, con $\pi \cap K \neq \phi$, interseca K in n punti allineati. Sia $\pi' \in \mathfrak{R}_2'$, con $\pi' \cap K \neq \phi$, denotata con s la retta n-secante K di π', sia $\pi''(\in \mathfrak{R}_2'')$ il piano di $\mathcal{G}_{3,1,q}$ che interseca π' in s. Ciascuno dei qn piani, diversi da π'', di $\mathfrak{R}_2''$ che incontra $s \cap K$ in un punto (e che quindi incontra π' in una retta) interseca K in $n-1$ punti fuori di s, piani distinti dando luogo a punti distinti (in quanto tali piani s'incontrano su π'). Ne segue che e':

$$(39) \qquad k \geq (n-1)\,nq + n$$

Se risulta:

$$(40) \qquad k = (n-1)\,nq + n\,,$$

(cioe' se per ogni punto di $K - s$ passa un piano di $\mathfrak{R}_2''$ che incontra π' in una retta per un punto di $s \cap K$) per ogni retta t di π', esterna a K, il piano $\pi_t'' \in \mathfrak{R}_2''$ per t ha intersezione vuota con K (in quanto in caso contrario, detto P un punto di $K \cap \pi_t''$, per $P \in K - \pi'$ passerebbero due piani distinti di $\mathfrak{R}_2''$ intersecanti π' in rette e cio' e' assurdo).

Sia $\mathcal{K}$ la famiglia di rette di $S_{3,q}$ che ha come immagine K e si ponga $H = \bigcup_{r \in \mathcal{K}} r$. Proviamo che, nell'ipotesi (40), si ha :

(41) $\forall P \in H\ ,\ \forall r \in \mathcal{K} \mid P \notin r \implies \exists !\ r \in \mathcal{K} \mid P \in r',\ |r \cap r'| = 1$

Il piano α di $S_{3,q}$ congiungente P con r contiene n rette di $\mathcal{K}$ (tra cui r) formanti fascio, in quanto l'immagine delle rette di α e' un piano $\pi'' \in \mathfrak{R}_2''$, il quale incontra K in n punti allineati, essendo $\pi'' \cap K \neq \phi$. La stella di centro P, contiene una retta di $\mathcal{K}$ (perche' $P \in H$) e quindi ha come immagine su $\mathcal{G}_{3,1,q}$ un piano $\pi' \in \mathfrak{R}_2'$ che incontra K in n punti allineati. I piani π' e π'' s'incontrano nella retta t, immagine del fascio di rette di $S_{3,q}$ di centro P su α. Per quanto detto nel precedente capoverso, la t non puo' essere esterna a K. Ne segue che una delle n rette di $\mathcal{K}$ su α (formanti fascio con centro un punto di r) passa per P, cioe' per P passa una, ed una sola, retta r' di $\mathcal{K}$ incidente r. Si ha cosi' la (41).

Da quanto ora provato, dai nn.1, 4 di [8] e da [5] n. 6, segue che :

XXII.- *In* $\mathcal{G}_{3,1,q}$ *un k-insieme* K (*con* $K \neq \phi$, $K \neq \mathcal{G}_{3,1,q}$) *di classe* $[0,1,n]_1$ *rispetto ad* $\mathfrak{R}_1$ *e di classe* $[0,n]_2$ *rispetto ad* $\mathfrak{R}_2$, *con* $k \leq (n-1)nq + n$, *e' tale che* $k = (n-1)nq + n$; *inoltre* K *risulta necessariamente l'immagine di una delle seguenti famiglie di rette dell'*$S_{3,q}$: *le rette di una quadrica iperbolica (ed allora e'* $n = 2$), *le rette di un complesso lineare di rette (ed allora e'* $n = q+1$), *le rette di una forma hermitiana non singolare (ed allora* q *e' un quadrato ed e'* $n = \sqrt{q} + 1$).

