GIUSEPPE TALLINI

Lezioni di GEOMETRIA SUPERIORE

Anno Accademico 1991 - 92

Spazi di chiusura, spazi lineari; reticoli e spazi lineari.

Appunti redatti da Paula Melillo

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

- UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA" -

- Novembre 1992 -

CAP. II.

SPAZI LINEARI

5.- Spazi lineari: definizione ed esempi.

DEF.1.- Uno spazio geometrico, $(S,\mathcal{L})$, prende il nome di **spazio lineare**, se soddisfa alle seguenti proprieta':

(5.1) $\forall \ell \in \mathcal{L}, \quad |\ell| \geq 2;$

(5.2) $\forall x, y \in S, \quad x \neq y, \quad \Rightarrow \quad \exists !\ \ell \in \mathcal{L} : x, y \in \ell.$

Gli elementi di S prendono il nome di **punti**, quelli di $\mathcal{L}$ si dicono **rette**. Le (5.1) e (5.2) si enunciano allora dicendo che: ogni retta ha almeno due punti e per due punti distinti passa una ed una sola retta. Daremo ora svariati esempi di spazi lineari.

ESEMPIO 1.- Spazi proiettivi (sinistri) di dimensione r su un corpo K, $\mathbf{P}_{r,K}$.

ESEMPIO 2.- Struttura di spazio lineare indotta in un sottoinsieme H di uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$. ($H \subseteq S$, $|H| \geq 2$, $\mathcal{L}_H = \{H \cap \ell : \ell \in \mathcal{L}, |H \cap \ell| \geq 2\}$. $(H, \mathcal{L}_H)$ e' uno spazio lineare che si dice sub-immerso in $(S,\mathcal{L})$).

ESEMPIO 3.- Struttura di spazio lineare indotta in un sottoinsieme H di $\mathbf{P}_{r,K}$, $|H| \geq 2$ (cfr. Esempio 2). Come caso particolare si hanno gli spazi affini: $\mathbf{A}_{r,K} = \mathbf{P}_{r,K} - \Pi$, dove Π e' un iperpiano di $\mathbf{P}_{r,K}$.

ESEMPIO 4.- Spazi di chiusura geometrici 1-matroidali rispetto alle rette, definite come chiusura di due punti distinti.

ESEMPIO 5.- Piani proiettivi.

Dicesi **piano proiettivo** uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$, con $|\mathcal{L}| \geq 2$, tale che:

(5.3) $\forall\ \ell, \ell' \in \mathcal{L} \Rightarrow \ell \cap \ell' \neq \emptyset$.

Un piano proiettivo si dice **irriducibile** se ogni sua retta ha almeno tre punti; altrimenti esso si dice **riducibile**. Si prova facilmente che:

i piani irriducibili posseggono quattro punti a tre a tre non allineati, da cui segue che tutte le rette hanno la stessa cardinalita'. Si chiama allora **ordine** del piano la cardinalita' di una retta meno un punto. Se il piano proiettivo e' finito, di ordine q, si prova che:

(5.4) $$|\Pi| = q^2+q+1,$$

(5.5) $$|\mathcal{L}| = q^2+q+1,$$

(5.6) Ogni fascio di rette ha $q+1$ rette.

Un piano proiettivo riducibile, $(\Pi,\mathcal{L})$, e' necessariamente dato da:

$\Pi = \ell \cup \{x\}$, ove $x \notin \ell$; $\mathcal{L}$ = insieme delle rette costituito da ℓ e dalle coppie $\{x,y\}$, ove $y \in \ell$.

Un piano proiettivo irriducibile, $(\Pi,\mathcal{L})$, dicesi **desarguesiano** se per esso vale la seguente proprieta' dei triangoli omologici:

> **dati due triangoli ABC, $A'B'C'$, aventi vertici e lati distinti, se le rette AA', BB', CC' concorrono in un punto O, allora i tre punti $A_1 = BC \cap B'C'$, $B_1 = AC \cap A'C'$ e $C_1 = AB \cap A'B'$, sono allineati.**

Si prova inoltre che un piano desarguesiano $(\Pi,\mathcal{L})$ e' coordinabile sopra un corpo K, cioe' e' isomorfo ad $A_{2,K}$ e viceversa.

<u>ESEMPIO 6</u>.- <u>Sistema di Steiner $S(2,k,v)$</u>. E' uno spazio

lineare $(S,\mathcal{L})$ tale che:

(5.7) $|S| = v$; $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $|\ell| = k$;

Si prova che:

$r = n^\circ$ rette per un punto $= \frac{v-1}{k-1}$; $|\mathcal{L}| = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$;

se $u = n^\circ$ rette per un punto P parallele ad una data retta ℓ (non per P), si ha $v = (u+k)(k-1)+1$. Ne segue che u non dipende dalla coppia (P,ℓ) e che:

(a) $v \geq k(k-1)+1$.

(b) $v = k(k-1)+1 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow (S,\mathcal{L})$ e' un piano proiettivo di ordine $q = k-1 \Leftrightarrow (S,\mathcal{L})$ e' un $S(2, q+1, q^2+q+1)$.

(c) $u = 1 \Leftrightarrow (S,\mathcal{L})$ e' un piano affine $\Leftrightarrow v = k^2 \Leftrightarrow (S,\mathcal{L})$ e' un $S(2,k,k^2)$.

(d) Per $u = 2$, non esistono sistemi di Stainer.

<u>ESEMPIO 7</u>.- <u>Somma di spazi lineari</u>.

Siano $(S',\mathcal{L}')$ e $(S'',\mathcal{L}'')$ due spazi lineari tali che $S' \cap S'' = \emptyset$. Posto $S = S' \cup S''$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'' \cup \{\{x', x''\} : x' \in S', x'' \in S''\}$, si ha che $(S,\mathcal{L})$ e' uno spazio lineare che si dice somma degli spazi $(S',\mathcal{L}')$ e $(S'',\mathcal{L}'')$. In modo analogo si definisce la somma di una famiglia di spazi lineari.

6.- Sottospazi di uno spazio lineare.

