GIUSEPPE TALLINI

Lezioni di GEOMETRIA SUPERIORE

Anno Accademico 1991 - 92

Spazi di chiusura, spazi lineari; reticoli e spazi lineari.

Appunti redatti da Paula Melillo

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

- UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA" -

- Novembre 1992 -

CAP. I.

SPAZI DI CHIUSURA

1.- Spazi di chiusura: definizioni e prime proprieta'.

DEF.1.- Sia S un insieme non vuoto e $\mathfrak{C}$ una famiglia di parti di S, soddisfacente alle seguenti proprieta':

(1.1) $S \in \mathfrak{C}$,

(1.2) $\{C_i\}_{i\in\mathfrak{I}\neq\emptyset}$, $C_i \in \mathfrak{C} \Rightarrow \cap C_i \in \mathfrak{C}$.

Lo spazio geometrico $(S,\mathfrak{C})$ dicesi **spazio di chiusura** e la struttura geometrica $\mathfrak{C}$ dicesi **sistema di chiusura**; gli elementi di $\mathfrak{C}$ prendono il nome di **chiusi**. Per esempio, costituiscono un sistema di chiusura:

i chiusi di uno spazio topologico;

i sottogruppi di un gruppo;

i sottoanelli di un anello;

gli ideali (bilateri) di un anello;

i sottospazi di uno spazio vettoriale.

DEF.2.- Dato $X \subseteq S$, chiameremo **chiusura** di X, e lo indicheremo con $\overline{X}$ l'insieme dato dall' intersezione di tutti i chiusi contenenti X; $\overline{X}$ e' a sua volta un chiuso (per (1.2)), ed e' anzi il minimo chiuso contenente X.

L' applicazione

(1.3) $$- : X\subseteq S \mapsto \overline{X}\in\mathcal{C}$$

prende il nome di operatore di chiusura relativo a $\mathcal{C}$.

Si ha che:

(1.4) $\forall\ X\subseteq S \ \Rightarrow\ X\subseteq\overline{X}$;

(1.5) $X\subseteq S,\ \forall\ C\subseteq\mathcal{C} : X\subseteq C \ \Rightarrow\ \overline{X}\subseteq C$;

(1.6) $X=\overline{X} \ \Leftrightarrow\ X\in\mathcal{C}$;

(1.7) $X\subseteq S \ \Rightarrow\ \overline{\overline{X}}=\overline{X}$;

(1.8) $X\subseteq Y \ \Rightarrow\ \overline{X}\subseteq\overline{Y}$;

(1.9) $X\subseteq\overline{Y},\ Y\subseteq\overline{X} \ \Rightarrow\ \overline{X}=\overline{Y}$;

(1.10) $\{X_i\}_{i\in\mathfrak{I}\neq\emptyset},\ X_i\subseteq S \ \Rightarrow\ \overline{\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} X_i} \ \subseteq\ \bigcap_{i\in\mathfrak{I}} \overline{X_i}$;

<u>DIM</u>: $\forall i\in\mathfrak{I},\ X_i \supseteq \bigcap_{i\in\mathfrak{I}} X_i \ \Rightarrow\ \overline{X_i}\supseteq\overline{\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} X_i} \ \Rightarrow\ \bigcap_{i\in\mathfrak{I}}\overline{X_i}\supseteq\overline{\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} X_i}$ c.v.d.

(1.11) $\{X_i\}_{i\in\mathfrak{I}\neq\emptyset},\ X_i\subseteq S \ \Rightarrow\ \overline{\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i} \ \supseteq\ \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \overline{X_i}$;

<u>DIM</u>: $\forall i\in\mathfrak{I},\ X_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i \ \Rightarrow\ \overline{X_i}\subseteq\overline{\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i} \ \Rightarrow\ \bigcup_{i\in\mathfrak{I}}\overline{X_i}\subseteq\overline{\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} X_i}$ c.v.d.

Si noti che nelle (1.10) e (1.11), in genere non vale il segno di uguaglianza.

<u>DEF</u>.3.- Sia $X\subseteq S$. Diremo che:

X e' **indipendente** $\Leftrightarrow \left[\ \forall x\in X \Rightarrow x\notin \overline{X-\{x\}}\ \right]$;

X e' **dipendente** $\Leftrightarrow \left[\ \exists x\in X : x\in \overline{X-\{x\}}\ \right]$;

X e' generatore di S $\Leftrightarrow$ $\bar{X} = S$;

X e' una base di S $\Leftrightarrow$ $[\bar{X} = S$ e X e' indipendente$]$.