Sia $\mathcal{G}_{r,2,q}$ $(r \geq 5)$ la grasmanniana dei piani di $S_{r,q}$ e sia $S^*_{r,q}$ lo spazio duale di $S_{r,q}$. Per ogni $P \in S_{r,q}$ e $P^* \in S^*_{r,q}$ denoteremo con Σ_P e $\Sigma^*_{P^*}$ le immagini su $\mathcal{G}_{r,2,q}$ rispettivamente della stella di piani di centro P e della famiglia di piani di $P^* = S_{r-1} \subseteq S_{r,q}$. Si considerino le strutture geometriche $\mathcal{P} = \{\Sigma_P\}_{P \in S_{r,q}}$ e $\mathcal{P}^* = \{\Sigma^*_{P^*}\}_{P^* \in S^*_{r,q}}$ di $\mathcal{G}_{r,2,q}$. Esporremo ora al cuni risultati sui k-insiemi di $\mathcal{G}_{r,2,q}$ studiati in relazione alle strutture geometriche $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$. Proviamo intanto che :

XXIII.- *Sia* K *un k-insieme di* $\mathcal{G}_{r,2,q}$, *con* q *dispari, non contenuto in un* $\Sigma^*_{p*} \in \mathcal{P}^*$, *di grado* $g = 2$ *rispetto a* $\mathcal{P}$ *e tale che:*

$$(42) \qquad \forall \pi_1, \pi_2 \in K \Longrightarrow \exists \Sigma_p \in \mathcal{P} \mid \pi_1, \pi_2 \in \Sigma_p .$$

Se $k \geq q^2 + q + 1$, *allora e'* $r = 5$, $k = q^2 + q + 1$ *e* K *coincide con l'immagine su* $\mathcal{G}_{5,2,q}$ *dell'insieme dei piani tangenti ad una superficie di Veronese di* $S_{5,q}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle ipotesi fatte segue che K e' l'immagine di una famiglia di k piani di $S_{r,q}$($r \geq 5$, q dispari) congiunti da $S_{r,q}$, a due a due incidenti (per la (42)) e tali che mai piu' di due passino per uno stesso punto (essendo $g = 2$), con $k \geq q^2 + q + 1$. Da quanto e' provato in [23] segue allora l'asserto.

Dualizzando la XXIII per $r = 5$ si ottiene :

XXIV. *Sia* K *un k-insieme di* $\mathcal{G}_{5,2,q}$, *con* q *dispari, non contenuto in un* $\Sigma_p \in \mathcal{P}$, *di grado* $g^* = 2$ *rispetto a* $\mathcal{P}^*$, *tale che :*

$$(43) \qquad \forall \pi_1, \pi_2 \in K \Longrightarrow \exists \Sigma^*_{p*} \in \mathcal{P}^* \mid \pi_1, \pi_2 \in \Sigma^*_{p*}$$

Se $k \geq q^2 + q + 1$, *allora e'* $k = q^2 + q + 1$ *e* K *coincide con la immagine su* $\mathcal{G}_{5,2,q}$ *dell'insieme dei piani secanti in coniche una superficie di Veronese di* $S_{5,q}$.

Proviamo ora che :

XXV.- *Sia* K *un k-insieme di* $\mathcal{G}_{5,2,q}$, *con* q *dispari, di grado* $g = 2$ *rispetto a* $\mathcal{P}$ *e di classe* $[0, q+1]^*$ *rispetto a* $\mathcal{P}^*$. *Se è* $1 \leq k \leq q^2 + q + 1$, K *coincide con l'immagine su* $\mathcal{G}_{5,2,q}$ *dell'insieme dei piani tangenti ad una superficie di Veronese di* $S_{5,q}$ *(e quindi e'* $k = q^2 + q + 1$).

DIMOSTRAZIONE. Denotato con $\mathcal{K}$ l'insieme dei piani di $S_{5,q}$

che hanno come immagine K su $\mathcal{G}_{5,2,q}$ dalle ipotesi fatte si ha che: ogni S_4 di $S_{5,q}$ che contiene un piano di $\mathcal{K}$ contiene esattamente $q+1$ piani di $\mathcal{K}$; inoltre per ogni $P \in S_{5,q}$ passano al piu' due piani di $\mathcal{K}$. Fissato comunque un piano $\pi \in \mathcal{K}$, esiste certamente un S_3 per π che non contiene nessun piano di $\mathcal{K} - \{\pi\}$ (altrimenti esisterebbe un punto P di π per cui passerebbero tre piani distinti di $\mathcal{K}$). I $q+1$ iperpiani di $S_{5,q}$ per S_3 contengono ciascuno q piani di $\mathcal{K}$, distinti da π, onde e' $k \geq q^2+q+1$ e quindi (supponendosi $k \leq q^2+q+1$) si ha $k = q^2+q+1$; inoltre si ha che ogni piano di $\mathcal{K} - \{\pi\}$ appartiene ad un S_4 per S_3 e quindi e' incidente π; dall'arbitrarieta' di π in $\mathcal{K}$ segue la (42) per K. Essendo poi $k = q^2+q+1$, si ha che $\mathcal{K}$ non puo' essere tutto contenuto in un S_4 (in quanto un S_4 contiene al piu' $q+1$ piani di $\mathcal{K}$). Se ne deduce che K verifica le ipotesi della prop. XXIII per $r = 5$, onde l'asserto.