DEF.1.- Sia $(S,\mathcal{L})$ uno spazio lineare. Un sottsinsieme T di S prende il nome di **sottospazio** di $(S,\mathcal{L})$ quando:

$$(6.1) \qquad \forall x,y \in T, \quad x \neq y \Rightarrow \text{retta } xy \in T.$$

Evidentemente l' insieme vuoto $\emptyset$, ogni singolo punto di S, ogni retta di $(S,\mathcal{L})$, e tutto S sono sottospazi. Inoltre l' intersezione di sottospazi e' ancora un sottospazio, come subito si prova. Dunque denotata con $\mathcal{S}$ la famiglia dei sottospazi di $(S,\mathcal{L})$, si ha che $\mathcal{S}$ e' un sistema di chiusura di S. Lo spazio di chiusura $(S, \mathcal{S})$, si dira' **associato** ad $(S,\mathcal{L})$. Esso e' uno spazio di chiusura geometrico, in quanto $\emptyset \in \mathcal{S}$ e $\forall x \in S$, $\{x\} \in \mathcal{S}$. In $(S,\mathcal{L})$ rimane allora definito l' operatore di chiusura, e quindi le nozioni di generatore, insieme indipendente, base. Se $(S, \mathcal{S})$ e' matroidale, si dira' che $(S,\mathcal{L})$ e' matroidale. In tal caso, per ogni sottospa_ zio $T \subseteq S$, T finitamente generato, si puo' definire il rango di T, dato dalla cardinalita' di una, e quindi di ogni base di T. Inoltre, se $U,V \in \mathcal{S}$ e U,V sono finita_ mente generati, lo sono anche $U \cap V$ e $\overline{U \cup V}$, e sussiste la disuguaglianza di Grassmann:

(6.1) $\quad \mathbf{rango}\,U + \mathbf{rango}\,V \geq \mathbf{rango}(U \cap V) + \mathbf{rango}(\overline{U \cup V})$.

In particolare, se $(S,\mathcal{L})$ e' finitamente generato, si ha che la (6.1) vale per ogni U e V appartenenti ad $\mathscr{S}$.

Sia $(S,\mathfrak{C})$ uno spazio di chiusura geometrico, (cfr. DEF.5. del n. 1), 1-matroidale. Allora, per ogni $x,y \in S$, $x \neq y$, il sottospazio $\overline{\{x,y\}} = \ell(x,y) =$ retta ℓ per x e y, ammette come basi coppie di punti distinti. Si consideri la famiglia $\mathcal{L} = \{\ell(x,y) : x,y \in S,\ x \neq y\}$ di parti di S. Si ha, per quanto ora detto, che:

(6.2) $\quad \forall \ell, \ell' \in \mathcal{L},\ \ell \neq \ell' \Rightarrow |\ell \cap \ell'| \leq 1$.

Ne segue che $(S,\mathcal{L})$ e' uno spazio lineare (per come abbiamo costruito $\mathcal{L}$, e perche' la (6.2) implica la (5.2)). Esso allora individua lo spazio di chiusura $(S,\mathscr{S})$, dove $\mathscr{S}$ e' la famiglia dei sottospazi di $(S,\mathcal{L})$. Evidentemente $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{S}$. In generale non e' detto che $\mathfrak{C} = \mathscr{S}$. Quando cio' accade, diremo che lo spazio di chiusura geometrico, 1-matroidale, $(S,\mathfrak{C})$, risulta **completo**. La nozione di spazio lineare coincide allora con quella di spazio di chiusura geometrico, 1-matroidale, completo.

Diamo un esempio di spazio di chiusura geometrico, 1-matroidale, non completo.

Sia $\mathbf{P}(r,K)=\mathbf{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $r(\geq 3)$ sopra un corpo K. Sia $\mathbb{C}$ la famiglia costituita da $\mathbf{P}(r,K)$ e da tutti i suoi sottospazi di dimensione minore o uguale ad n, dove n e' un intero minore di $r-1$. Evidentemente, $(\mathbf{P},\mathbb{C})$ e' uno spazio di chiusura geometrico, 1-matroidale, che pero' non e' completo, perche' gli iperpiani di $\mathbf{P}(r,K)$ non sono tra i sottospazi di $(\mathbf{P},\mathbb{C})$, mentre sono sottospazi dello spazio lineare $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, ove $\mathcal{L}=\{\ell(x,y) : x,y\in\mathbf{P},\ x\neq y\}$.

Daremo ora un esempio di spazio lineare non matroidale.

Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}=\mathbf{P}(3,K)$, sia Π un piano ed A,B punti di Π, con $A\neq B$. Denotata con $\mathcal{L}$ la famiglia delle rette di $\mathbf{P}(3,K)$, definiamo la seguente famiglia $\mathcal{L}'$ di parti di $\mathbf{P}$. $\mathcal{L}'$ sia costituita dalle rette di $\mathbf{P}(3,K)$ che non stanno in Π; da quelle di Π non passanti ne' per A ne' per B; inoltre ogni retta ℓ_1 di $\mathcal{L}$ appartenente a Π e passante per A, sia sostituita con l' insieme $\ell'_1=(\ell_1-A)\cup B$; analogamente ogni retta ℓ_2 di $\mathcal{L}$ appartenente a Π e passante per B, sia sostituita con l' insieme $\ell'_2=(\ell_2-B)\cup A$. (La retta AB rimane dunque invariata). La coppia $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$ risulta, come subito si prova, uno spazio lineare. Proviamo che $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$ non e' matroidale. Infatti, scelto un punto $Z\in\Pi$, non sulla retta AB di $\mathcal{L}$, siano X,Y due punti di $(\mathbf{P}-\Pi)$ distinti, allineati con Z. Ebbene, si dimostra che la terna di punti (A,X,Y), in $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$, e' indipendente e genera $\mathbf{P}$. Quindi $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$ ammette una base con tre elementi. D' altra parte, scelti quattro punti indipendenti in $\mathbf{P}(3,K)$, tali che ciascuna delle quattro facce da essi determinata non passi ne' per A, ne' per B, essi costituiscono una base per $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$. Dunque $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$ ammette basi con tre elementi e basi con quattro elementi e quindi non e' matroidale.

L' esempio precedente si generalizza nel modo seguente. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}=\mathbf{P}(r,K)$, con $r\geq 3$, sia Π un sottospazio proprio e sia $f:\Pi\mapsto\Pi$ una biiezione di Π in se' che non sia una collineazione (cioe' esista almeno una retta ℓ di Π tale che $f(\ell)$ non sia una retta). Sia $\mathcal{L}'$ la famiglia di parti di $\mathbf{P}$ costituita dalle rette di $\mathbf{P}$ non su Π e dalle trasformate mediante f delle rette di Π. Si prova subito che $(\mathbf{P},\mathcal{L}')$ e' uno spazio lineare che non solo non e' matroidale, ma non e' neppure 2-matroidale.

7.- Spazi grafici proiettivi.