Proviamo che:

(1.12) **se X e' dipendente, $X \subseteq Y$ $\Rightarrow$ Y e' dipendente;**

<u>DIM</u>. $\exists x \in X : x \in \overline{X-\{x\}} \subseteq \overline{Y-\{x\}} \Rightarrow \exists x \in Y : x \in \overline{Y-\{x\}}$ c.v.d.

Per contrapposizione, si ha che:

(1.13) **se X e' indipendente, $Y \subseteq X$ $\Rightarrow$ Y e' indipendente.**

<u>DEF</u>.4.- Diremo che $(S,\mathbf{C})$ e' **finitamente generato** se esiste un insieme di generatori finito, cioe' se $\exists$ X = $= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tale che $\bar{X} = S$.

Proviamo che:

(1.14) **se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e' un insieme di generatori finito di $(S,\mathbf{C})$, allora $\exists\, B \subseteq X$, B indipendente, tale che $\bar{B} = S$, cioe' esiste una base finita di S costituita di elementi di X.**

<u>DIM</u>. Se X e' costituito di punti indipendenti, X stesso e' una base per S. Altrimenti X e' dipendente, cioe':

$\exists\ x_i \in X \quad : \quad x_i \in \overline{X-\{x_i\}} \quad \Rightarrow \quad \{x_1, x_2, \ldots x_i \ldots, x_n\} \subseteq$

$\subseteq \overline{\{x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}} \Rightarrow$ (chiudendo ambo i membri) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad S = \overline{\{x_1, x_2, \ldots x_i \ldots, x_n\}} \quad \subseteq \quad \overline{\overline{\{x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}}} \quad =$

$= \overline{\{x_1, x_2, .. x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\}} \subseteq S \Rightarrow S = \overline{\{x_1, x_2, .. x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\}}$

da cui segue che $\{x_1, x_2, .. x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n\}$ e' un insieme di generatori di S. Tale insieme o e' indipendente, oppure e' dipendente, ma in ogni caso reiterando il ragionamento, dopo un numero finito di passi si trova un insieme di punti di X indipendenti, la cui chiusura e' S. c.v.d.

Dalla <u>DEF</u>.4. e dalla (1.14), si ha che:

(1.15) **(S,C) e' finitamente generato $\Leftrightarrow$ esiste una base finita.**

Osserviamo che in generale (S,C) puo' avere basi di cardinalita' diverse. Inoltre se (S,C) non e' finitamente generato, esso puo' non ammettere basi. Per esempio, i chiusi della topologia naturale sull' asse reale costituiscono un sistema di chiusura che non ammette basi, come si prova facilmente.

Sia ora $T \subseteq S$. Consideriamo la famiglia C_T di parti di T definita da:

(1.16) $$C_T = \{T \cap C : C \subseteq C\}$$

Si prova facilmente che C_T e' un sistema di chiusura per

T e quindi $(T,\mathcal{C}_T)$ e' uno spazio di chiusura che prende il nome di sottospazio di $(S,\mathcal{C})$. Se $T\in C$, allora $\mathcal{C}_T$ e' costituito da tutti i chiusi di $(S,\mathcal{C})$ contenuti in T. In questo caso diremo che il sottospazio $(T,\mathcal{C}_T)$ e' **immerso** in $(S,\mathcal{C})$, mentre se T non e' un chiuso di $(S,\mathcal{C})$, gli elementi di $\mathcal{C}_T$ non sono in generale chiusi ed allora diremo che il sottospazio $(T,\mathcal{C}_T)$ e' **sub-immerso** in $(S,\mathcal{C})$.