Dualizzando la prop. XXV otteniamo:

XXVI.- *Sia* K *un* k*-insieme di* $\mathcal{G}_{5,2,q}$ *con* q *dispari, di grado* $g^* = 2$ *rispetto a* $\mathcal{P}^*$ *e di classe* $[0, q+1]$ *rispetto a* $\mathcal{P}$. *Se e'* $1 \leq k \leq q^2+q+1$, K *coincide con l'immagine su* $\mathcal{G}_{5,2,q}$ *dell'insieme dei piani secanti in coniche una superficie di Veronese di* $S_{5,q}$ *(e quindi e'* $k = q^2+q+1$*)*.

5.- Problemi e risultati sui quadragoni di Tits.

Chiamasi quadragono di Tits (cfr. [39], [3] pp. 300-305) uno spazio geometrico $(S, \mathcal{R})$ (con $\mathcal{R}$ famiglia propria) soddisfacente alle seguenti condizioni:

(44) $$\forall r, s \in \mathcal{R},\ r \neq s \Longrightarrow |r \cap s| \leq 1.$$

(45) $$\forall P \in S,\ \forall r \in \mathcal{R},\ P \notin r \Longrightarrow \exists!\ r' \in \mathcal{R} \mid P \in r',\ |r \cap r'| = 1.$$

Il nome di quadragono deriva dal fatto che il piu' semplice esempio di un siffatto spazio geometrico si ottiene facendo coincidere S con l'insieme dei vertici di un quadrato $\mathcal{Q} = \{A, B, C, D\}$ ed $\mathcal{R}$ con le quattro coppie di vertici sui lati di $\mathcal{Q}$. Se $(S, \mathcal{R})$ e' un qualsivoglia quadragono di Tits, due punti P_1, P_2 di S si diranno *congiun* *gibili* (e si scrivera' $P_1 \sim P_2$) se esiste un elemento di $\mathcal{R}$ che li contiene entrambi, *incongiungibili* in caso contrario (e si scrivera' $P_1 \not\sim P_2$); gli elementi di $\mathcal{R}$ si chiameranno *rette*.

Un quadragono di Tits dicesi *non degenere*, ed allora prende anche il nome di *sistema rigato*, se soddisfa alle seguenti condizioni:

(46) $$\forall P_1, P_2 \in S | P_1 \sim P_2 \Longrightarrow \exists P \in S | P \not\sim P_1 , P \not\sim P_2 .$$

(47) *Esiste un punto di* S *per cui passano tre rette distinte*.

I quadragoni di Tits *degeneri* (cioe' non soddisfacenti alla (46) o alla (47)) si lasciano classificare. Precisamente si prova che essi coincidono necessariamente (a meno di isomorfismi) con uno dei seguenti casi (cfr. [7]).

Caso I: Sia S un insieme non vuoto e $\{P_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ una fissata famiglia propria di punti di S. Denotato con $\mathcal{R}$ la famiglia di parti di S i cui elementi siano S ed i sottoinsiemi $X_i = \{P_i\}$, per ogni $i \in \mathcal{I}$ si ha che $(S, \mathcal{R})$ e' un quadragono di Tits, degenere perche' non soddisfa ne' alla (46) ne' alla (47).

Caso II: Sia S un insieme ed A un fissato elemento di S. Denotiamo con $\mathcal{R}' = \{X_i'\}_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia propria di parti di S che sia una partizione in classi disgiunte di $S - \{A\}$. Posto $\mathcal{R} = \{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $X_i = X_i' \cup \{A\}$, per ogni $i \in \mathcal{I}$, si ha che $(S, \mathcal{R})$ e' un quadragono di Tits, degenere perche' non soddisfa la (46).