DEF.1.- Uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$, chiamasi **spazio grafico proiettivo** se e' matroidale e se:

(7.1) $\forall U,V \in \mathcal{S}$, U,V finitamente generati $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rango}U + \text{rango}V = \text{rango}(U \cap V) + \text{rango}(\overline{U \cup V}).$$

Proviamo che:

(7.2) **Se $(S,\mathcal{L})$ e' uno spazio grafico proiettivo, la chiusura di tre suoi punti indipendenti, x,y,z, e' un piano proiettivo.**

DIM. Notiamo che $\text{rango}\overline{\{x,y,z\}} = 3$. Dunque l' asserto segue dalla (7.1) relativa a due rette distinte di $\overline{\{x,y,z\}}$. c.v.d.

Enunciamo ora il seguente assioma, detto **assioma di Veblen**:

(A_1) Siano AA' e BB' due rette distinte che si incontrano in un punto C $(\neq A,A',B,B')$. Allora le rette AB e $A'B'$, s' incontrano in un punto D.

(7.3) **In uno spazio grafico proiettivo $(S,\mathcal{L})$, vale l' assioma di Veblen.**

DIM. L' asserto segue dalla (7.2). c.v.d.

DEF.2.- Uno spazio grafico proiettivo si dice **irriducibile** se ogni sua retta ha almeno tre punti; **riducibile**, in caso contrario.

Si puo' provare il seguente:

TEOREMA I.- **Sia $(S,\mathcal{L})$ uno spazio grafico proiettivo di dimensione $r \geq 3$, irriducibile. Allora esiste un corpo K tale che $(S,\mathcal{L})$ e' isomorfo a $\mathbf{P}(r,K)$.**

Ne segue che un qualsiasi spazio grafico proiettivo, irriducibile, finitamente generato, che non si riduca ad una sola retta, o e' un piano proiettivo irriducibile (desarangouesiano o no), ovvero, e' uno spazio proiettivo $\mathbf{P}(r,K)$.

Sia ora $(S,\mathcal{L})$ un qualsiasi spazio grafico proiettivo. Definiamo, per ogni x,y di S, la seguente relazione φ:

$$(7.4) \qquad x\varphi y \iff \begin{cases} x=y \text{ ovvero,} \\ \text{la retta } xy \text{ ha almeno tre punti.} \end{cases}$$

Proviamo che φ e' una relazione di equivalenza.

DIM. Essa e' manifestamente riflessiva e simmetrica. Proviamone la transitivita'. Siano $x\varphi y$ e $y\varphi z$. Possiamo supporre $x \neq y \neq z \neq x$ e x,y,z non allineati (altrimenti l'asserto e' ovvio). Allora la retta xy contiene un punto $u \neq x, y$, e la retta yz contiene un punto $v \neq y, z$. I punti u e v sono distinti e la retta uv appartiene al piano proiettivo $\Pi = \overline{\{x, y, z\}}$, quindi la retta uv incontra la retta xz in un punto t (diverso da u e v), il quale e' certamente distinto sia da x (altrimenti v coinciderebbe con y), e sia da z (altrimenti u coinciderebbe con y). Dunque xz ha almeno tre punti distinti, (x, z e t), e dunque $x \varphi z$. c.v.d.

Ogni classe di equivalenza $\varphi(x)$, che sara' detta **componente connessa** di x, e' costituita da tutti gli y tali che la retta yx abbia almeno tre punti. Inoltre $\varphi(x)$ e' un sottospazio, perche' se $y, z \in \varphi(x)$, $y \neq z$, la retta yz ha almeno tre punti e quindi appartiene a $\varphi(x)$.

Proviamo che ANCHE $S - \varphi(x)$ e' un sottospazio. Siano $y, z \in S - \varphi(x)$, $y \neq z$. La retta yz e' ad intersezione vuota con $\varphi(x)$, altrimenti, posto $t = yz \cap \varphi(x)$, essa conterrebbe tre punti distinti (y, z, t) ed essendo $t \in \varphi(x)$, apparterrebbe tutta a $\varphi(x)$, mentre $y, z \notin \varphi(x)$. Ne segue che $(S,\mathcal{L})$ e' somma dei due spazi $\varphi(x)$ ed $S-\varphi(x)$.

Se ne deduce che $(S,\mathcal{L})$ e' somma di una famiglia di spazi grafici irriducibili dati dalle componenti connesse di $(S,\mathcal{L})$ rispetto a φ. Se $(S,\mathcal{L})$ e' finitamente generato e di rango $r+1$, le componenti connesse sono in numero finito s. Siano r_1+1, $r_2+1,\ldots,r_s+1$ i loro rispettivi ranghi. Dalla formula di Grassmann si ha allora:

$$r_1+r_2+\ldots+r_s+s=r. \tag{7.5}$$

Dal Teorema I e da quanto ora provato, si ha che:

TEOREMA II - **Uno spazio grafico proiettivo finitamente generato (riducibile) e' somma di un numero finito di sottospazi che sono o punti, o rette, o piani non desarguesiani, ovvero spazi proiettivi coordinabili ciascuno sopra un corpo K .**

8.- <u>Assioma di Veblen in uno spazio lineare</u>.

Sia $(S,\mathcal{L})$ uno spazio lineare e $(S,\mathcal{S})$ lo spazio di chiusura dei suoi sottospazi. Riportiamo qui l' enunciato dell' **assioma di Veblen**, (proprieta' che puo' valere o meno in un $(S,\mathcal{L})$ generico):

(A_1) Siano AA' e BB' due rette distinte che si incontrano in un punto C ($\neq A,A',B,B'$). Allora le rette AB e $A'B'$, s' incontrano in un punto D.

La (A_1) e' equivalente alla seguente proprieta', come subito si prova:

(A_2) Date due rette ad intersezione vuota ed un punto P non su tali rette, esiste al piu' una retta PER P incidente le due rette date.

<u>DEF</u>.1.- Un sottospazio proprio H di S ($H\in\mathcal{S}$) si dice primo se

$$\forall \ell\in\mathcal{L} \Rightarrow \ell\cap H\neq\emptyset,$$

cioe' se ogni retta lo incontra almeno in un punto. Evidentemente, negli spazi affini non esistono sottospazi (propri) primi.

Enuncieremo ora varie proprieta' di cui $(S,\mathcal{L})$ puo' godere o meno; proveremo poi che esse sono equivalenti all'assioma di Veblen.

(II) Per ogni terna di punti indipendenti $\{x,y,z\}$ di S, la chiusura $\overline{\{x,y,z\}}$ e' un piano proiettivo.

(p) $\forall \ell \in \mathcal{L}$, $\forall x \in S-\ell$, la proiezione di ℓ da x, data da $p(x,\ell) = \bigcup_{z \in \ell} xz$, risulta un piano proiettivo.