Sia $(T,\mathcal{C}_T)$ un sottospazio di $(S,\mathcal{C})$. Se $X\subseteq T$, ha senso considerare la chiusura di X nel sottospazio $(T,\mathcal{C}_T)$, chiusura che denoteremo con $\overline{X}^T$. Esso e' l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathcal{C}_T$ contenenti X. Inoltre e' definito $\overline{X}$, chiusura di X in $(S,\mathcal{C})$. Proviamo che:

(1.17) $$\overline{X}^T = T\cap\overline{X}$$

<u>DIM</u>. $$\overline{X}^T = \bigcap_{X\subseteq C\in\mathcal{C}} (T\cap C) = T \cap \Big(\bigcap_{X\subseteq C\in\mathcal{C}} C \Big) = T\cap\overline{X} \quad \text{c.v.d.}$$

<u>DEF</u>.5.- Uno spazio di chiusura $(S,\mathcal{C})$ si dira' **geometrico**, se:

(1.18) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(1.19) $\forall x\in S,\ \overline{\{x\}} = \{x\}$,

cioe' se $\emptyset$ e' un chiuso e se ogni punto e' chiuso. Per esempio uno spazio topologico T_1, rispetto ai suoi chiusi e' uno spazio di chiusura geometrico.

2.- <u>Spazi di chiusura matroidali</u>.

<u>DEF</u>.1.- Diremo che uno spazio di chiusura $(S,\mathcal{C})$ e' **matroidale**, se in esso vale il seguente assioma, detto **assioma dello scambio**:

(σ) $\forall X\subseteq S,\ \forall x,y \in S\ :\ x\notin\overline{X},\ x \in \overline{X\cup\{y\}} \ \Rightarrow\ y \in \overline{X\cup\{x\}}$.

Uno spazio di chiusura matroidale $(S,\mathcal{C})$, **finito**, si dira' **matroide**.

Osserviamo che l' assioma **(σ)** e' equivalente al seguente:

($\bar{\sigma}$) $\forall C\in\mathcal{C},\ \forall x,y \in S\ :\ x\notin C,\ x \in \overline{C\cup\{y\}} \ \Rightarrow\ y \in \overline{C\cup\{x\}}$.

Per dimostrare la suddetta equivalenza, premettiamo la seguente proprieta':

(2.1) $\forall X\subseteq S,\ \forall z\in S \ \Rightarrow\ \overline{\overline{X}\cup\{z\}} = \overline{X\cup\{z\}}$

<u>DIM</u>. $\overline{\overline{X}\cup\{z\}} \supseteq \{\overline{X},z\} \supseteq \{X,z\} \Rightarrow \overline{\overline{X}\cup\{z\}} \supseteq X\cup\{z\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (chiudendo ambo i membri) $\Rightarrow$ $\overline{\overline{X}\cup\{z\}} = \overline{\overline{\overline{X}\cup\{z\}}} \supseteq \overline{X\cup\{z\}}$.

D' altra parte si ha che:

$\{\overline{X},z\} \subseteq \overline{X\cup\{z\}} \Rightarrow \overline{X}\cup\{z\} \subseteq \overline{X\cup\{z\}} \Rightarrow$ (chiudendo ambo i i membri) $\Rightarrow$ $\overline{\overline{X}\cup\{z\}} \subseteq \overline{\overline{X\cup\{z\}}} = \overline{X\cup\{z\}}$.

Dalla doppia inclusione dimostrata, segue la (2.1). C.V.D.

Dimostriamo ora che:

(2.2) $\qquad (\sigma) \Leftrightarrow (\bar{\sigma})$

<u>DIM</u>. La $(\sigma) \Rightarrow (\bar{\sigma})$ e' ovvia. Viceversa, a partire da $(\bar{\sigma})$, si ha che, tenendo conto della (2.1):

$$\forall X \subseteq S,\ \forall x,y \in S : x \notin \overline{X} = C,\ x \in \overline{X\cup\{y\}} = \overline{\overline{X}\cup\{y\}} = \overline{C\cup\{y\}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in \overline{C\cup\{x\}} = \overline{\overline{X}\cup\{x\}} = \overline{X\cup\{x\}},$$

cioe' vale σ. La doppia implicazione dimostra l' equivalenza (2.2). C.V.D.

<u>DEF</u>.2.- Uno spazio di chiusura $(S,\mathbb{C})$ si dice **n-matroidale**, se σ vale per tutti gli insiemi $X \subseteq S$, tali che $|X| \leq n$. Evidentemente se $(S,\mathbb{C})$ e' matroidale, esso e' n-matroidale, qualunque sia n.