Caso III: Siano $S = S_1 \times S_2$, con S_1 ed S_2 insiemi non vuoti, ed $\mathcal{R}$ la famiglia di parti di S ciascuna delle quali e' l'insieme di tutte le coppie che hanno uguale una stessa coordinata. Si ha che $(S, \mathcal{R})$ e' un quadragono di Tits, degenere perche' non soddisfa la (47).

Caso IV: Siano S_1, S_2 due insiemi disgiunti ciascuno dei quali abbia almeno due elementi ed uno almeno tre elementi. Posto $S = S_1 \cup S_2$, siano $P \in S_1$ e $Q \in S_2$. Denotato con $\mathcal{R}$ la famiglia di parti di S costituita dalla coppia $\{P, Q\}$, da tutte le coppie $\{P, T\}$, con $T \in S_1 - \{P\}$, da tutte le coppie $\{Q, H\}$, con $H \in S_2 - \{Q\}$, e da tutte le coppie $\{T, H\}$ con $T \in S_1 - \{P\}$ e $H \in S_2 - \{Q\}$, si ha che $(S, \mathcal{R})$ e' un quadragono di Tits, degenere perche' non verifica la (46).

Nel seguito, per quanto precede, ci occuperemo dei quadragoni di Tits non degeneri, cioe' dei *sistemi rigati* $(S, \mathcal{R})$. Faremo inoltre l'ipotesi che S sia finito. Per un sistema rigato $(S, \mathcal{R})$ si provano i fatti seguenti (cfr. [29], [31], [32]). Si ha intanto che: *per ogni punto di* $(S, \mathcal{R})$ *passa un numero costante* $n(\geq 3)$ *di rette ed ogni retta ha un numero costante* $\rho(\geq 3)$ *di punti*. Chiameremo *blocco degenere* di polo $P(\in S)$ l'unione τ_P delle n rette per P e *fascio* di rette di centro P l'insieme F_P delle rette per P. Chiameremo *linea* l'intersezione di due blocchi degeneri di poli P_1, P_2 con $P_1 \not\sim P_2$; essa e' costituita da n punti a due a due incongiungibili. Si ha che *dati due punti incongiungibili per essi passa almeno una linea*. Possiamo allora suddividere i sistemi rigati in tre specie, che - come si dimostra - si escludono a vicende:

I specie: Dati due punti incongiungibili di $(S,\mathcal{R})$, *per essi passa una sola linea.*

II specie: Data una linea di $(S,\mathcal{R})$, *per essa passano esattamente due blocchi degeneri.*

III specie: Il sistema rigato $(S,\mathcal{R})$ *non sia ne' di primo tipo, ne' di secondo specie.*

Daremo ora degli esempi generali di sistemi rigati delle tre specie (cfr. [29] n.2, [31] n.2, [32] n.2).

Esempio 1_I: Siano $S = S_{3,q}$ uno spazio di Galois d'ordine q ed $\mathcal{R}$ un complesso lineare di rette non degenere di $S_{3,q}$. Allora $(S,\mathcal{R})$ e' un sistema rigato di I specie, con $n = q + 1 = \rho$.

Esempio 2_I: Dato un $S_{3,q}$, con q quadrato, sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle rette di una forma hermitiana non singolare H di $S_{3,q}$. Allora $(H,\mathcal{R})$ e' un sistema rigato di I specie, con $n = \sqrt{q} + 1$, $\rho = q + 1$.

Esempio 3_{II}: Dato un $S_{4,q}$, sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle rette di una quadrica $\mathcal{Q}$ non singolare di $S_{4,q}$. Allora $(\mathcal{Q}, \mathcal{R})$ e' un sistema rigato di II specie, con $n = q + 1 = \rho$.

Esempio 4_{II}: Dato un $S_{5,q}$, sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle rette di una quadrica non singolare $\mathcal{Q}$ di tipo ellittico (cioe' priva di piani) di $S_{5,q}$. Allora $(\mathcal{Q},\mathcal{R})$ e' un sistema rigato di II specie, con $n = q^2 + 1$, $\rho = q + 1$.