(P) $\forall T \in \mathcal{S}$, $\forall x \in S-T$, la proiezione di T da x, data da $p(x,T) = \bigcup_{z \in T} xz$, risulta un sottospazio che ammette T come primo. Inoltre risulta:

(8.1) $$p(x,T) = \overline{T \cup \{x\}}.$$

Proviamo che:

(8.2) $$(A_1) \Rightarrow (p).$$

DIM. Sia $\ell \in \mathcal{L}$ e $x \in S-\ell$. Cominciamo a provare che $p(x,\ell)$ e' un sottospazio e cioe' che se $a',b' \in p(x,\ell)$ con $a' \neq b'$, la retta $a'b'$ e' contenuta in $p(x,\ell)$. L'asserto e' ovvio se la retta $a'b'$ passa per x. Supponiamo dunque che la retta $a'b'$ non passi per x. Le rette xa' e xb' incontrano ℓ in due punti distinti a, b

(in quanto $a', b' \in p(x, \ell)$ e le rette xa', xb' sono distinte). Segue allora da (A_1) che le rette $\ell = ab$ e $a'b'$ si incontrano in un punto c. Proviamo che per ogni y' della retta $a'b'$ ($y' \neq a', b'$), la retta xy' incontra ℓ in un punto y, ne seguira' che $y' \in p(x, \ell)$ e quindi che la retta $a'b'$ e' contenuta in $p(x, \ell)$. Le rette $y'a' = a'b'$ e $ab = \ell$ si incontrano nel punto c, onde, per (A_1), le rette $y'b$ e $aa' = ax$ si incontrano in un punto d. Da (A_1) segue allora che le rette $ab = \ell$ e xy' si incontrano in un punto y. Si e' cosi' provato che $p(x, \ell)$ e' un sottospazio. Posto $\ell' = a'b'$, si ha evidentemente che $p(x, \ell) = p(x, \ell')$. Se $\ell'' = a''b''$ e' una qualsiasi retta di $p(x, \ell)$ non passante per x, ragionando in modo analogo a quanto precede, relativamente alle rette $\ell' = a'b'$ e $\ell'' = a''b''$ (invece che alle rette $\ell = ab$ ed $\ell' = a'b'$), si ha che ℓ' ed ℓ'' si incontrano in un punto c'. Data l' arbitrarieta' di ℓ' ed ℓ'' si ha che $p(x, \ell)$ e' un piano proiettivo. Cio' prova la (8.2). c.v.d.

Proviamo ora che:

(8.3) $\qquad$ **(p) $\Rightarrow$ (P).**

<u>DIM</u>. Sia $T \in \mathscr{S}$ e $x \in S-T$. Proviamo che per ogni $a', b' \in p(x,T)$, con $a' \neq b'$, la retta $a'b'$ appartiene a $p(x,T)$ e che $a'b' \cap T \neq \emptyset$; ne seguira' che $p(x,T)$ e' un sottospazio che ammette T come primo. Se la retta $a'b'$ passa per x l'asserto e' ovvio, in caso contrario sia $\{a\} = xa' \cap T$ e $\{b\} = xb' \cap T$: evidentemente sara' $a \neq b$; inoltre la retta $\ell = ab$ e' contenuta in T e quindi $p(x,\ell)$ e' contenuto in $p(x,T)$. Per la (p) si ha che $p(x,\ell)$ e' un piano proiettivo che contiene a' e b', onde la retta $a'b'$ appartiene a $p(x,\ell)$ e dunque a $p(x,T)$; inoltre, sempre per la (p), $a'b' \cap \ell \neq \emptyset$ e quindi $a'b' \cap T \neq \emptyset$. Proviamo infine la (8.1). Si ha (essendo $p(x,T) \in \mathscr{S}$):

$$\{T,x\} \subseteq p(x,T) \quad \Rightarrow \quad \overline{T \cup \{x\}} \subseteq \overline{p(x,T)} = p(x,T);$$

viceversa

$$\{T,x\} \subseteq \overline{T \cup \{x\}} \quad \Rightarrow \quad p(x,T) = \bigcup_{z \in T} xz \subseteq \overline{T \cup \{x\}},$$

perche' $\overline{T \cup \{x\}}$ e' un sottospazio. Dunque da

$$\overline{T \cup \{x\}} \subseteq p(x,T) \subseteq \overline{T \cup \{x\}}$$

segue la (8.1). Si e' cosi' provata la (8.3). c.v.d.

Proviamo ora che:

(8.4) $(P) \Rightarrow (\mathrm{II})$.

<u>DIM</u>. Siano x,y,z tre punti indipendenti di S e sia $\ell = yz$ la retta per y e z. Poiche' per la (P), (con $T=\ell$), $p(x,\ell)$ e' un sottospazio, si ha intanto:

(8.4.1) $$\overline{\{x,y,z\}} = p(x,\ell).$$

Sia ora ℓ' una retta di $p(x,\ell)$ non passante per x e siano a',b' due suoi punti distinti, onde $a',b' \in p(x,\ell)$ e quindi $\ell \cap a'x = \{a\}$, $\ell \cap b'x = \{b\}$, ove a,b sono due punti distinti di ℓ. Si ha, essendo $p(x,\ell)$ e $p(x,\ell')$ sottospazi di $(S,\mathcal{L})$:

$$\overline{\{x,a,b\}} = p(x,\ell) = \overline{\{x,a',b'\}} = p(x,\ell')$$

Quindi per ogni retta $\ell' \subseteq p(x,\ell)$, con $x \notin \ell'$, si ha:

(8.4.2) $$\overline{\{x,y,z\}} = p(x,\ell) = p(x,\ell').$$

Sia allora ℓ'' una qualsiasi altra retta di $\overline{\{x,y,z\}}$ non passante per x, $\ell'' \neq \ell,\ell'$; dalla (8.4.2) si ha:

$$\overline{\{x,y,z\}} = p(x,\ell) = p(x,\ell') = p(x,\ell'').$$

Ma allora, essendo ℓ' un primo di $p(x,\ell')$ per la (P), deve essere:

$$\ell' \cap \ell'' \neq \emptyset,$$

cioe' $\overline{\{x,y,z\}}$ e' un piano proiettivo. Questo dimostra l'asserto. C.V.D.