Esempio 5_{III}: Dato un $S_{4,q}$, con q quadrato, sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle rette di una forma hermitiana non singolare H di $S_{4,q}$. Allora $(H,\mathcal{R})$ e' un sistema rigato di III specie, con $n = q\sqrt{q} + 1$, $\rho = q + 1$.

Qualsiasi sia il sistema rigato $(S,\mathfrak{R})$, sia $\mathcal{F} = \{F_P\}_{P\in S}$ la famiglia dei fasci di rette di $(S,\mathfrak{R})$. Posto $S^* = \mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^* = \mathcal{F}$, si prova subito che: $(S^*,\mathfrak{R}^*)$ e' ancora un sistema rigato con $n^* = \rho$, $\rho^* = n$ da dirsi *duale* di $(S,\mathfrak{R})$, inoltre che il duale di $(S^*,\mathfrak{R}^*)$ (cioe' il *biduale* di $(S,\mathfrak{R})$) e' *isomorfismo* ad $(S,\mathfrak{R})$, un isomorfismo essendo dato dall'applicazione $c : P \in S \to F_P \in S^{**} = \mathcal{F}$. Per esempio il duale dell'esempio 1_I e l'esempio 3_{II} e viceversa, tenuto conto che l'immagine sulla quadrica di Klein di un complesso lineare di rette non degenere di $S_{3,q}$ e' una sezione di tale quadrica con un iperpiano non tangente e cioe' una quadrica non singolare di $S_{4,q}$.

Un problema che si pone e' quello di indagare se, o sotto quali ulteriori condizioni aritmetiche o grafiche, un sistema rigato di I, II, III specie sia isomorfo ad uno degli esempi su citati. Intanto si puo' provare che (cfr. [5] n.6) qualsiasi sia il sistema rigato $(S,\mathfrak{R})$ risulta:

$$\rho \leq (n-1)^2 + 1 \quad , \quad n \leq (\rho - 1)^2 + 1 \, . \tag{48}$$

Cominciamo ad esaminare il posto problema nel caso dei sistemi rigati di I specie. Un primo risultato al riguardo e' il seguente (cfr. [32] nn.6,7).

I.- *Per un sistema rigato* $(S,\mathfrak{R})$ *di I tipo risulta:*

$$n \leq \rho \, ; \tag{49}$$

inoltre, se e' $n = \rho$, $(S,\mathfrak{R})$ *e' isomorfismo al sistema rigato associato ad un complesso lineare di rette di un* $S_{3,q}$ (cfr. Esempio 1_I).

Nel seguito, in forza della prop. I, relativamente al sistema rigato di I specie $(S,\mathfrak{R})$ possiamo supporre (cf.(48)):

$$n < \rho \leq (n-1)^2 + 1 \, . \tag{50}$$

Diremo che tre punti di $(S,\mathfrak{R})$ sono allineati se esiste una retta o una linea che li contiene. Se $P,Q \in S$ denoteremo con (P,Q) la retta per P e Q, se e' $P \sim Q$, la linea per P e Q, se e' $P \not\sim Q$. Un sottoinsieme proprio B di S prende il nome di *blocco* se contiene tre punti non allineati e soddisfa alla seguente condizione:

$$\forall P, Q \in B | P \neq Q \implies (P,Q) \subseteq B \, . \tag{51}$$

I blocchi degeneri sono esempi di blocchi. Un blocco non degenere e' costituito da $(\rho - 1)(n - 1) + 1$ punti a due a due non congiungibili. Data una linea l di $(S,\mathcal{R})$, gli n blocchi degeneri polari degli n punti di l s'intersecano in una linea l' (tale che $l \cap l' = \emptyset$) da dirsi *coniugata* di l; inoltre la linea coniugata di l' coincide con l (cfr. [32] nn.5,8). Diremo che $(S,\mathcal{R})$ soddisfa alla condizione di *reciprocita'* se e' verificata la:

(R) *se l_1, l_2 sono linee di un blocco, le linee coniugate l_1', l_2' appartengono anche esse ad un blocco.*

Ebbene si puo' provare che (cfr. [32] prop. LXVI n.15, tenuto conto della (50)):

II.- *Un sistema rigato di prima specie, con* $\rho > n$, *verificante la condizione* R *e' isomorfo al sistema rigato associato ad una forma hermitiana non singolare di uno spazio di Galais* $S_{3,q}$ (cfr. Esempio 2_I).