Dimostriamo infine che:

(8.5) $$(\Pi) \Rightarrow (A_1)$$

DIM. Siano $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ e sia x un punto di S, $x \notin \ell$, $x \notin \ell'$, tale che per esso passino due rette incidenti rispettivamente ℓ nei punti a,b e ℓ' nei punti a',b'. Vogliamo dimostrare che $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$. I punti a,b,x, sono indipendenti e dunque, per la (Π), $\overline{\{a,b,x\}}$ e' un piano proiettivo. Ne segue che le rette

$$ab = \ell, \quad ax, \quad bx$$

sono contenute in $\overline{\{a,b,x\}}$, da cui

$$a', b' \in \overline{\{a,b,x\}} \quad \Rightarrow \quad a'b' = \ell' \in \overline{\{a,b,x\}};$$

ma allora si ha che sia ℓ che ℓ' appartengono a $\overline{\{a,b,x\}}$ e quindi esse necessariamente si intersecano in un punto. Cio' dimostra l' asserto. C.V.D.

Da (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), segue:

TEOREMA I.- **In uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$, le proprieta' (A_1), (A_2), (Π), (p) e (P) sono equivalenti.**

Dimostriamo infine il seguente:

TEOREMA II.- **Ogni spazio lineare $(S,\mathcal{L})$ soddisfacente l'** assioma di Veblen (o, equivalentemente, le (A_2), (II), (p) o (P), (cfr. Teorema precedente)), e' uno spazio grafico proiettivo (cfr. (7.1)).

<u>DIM</u>. Cominciamo col dimostrare che

(8.6) $(S,\mathcal{L})$ e' matroidale

e, precisamente, che in $(S,\mathcal{L})$ vale $(\bar{\sigma})$. Sia T un chiuso di $\mathscr{S}$ e siano x ed y due punti distinti appartenenti ad $S-T$, tali che $x\in\overline{T\cup\{y\}}$; vogliamo dimostrare che $y\in\overline{T\cup\{x\}}$. Per la (8.1), (valida stante la (P) per ipotesi), si ha intanto che $\overline{T\cup\{y\}} = p(y,T)$. Allora da $x\in p(y,T)$ segue

(8.6.1) $p(x,T)\subseteq p(y,T)$,

perche' $\forall z\in T$, sia z che x appartengono a $p(y,T)$ e quindi tutta la retta xz appartiene a $p(y,T)$ essendo esso un sottospazio. Inoltre si ha anche $y\in p(x,T)$, perche' tra le rette che da x proiettano T ritroviamo anche quella passante per y. Dunque, con analogo ragionamento, scambiando la x con la y, otteniamo che

(8.6.2) $p(y,T)\subseteq p(x,T)$;

quindi, per le (8.1), (8.6.1), e (8.6.2) si ha che:

$$\overline{T\cup\{x\}} = p(x,T) = p(y,T) = \overline{T\cup\{y\}}.$$

Ma allora e' chiaro che

$$x \in \overline{T\cup\{y\}} \quad\Rightarrow\quad y \in \overline{T\cup\{x\}},$$

cioe' $(S,\mathcal{L})$ e' matroidale. c.v.d (8.6)

Ne segue, (cfr. Teorema I del n. 4) che se U e V sono due sottospazi di $\mathcal{S}$ finitamente generati, per essi vale la disuguaglianza di Grassmann (4.6). Proviamo ora che nella suddetta (4.6) vale il segno di uguaglianza, ossia proviamo la (7.1): ne seguira' che $(S,\mathcal{L})$ e' uno spazio grafico proiettivo.

Premettiamo la seguente proprieta' (sempre nell' ipotesi che in $(S,\mathcal{L})$ valga l'assioma di Veblen):

(8.7) **Siano $U, V \in \mathcal{S}$, U finitamente generato, $U\cap V=\emptyset$; per ogni $W\subseteq U$, sia $T=\overline{W\cup V}$. Allora $T\cap U=W$.**

<u>DIM</u>. Bastera' dimostrare che $T\cap U\subseteq W$, essendo evidente l'inclusione opposta per come sono stati scelti U, W e T. Procederemo per induzione.

Sia $\mathrm{rango}W=1$, cioe' sia $W=\{w\}$. Si ha che $T=\overline{\{w\}\cup V}=p(w,V)$ perche', per l'ipotesi, vale la (8.1).

Quindi $T \cap U = p(w,V) \cap U$. Se, per assurdo, esistesse un $x \in U$, $x \neq w$, tale che $x \in p(w,V) \cap U$, la retta wx apparterrebbe a $p(w,V)$, quindi $wx \cap V = \{t\}$. Ma wx, e quindi t, appartiene anche ad U. Allora avremmo trovato un punto t che sta sia in U che in V, mentre per ipotesi era $U \cap V = \emptyset$: assurdo. Sia ora rango$W = n$, $n \geq 2$; supponiamo vera la tesi per $n-1$ e dimostriamola per n. Sia $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base di W; considerando i soli punti $\{x_2, \ldots, x_n\}$, poniamo $W^* = \overline{\{x_2, \ldots, x_n\}}$. W^* e' un sottospazio di W tale che rango$W^* = n-1$. Facciamo ora la proiezione di W^* da x_1, $p(x_1, W^*)$; possiamo senz'altro scrivere $p(x_1, W^*) = \overline{W^* \cup \{x_1\}}$ perche', per l'ipotesi, vale la (8.1). Evidentemente si ha che $\overline{W^* \cup \{x_1\}} = W$. Poniamo $T = \overline{W \cup V}$ e $T^* = \overline{W^* \cup V}$. Per l' ipotesi induttiva, possiamo intanto affermare che per gli spazi U, V, T^* e W^* vale la (8.7), cioe': $T^* \cap U = W^*$. Sia ora $p(x_1, T^*) = \overline{T^* \cup \{x_1\}}$ la proiezione di T^* da x_1. Si ha che $\overline{T^* \cup \{x_1\}} \supseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ da cui

$$\overline{T^* \cup \{x_1\}} \supseteq \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} = W;$$

inoltre si ha anche $\overline{T^* \cup \{x_1\}} \supseteq V$, per cui, in definitiva, (8.7.1) $$p(x_1, T^*) \supseteq \overline{W \cup V} = T.$$

D'altra parte si ha pure che $T \supseteq T^*$ e $T \supseteq \{x_1\}$, da cui segue che

(8.7.2) $$T \supseteq \overline{T^* \cup \{x_1\}} = p(x_1, T^*);$$

allora da (8.7.1) e (8.7.2) segue che

(8.7.3) $$T = p(x_1, T^*).$$

Per ogni $y \in T \cap U$, consideriamo ora la retta $x_1 y$: essa appartiene a T (perche' x_1 e $y \in T$), quindi, per la (8.7.3), deve essere