I sistemi rigati di II specie sono stati considerati da **F.Mazzocca** in [6]. Riassumeremo ora brevemente i risultati ivi contenuti. Sia $(S,\mathcal{R})$ un sistema rigato di II specie verificante la seguente condizione:

(W) *Due linee distinte di* $(S,\mathcal{R})$ *hanno al piu' due punti in comune e sia* $n \geq \rho$.

Si prova intanto che, in tale ipotesi, risulta di fatto $n = \rho$ ed inoltre che, detto τ_P il blocco degenere di polo P ($\in S$), *per tre punti a due a due incongiungibili di τ_P passa una ed una sola linea*. Fissato un punto A di τ_P, con $A \neq P$, e denotato con a la retta AP, l'insieme $\alpha = \tau_P - a$, rispetto alla famiglia $\mathcal{L}$ di parti di α costituita dalle rette di $F_P - \{a\}$ (private di P) e dalle linee di τ_P per A (private di A) costituisce *un piano affine* $\alpha(P,A)$ di ordine $q = n - 1$. In tale piano affine $\alpha(P,A)$ le linee di τ_P, non passanti per A (e private del loro punto d'incontro con a), costituiscono una famiglia $\mathcal{P}$ di q-archi tangenti tutti alla retta impropria di $\alpha(P,A)$ in uno stesso punto δ. La $\mathcal{P}$ e' tale che, per tre punti non allineati di $\alpha(P,A)$ e a due a due congiunti da rette non parallele a δ, passa un solo q-arco di $\mathcal{P}$. Ne segue che se $\alpha(P,A)$ e' desarguesiano ed e' $q = n - 1$ dispari, $\mathcal{P}$ coincide con la famiglia di parabole tangenti alla retta impropria di $\alpha(P,A)$ in δ. Si prova poi che se due blocchi degeneri τ_P e $\tau'_{P'}$, appartenenti rispettivamente a due sistemi rigati di II specie $(S,\mathcal{R})$ e

$(S', \mathcal{R}')$ verificanti la condizione W, sono isomorfi rispetto alle strutture geometriche indotte in essi dalle loro rette e dalle loro linee, allora sono isomorfi anche $(S, \mathcal{R})$ ed $(S', \mathcal{R}')$. Da quanto detto si perviene infine al seguente risultato (cfr. [6] prop. III n. 4):

III.- *Sia* $(S, \mathcal{R})$ *un sistema rigato di II specie verificante la condizione* W. *Se e'* $q = n - 1$ *dispari e se esiste un punto* P *di* S *ed un punto* $A \in \tau_P - \{P\}$ *tali che il piano affine* $\alpha(P, A)$ *sia desarguesiano, allora* $(S, \mathcal{R})$ *e' isomorfo al sistema rigato associato ad un quadrica non singolare di uno spazio di Galois* $S_{4,q}$ (cfr. Esempio 3_{II}).

B I B L I O G R A F I A

[1] BARLOTTI A. - *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, Boll. U.M.I. (3)10(1955) 498-506.

[2] BARLOTTI A. - *Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro,* Le matematiche, 21 (1966) 387-395.

[3] DEMBOWSKI P. - *Finite geometries*, Ergebnisse der Math.,Springer, Berlin, 1968.

[4] DI CONCILIO A. - *Spazi geometrici polari*, Relazione n.19 Ist. Mat.Univ.Napoli,(1972) 1-21.

[5] HIGMAN D.G. - *Partial geometries, generalized quadrangles and strongly reguler graphs*, Atti Convegno geometria Combinatoria e Appl. Perugia, (1970) 263-293.

[6] MAZZOCCA F. - *Sistemi grafici rigati di seconda specie*, Relazione n.28, Ist.Mat.Univ.Napoli,(1973) 1-22.

[7] OLANDA D. - *Quadragoni di Tits e sistemi rigati*,Rend.Acc. Sci Fis. Mat.Napoli,(4)39 (1972) 81-87.

[8] OLANDA D. - *Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo*. Relazione n.26,Ist.Mat.Univ. Napoli,(1973) 1-21.