(8.7.4) $$x_1 y \cap T^* = \{z\};$$

poiche', inoltre, la suddetta retta appartiene anche ad U, (perche' $x_1 \in W \subseteq U$ e $y \in U$), si ha che pure z appartiene ad U e quindi, dalla (8.7.4) segue

$$z \in T^* \cap U = W^* \subseteq W;$$

infine, poiche' anche x_1 appartiene a W, si conclude che

$$x_1 z = x_1 y \subseteq W \quad \Rightarrow \quad y \subseteq W.$$

Abbiamo dunque dimostrato che $T \cap U \subseteq W$, il che era cio' che volevamo. C.V.D. (8.7)

Osserviamo ora che la seguente implicazione

(8.8) $\forall U, V \in \mathscr{S}$, **U e V finitamente generati tali che**

$$U \cap V = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{rango}\,U + \text{rango}\,V = \text{rango}\,\overline{U \cup V},$$

equivale alla:

(8.9) **siano $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_u\}$ una base di $U \in \mathscr{S}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_v\}$ una base di $V \in \mathscr{S}$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $Y \cup Z$ e' un insieme indipendente.**

Infatti $|Y \cup Z| = |Y| + |Z| = \text{rango}\,U + \text{rango}\,V$; inoltre, se la (8.9) e' vera, $Y \cup Z$ costituisce una base per $\overline{U \cup V}$ e quindi si ha anche $|Y \cup Z| = \text{rango}\,\overline{U \cup V}$, cioe' $\text{rango}\,U + \text{rango}\,V = \text{rango}\,\overline{U \cup V}$; viceversa se $\text{rango}\,U + \text{rango}\,V = \text{rango}\,\overline{U \cup V}$, significa che $Y \cup Z$ non solo genera $\overline{U \cup V}$, ma e' anche un indipendente, cioe' la (8.9).

Proviamo ora la (8.8) (o, equivalentemente, la (8.9)), cioe' la tesi del Teorema II.

<u>DIM</u>. Posto $n = u + v = \text{rango}\,U + \text{rango}\,V$, osserviamo che la (8.8) e' vera per $n = 0, 1, 2, 3$: infatti per tali valori di n si ha che U (oppure V) e' o l'insieme vuoto, (cioe' $\text{rango}\,U = 0$), oppure si riduce ad un punto (cioe' $\text{rango}\,U = 1$), casi in cui la (8.8) e' manifestamente vera. Supponiamo allora $n \geq 4$ e dimostriamo che vale la (8.9), (cioe' la (8.8)).

Ragioniamo per assurdo. Se $Y \cup Z$ non fosse indipendente, almeno un suo elemento (e non e' restrittivo supporre che sia ad esempio y_1), apparterrebbe alla chiusura dei rimanenti, cioe':

$$y_1 \in \overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z}.$$

Posto $\overline{\{y_2, \ldots, y_u\}} = W$, dove $\{y_2, \ldots, y_u\}$ e' indipendente, sia $T = \overline{W \cup V}$, da cui, per la (8.7), segue che $T \cap U = W$.

Si ha che $\overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} \supseteq W$ e inoltre

$$\overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} \supseteq Z \quad \Rightarrow \quad \overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} \supseteq \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad \overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} \supseteq V,$$

quindi

(8.9.1) $$\overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} \supseteq \overline{W \cup V};$$

d'altra parte si ha anche che $\overline{W \cup V} \supseteq V = \overline{Z} \supseteq Z$ e $\overline{W \cup V} \supseteq W \supseteq (Y - \{y_1\})$, quindi

(8.9.2) $$\overline{W \cup V} \supseteq \overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z},$$

e dunque, da (8.9.1) e (8.9.2) segue che

$$\overline{(Y - \{y_1\}) \cup Z} = \overline{W \cup V} = T.$$

Allora, dall'ipotesi per assurdo, si ha che $y_1 \in T$ e poiche' e' anche $y_1 \in U$, in definitiva abbiamo trovato che $y_1 \in T \cap U = W$. Ma cio' e' assurdo perche' l'insieme $\{y_1, y_2, \ldots, y_u\}$ e' indipendente. Cio' dimostra la (8.9) nel caso in cui sia $U \cap V = \emptyset$. C.V.D. (8.8) $\simeq$ (8.9)

Si e' cosi' dimostrata la (7.1) nel caso in cui $U \cap V = \emptyset$. Poniamoci ora nel caso piu' generale, U e V ancora finitamente generati, ma $U \cap V \neq \emptyset$. Sia X una base per $U \cap V$ e siano $X \cup Y$ e $X \cup Z$ basi rispettivamente per U e per V. Se dimostriamo che $X \cup Y \cup Z$ e' una base per $\overline{U \cup V}$, da cio' seguira' che

$$\begin{aligned} \text{rango}\,\overline{U \cup V} &= |X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| = (\text{rango}\,U \cap V) + \\ &+ (\text{rango}\,U - \text{rango}\,U \cap V) + (\text{rango}\,V - \text{rango}\,U \cap V) = \\ &= \text{rango}\,U + \text{rango}\,V - \text{rango}\,U \cap V, \end{aligned}$$

ossia che

(8.10) $\quad \text{rango}\,U + \text{rango}\,V = \text{rango}\,\overline{U \cup V} + \text{rango}\,U \cap V,$

che e' quanto resta ancora da dimostrare della nostra tesi.

Dimostriamo allora che

(8.11) **$X \cup Y \cup Z$ e' un insieme indipendente,**

dato che, per le posizioni assunte, cio' basta ad assicurare che $X \cup Y \cup Z$ e' una base per $\overline{U \cup V}$.

Sia $V^{*} = \overline{Z}$ il sottospazio di V generato da Z. Poiche' $X \cup Z$ e' un indipendente di V, si ha che:

(8.11.1) $$\overline{X}\cap\overline{Z}=\overline{X}\cap V^{*}=\emptyset,$$

(cfr. (3.3)). Inoltre si ha anche che

(8.11.2) $$U\cap V^{*}=\emptyset,$$

perche' se esistesse un elemento t tale che $t\in U\cap V^{*}$, si avrebbe che $t\in U$ e $t\in V^{*}\subseteq V$, dal che seguirebbe che $t\in\overline{X}$ e quindi che $t\in\overline{X}\cap V^{*}$ contro la (8.11.1). Ma allora, poiche' valendo la (8.11.2) ci troviamo nelle ipotesi della (8.8), si ha, analogamente alla (8.9), che $(X\cup Y)\cup Z$ e' indipendente, come volevamo. C.V.D. (8.11)

Riassumendo, possiamo concludere che la (8.6) e la (8.11) dimostrano il Teorema II. C.V.D.

Dalla (7.2) e dai Teoremi I e II di questo paragrafo segue:

<u>TEOREMA III</u>.- Uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$, e' grafico proiettivo se e solo se in esso vale l'assioma di Veblen (A_1) (o una delle proprieta' (A_2), (Π), (p) o (P) ad esso equivalenti).

Dal Teorema III e dal Teorema I del n. 7 si ha:

<u>TEOREMA IV</u>.- Uno spazio lineare $(S,\mathcal{L})$, con $|\mathcal{L}|\geq 2$, fi_ nitamente generato e soddisfacente l'assioma di Veblen,

o e' un piano proiettivo, oppure e' isomorfo ad uno spazio proiettivo $\mathbf{P}_{r,K}$ su un corpo K.

CAP. III.

RETICOLI E SPAZI LINEARI

9.- Reticoli e sistemi di chiusura

Sia $(L,\leq)$ un insieme ordinato e sia $X \subseteq L$ (con $X \neq \emptyset$);

DEF. 1.- Un elemento $z \in L$ dicesi **confine inferiore** di X se:

(9.1) $\forall x \in X\ ,\ z \leq x.$

Chiamasi poi **massimo confine inferiore** di X un confine inferiore di X, sia y, tale che:

(9.2) $\forall z =$ confine inferiore di X, si ha: $z \leq y$.

Se esiste un massimo confine inferiore di X, sia y, esso e' unico. Infatti se y' e' un altro massimo confine inferiore di X, risulta: $y \leq y'$ e $y' \leq y$ onde $y = y'$.

DEF. 2.- Analogamente si definisce **confine superiore** di X un elemento $u \in L$ tale che:

(9.3) $\forall x \in X\ ,\ x \leq u.$

Chiamasi poi **minimo confine superiore** di X un confine superiore v di X tale che:

(9.4) $\forall u =$ confine superiore di X, $v \leq u$.

Se esiste, e' unico il minimo confine superiore di X.

DEF. 3.- Si definisce **reticolo** un insieme ordinato $(L,\leq)$ tale che per ogni $x,y\in L$ esistono il massimo confine inferiore di $\{x,y\}$, che si denota con $x\sqcap y$, ed il minimo confine superiore di $\{x,y\}$, che si denota con $x\sqcup y$.

DEF. 4.- Un reticolo dicesi **completo** se, per ogni $X\subseteq L$, esistono il massimo confine inferiore di X, e si denota con $\bigsqcap_{x\in X} x$, ed il minimo confine superiore di X, e si denota con $\bigsqcup_{x\in X} x$.

Se $S\neq\emptyset$, l'insieme delle parti di S, $\mathcal{P}(S)$, e' un reticolo completo rispetto alla relazione d'inclusione $\subseteq$, l'unione e l'intersezione essendo quelle classiche.

Sia ora $(S,\mathbb{C})$ uno spazio di chiusura. Si consideri l'insieme ordinato $(\mathbb{C},\subseteq)$, ove $\subseteq$ e' l'inclusione di S. Esso e' un reticolo; infatti se $C_1,C_2\in\mathbb{C}$, si ha che $C_1\cap C_2$ $(\in\mathbb{C})$ e' il massimo confine inferiore di $\{C_1,C_2\}$ e $\overline{C_1\cup C_2}$ $(\in\mathbb{C})$ e' il minimo confine superiore di $\{C_1,C_2\}$. Tale reticolo inoltre, e' completo. Infatti se $\{C_i\}_{i\in\mho\neq\emptyset}$, e' una famiglia non vuota di chiusi, si ha che

$$\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} C_i \ (\in \mathfrak{C}) \qquad e \qquad \overline{\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} C_i} \ (\in \mathfrak{C})$$

sono rispettivamente il massimo confine inferiore e il minimo confine superiore della famiglia $\{C_i\}_{i\in\mathfrak{I}\neq\emptyset}$. Il reticolo $(\mathfrak{C},\subseteq)$ dicesi **associato** allo spazio di chiusura $(S,\mathfrak{C})$.

<u>DEF</u>.5.- In un insieme ordinato $(L,\leq)$ si dice che $x\in L$ **copre** $y\in L$, con $x\neq y$, se:

(9.5) $\qquad \forall z\in L : y\leq z\leq x \Rightarrow z=x$, ovvero $z=y$.

<u>DEF</u>.6.- Un reticolo $(L,\leq)$ si definisce **sovramodulare** se per ogni x,y tali che x (ovvero y) copre $x\sqcap y$, si ha che $x\sqcup y$ copre y (ovvero x).

<u>DEF</u>.7.- Si dice poi che il reticolo $(L,\leq)$ e' **sottomodulare** se per ogni x,y tali che $x\sqcup y$ copre x (ovvero y), si ha che y (ovvero x) copre $x\sqcap y$.

<u>DEF</u>.8.- Diremo infine che $(L,\leq)$ e' **modulare** se esso risulta sia sovramodulare che sottomodulare.

10. - Reticoli e spazi lineari.

Sia $(S,\mathcal{L})$ uno spazio lineare, $(S,\mathcal{S})$ lo spazio di chiusura dei suoi sottospazi e $(\mathcal{S},\subseteq)$ il reticolo (completo) associato ad $(S,\mathcal{S})$. Consideriamo la seguente proprieta' (α) per $(S,\mathcal{L})$:

(α) $\quad \forall T\in\mathcal{S},\ \forall x\in S-T \Rightarrow \overline{T\cup\{x\}}$ copre T.

Evidentemente si ha:

(10.1) $\quad (\mathcal{S},\subseteq)$ sovramodulare $\Rightarrow$ (α).

Proviamo che:

TEOREMA I. - **$(S,\mathcal{L})$ soddisfi alla (α). Allora in $(S,\mathcal{S})$ vale l'assioma dello scambio, cioe':**

(10.2) $\quad (\alpha) \Rightarrow (\sigma)$.

Dunque, uno spazio $(S,\mathcal{L})$ soddisfacente alla (α) e' matroidale.

DIM. Proviamo che da (α) segue $(\bar{\sigma})$. Ne seguira' l'asserto, essendo $(\bar{\sigma})$ equivalente a (σ).

Per ogni $x,y\in S$ e $T\in\mathcal{S}$ tale che $x\notin T$ e $x\in\overline{T\cup\{y\}}$, si ha che $y\notin T$ (altrimenti $x\in\overline{T\cup\{y\}}=\bar{T}=T$) e quindi per la proprieta' (α) relativa ad y e T si ha che $\overline{T\cup\{y\}}$ copre T; d'altra parte $\overline{T\cup\{x\}}\subseteq\overline{T\cup\{y\}}$ ed inoltre $\overline{T\cup\{x\}}\supset T$, onde $\overline{TU\{x\}} = \overline{TU\{y\}}$ e quindi $y \in \overline{TU\{x\}}$. Si e' cosi' provato che:

$$\forall T \in \mathcal{S},\ \forall x, y \in S \ :\ x \notin T \text{ e } x \in \overline{TU\{y\}} \ \Rightarrow \ y \in \overline{TU\{x\}}$$

ossia la $(\bar{\sigma})$. Si ha cosi' l'asserto. C.V.D.