[9] PANELLA G. - *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito,* Boll. U.M.I, (3) 10 (1955) 507-513.

[10] RUSSO A. - *Calotte hermitiane di un* $S_{r,4}$, Ricerche Mat. Napoli, 20(1971) 297-307.

[11] SEGRE B. - *Ovals in a finite projective plane*, Canad. J. Math , 7 (1955) 414-416.

[12] SEGRE B. - *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, Ann.Mat. pura appl. (4)39 (1955) 357-379.

[13] SEGRE B. - *Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica 2*, Revue Math. Pures et appl. 2(1957)289-300 .

[14] SEGRE B. - *Le geometrie di Galois*, Ann.Mat.,(4)48 (1959) 1-97.

[15] SEGRE B. - *On complete caps and ovaloids in three dimensional Galois spaces of characteristic two*, Acta Arith., 5(1959) 315-332.

[16] SEGRE B. - *On Galois geometries*, Proc. International Congress Math. (1958). Cambridge 1960.

[17] SEGRE B. - *Lectures on modern geometry*, Cremonese Ed.Roma 1961.

[18] SEGRE B. - *Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito*, Ann.Mat.(4)70 (1965) 1-202.

[19] SEGRE B. - *Introduction to Galois geometries*, Mem. Acc. Naz. Lincei, (8)8 (1967) 133-236.

[20] TALLINI G. - *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti. Note I,II*, Rend. Acc. Naz. Lincei,(8)20 (1956) 311-317, 442-466.

[21] TALLINI G. - *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*, Ann.Mat.,(4)42 (1956) 119-164.

[22] TALLINI G. - *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Roma, 16 (1957) 328-351.

[23] TALLINI G. - *Una proprieta' grafica caratteristica delle superficie di Veronese negli spazi finiti. Note I,II*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8)24 (1958) 19-23, 135-138.

[24] TALLINI G. - *Caratterizzazione grafica di certe superfici cubiche di* $S_{3,q}$. Note I,II, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 26 (1959) 484-489, 644-648.

[25] TALLINI G. - *Le geometrie di Galois e le loro applicazioni alla statistica e alla teoria dell'informazione*. Rend. Mat. Roma 19(1960) 379-400.

[26] TALLINI G. - *Ou caps of kind s in a Galois* r-*dimensional space*. Acta Arith., 7(1961) 19-28.

[27] TALLINI G. - *Un'applicazione della geometria di Galois a questioni di statistica*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8)35 (1963) 479-485.

[28] TALLINI G. - *Calotte complete di* $S_{4,q}$ *contenenti due quadriche ellittiche quali sezioni iperpiane*, Rend. Mat. Roma, 23(1964) 108-123.

[29] TALLINI G. - *Ruled graphic systems*, Atti Convegno geometria combinatoria e Appl. Perugia, (1970) 385-393.

[30] TALLINI G. - *Strutture geometriche*. Parte I, Liguori Ed., Napoli 1970.

[31] TALLINI G. - *Sistemi grafici rigati*, Relazione n.8, Ist. Mat. Univ. Napoli (1971) 1-47.

[32] TALLINI G. - *Strutture d'incidenza dotate di polarita'*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano (1971) 1-42.

[33] TALLINI G. - *Strutture grafiche proiettive*, Liguori Ed. Napoli 1973.

[34] TALLINI SCAFATI M. - *Sui* {k,n}*-archi di un piano grafico finito,* Rend.Acc.Naz.Lincei (8)40 (1966) 1-6.

[35] TALLINI SCAFATI M. - {k,n}*-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri. Nota I,II,* Rend.Acc.Naz. Lincei (8)40 (1966) 812-818,1020-1025.

[36] TALLINI SCAFATI M. - *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un* $S_{r,q}$, Rend.Mat. Roma 26 (1967) 273-303.

[37] TALLINI SCAFATI M. - *Calotte di tipo* (m,n) *in uno spazio di Galois* $S_{r,q}$, Rend. Acc.Naz.Lincei,(8) 53 (1973) 71-81.

[38] THAS J.A. - *A conbinatorial problem,* Geometriae dedicata, 1 (1973) 236-240.

[39] TITS J. - *Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent.* Publ. Math. I.H.E.S. Paris (2), 14-60.

Finito di stampare il
5 gennaio 1974