<u>TEOREMA II</u>. - **Se $(S,\mathcal{L})$ e' matroidale, allora $(\mathcal{S},\subseteq)$ e' sovramodulare, cioe':**

(10.3) $\quad (\sigma) \Rightarrow (\mathcal{S},\subseteq)$ **sovramodulare.**

<u>DIM</u>. Osserviamo che:

(10.4) $\quad U, V \in \mathcal{S},\ V \subseteq U;$ allora

$$[U \text{ copre } V] \Leftrightarrow [\forall x \in U - V,\ \ \overline{VU\{x\}} = U].$$

Siano ora $U, V \in \mathcal{S}$ e supponiamo che U copra $U \cap V$; vogliamo provare che, se vale (σ), $\overline{U \cup V}$ copre V; ne seguira' l'asserto. Sia $y \in U - U \cap V$; poiche' U copre $U \cap V$, per la (10.4) si ha che $U = \overline{(U \cap V)U\{y\}}$ e quindi

$$\overline{U \cup V} = \overline{[(U \cap V)U\{y\}]UV} \subseteq \overline{VU\{y\}} \subseteq \overline{U \cup V}$$

cioe'

(10.5) $$\overline{VU\{y\}} = \overline{U \cup V}.$$

dalla (10.5) e dalla (σ) si ha:

$$\forall x \in \overline{U \cup V} - V \ \Rightarrow \ x \notin V,\ x \in \overline{U \cup V} = \overline{VU\{y\}} \overset{(\sigma)}{\Rightarrow} y \in \overline{VU\{x\}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{U \cup V} = \overline{V \cup \{y\}} \subseteq \overline{V \cup \{x\}} \subseteq \overline{U \cup V} \quad \Rightarrow \quad \overline{V \cup \{x\}} = \overline{U \cup V}$$

e quindi per la (10.4) si ha che $\overline{U \cup V}$ copre V, onde l'asserto. c.v.d.

Da (10.2), (10.3), (10.1) segue che:

(10.6) $(\alpha) \Leftrightarrow (\sigma) \Leftrightarrow (\mathcal{S}, \subseteq)$ e' sovramodulare,

ossia che:

<u>TEOREMA III</u>.- **Uno spazio lineare $(S, \mathcal{L})$ e' matroidale se, e soltanto se, $(\mathcal{S}, \subseteq)$ e' sovramodulare, se, e soltanto se, $(S, \mathcal{L})$ soddisfa alla condizione (α).**

11.- <u>Reticoli modulari e spazi grafici proiettivi</u>.

Proviamo il seguente

<u>TEOREMA I</u>.- **Sia $(S, \mathcal{L})$ uno spazio lineare 2-matroidale tale che $(\mathcal{S}, \subseteq)$ risulti sottomodulare. Allora la chiusura di tre punti indipendenti di $(S, \mathcal{L})$ e' un piano proiettivo, cioe' $(S, \mathcal{L})$ e' uno spazio grafico proiettivo.** (cfr. Teorema II del n.8).

<u>DIM</u>. Siano x, y, z tre punti indipendenti di S e sia $\Pi = \overline{\{x, y, z\}}$. Poiche' $(S, \mathcal{L})$ e' 2-matroidale, anche $(\Pi, \mathcal{L}_\Pi)$

sara' tale e quindi ogni terna di elementi indipendenti di Π e' una base per Π. Siano u, v due rette distinte di Π; da quanto ora detto sia ha che $\overline{u \cup v} = \Pi$ e che Π copre u. Dunque v deve coprire $u \cap v$ (essendo $(S, \mathcal{L})$ sot_tomodulare). Ne segue che $u \cap v \neq \emptyset$ (in quanto ogni punto t di v e' tale che $\emptyset \subset t \subset v$). Si e' cosi' provato che $(\Pi, \mathcal{L}_\Pi)$ e' un piano proiettivo. Ne segue l'asserto. c.v.d.

Sussiste inoltre il seguente

<u>TEOREMA II</u>.- **Sia $(S, \mathcal{L})$ uno spazio lineare, grafico proiettivo. Allora lo spazio di chiusura dei suoi sottospazi, $(\mathcal{S}, \subseteq)$, e' un reticolo modulare.**

<u>DIM</u>. In virtu' del Teorema II del n. 10, bastera' provare che:

(11.1) **$(S, \mathcal{L})$ grafico proiettivo $\Rightarrow$**

$\Rightarrow (\mathcal{S}, \subseteq)$ sottomodulare.

Siano $U, V \in \mathcal{S}$ tali che $\overline{U \cup V}$ copre V. Da cio' segue intanto che

(11.2) $\forall x \in (\overline{U \cup V} - V) \Rightarrow \overline{x \cup V} = \overline{U \cup V} = p(x, V)$.

Dunque, per ogni y appartenente a $U - U \cap V$, essendo

$$U - U \cap V \subseteq \overline{U \cup V} - V \subseteq \overline{U \cup V} - U \cap V,$$

per la (11.2) segue che

(11.3) $$\overline{U \cup V} = p(y, V),$$

e che

(11.4) $$\overline{yU(U \cap V)} = p(y, U \cap V).$$

Dobbiamo provare che $\overline{yU(U \cap V)} = U$. L'inclusione $\subseteq$ e' ovvia; sia allora z un qualunque punto di $U-(U \cap V)$, $z \neq y$. Per la (11.3), essendo $z \in \overline{U \cup V}$, la retta zy deve intersecare V in un punto t. Tale punto t (diverso da z, perche' z non sta in V) appartiene dunque a $U \cap V$ (poiche' zy sta in U) e quindi $ty = zy \subseteq p(y, U \cap V)$, cioe', per la (11.4), $z \in \overline{yU(U \cap V)}$. Quindi $\overline{yU(U \cap V)} \supseteq$ $\supseteq U$ e cio' dimostra l'asserto. c.v.d.

Dai Teoremi I, II, e dal Teorema III del n. 10, segue:

<u>TEOREMA III</u>.- **Sia $(S, \mathcal{L})$ uno spazio modulare e $(\mathcal{S}, \subseteq)$ lo spazio di chiusura dei suoi sottospazi. Si ha:**

$(\mathcal{S}, \subseteq)$ modulare $\Leftrightarrow$ $(S, \mathcal{L})$ e' uno spazio grafico proiettivo.

INDICE