Da quanto precede si ha ($\forall x, y, z \in S$):

(2.3) $(S,\mathbb{C})$ e' 0-matroidale $\Leftrightarrow$ $\left[x \notin \overline{\emptyset},\ x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow y \in \overline{\{x\}}\right]$;

(2.4) $(S,\mathbb{C})$ e' 1-matroidale $\Leftrightarrow$ $\left[x \notin \overline{\{z\}},\ x \in \overline{\{z,y\}} \Rightarrow y \in \overline{\{z,x\}}\right]$.

Sia $(S,\mathbb{C})$ uno spazio di chiusura 0-matroidale. Nel sottospazio $S-\overline{\emptyset}$, definiamo la seguente relazione ρ:

(2.5) $\qquad \forall x,y \in S-\overline{\emptyset}, \qquad x\,\rho\,y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$.

La ρ cosi' definita e' di equivalenza perche' e' manifestamente riflessiva e transitiva ed e' anche simmetrica, in virtu' della (2.3). Rimane allora definito l' insieme quoziente:

(2.6) $$\mathbf{P} = (S-\bar{\emptyset})/\rho$$

e la proiezione canonica:

(2.7) $$\rho : x \in S-\bar{\emptyset} \mapsto \rho(x) \in \mathbf{P},$$

dove $\rho(x)=\overline{\{x\}}$, le classi di equivalenza essendo formate da tutti gli elementi che hanno la stessa chiusura.

Per ogni $C \in \mathfrak{C}$, si consideri il sottoinsieme di $\mathbf{P}$ dato da: $\rho(C-\bar{\emptyset})$. Rimane cosi' definita in $\mathbf{P}$ la famiglia di parti $\mathfrak{P} = \left\{ \rho(C-\bar{\emptyset}) : C \in \mathfrak{C} \right\}$. Essa e' un sistema di chiusura, in virtu' del fatto che lo e' $\mathfrak{C}$. Lo spazio di chiusura $(\mathbf{P},\mathfrak{P})$ risulta geometrico, nel senso che per esso valgono le (1.18), (1.19), e prende il nome di **proiettivo** associato allo spazio $(S,\mathfrak{C})$. Per questa ragione non e' riduttivo studiare nel seguito gli spazi di chiusura geometrici e quindi nel seguito $(S,\mathfrak{C})$ denotera' sempre uno spazio di chiusura geometrico.

Daremo ora un esempio molto significativo al riguardo.

Sia V uno spazio vettoriale sopra un corpo K. Denotato con $\mathcal{S}$ la famiglia dei suoi sottospazi, $(V,\mathcal{S})$ e' uno spazio di chiusura, il quale risulta matroidale e quindi 0-matroidale. In $(V,\mathcal{S})$ si ha evidentemente:

(2.8) $\quad \overline{\emptyset} = \{0\}; \quad \forall x \in V-\{0\},\ \overline{\{x\}} = \{cx,\ c\in K\}.$

Il proiettivo $(\mathbf{P},\mathcal{P})$ associato a $(V,\mathcal{S})$ risulta <u>lo spazio proiettivo sul corpo K</u>. Se V ha dimensione finita n+1, $(\mathbf{P},\mathcal{P})$ e' lo spazio proiettivo di dimensione n sopra K.

Proviamo che:

<u>TEOREMA I</u>.- **Sia $(S,\mathbf{C})$ uno spazio di chiusura matroidale, X un indipendente di $(S,\mathbf{C})$ ed $y\in S$, tale che $X\cup\{y\}$ sia dipendente. Allora $y\in\overline{X}$.**

<u>DIM</u>. Poiche' $X\cup\{y\}$ e' un dipendente, esiste un suo elemento x che appartiene alla chiusura dei rimanenti. Se $x=y$, si ha l' asserto. Supponiamo che sia allora $x\neq y$, e quindi $x\in X$. Dunque si ha che: $x\in\overline{(X-\{x\})\cup\{y\}}$; d'altra parte risulta anche che: $x\notin\overline{(X-\{x\})}$, perche' X e' un indipendente. Ma allora, per l' assioma dello scambio, dalle due relazioni precedenti si ha che: $y\in\overline{(X-\{x\})\cup\{x\}} = \overline{X}$. c.v.d.

3.- Basi in uno spazio di chiusura, geometrico, matroidale.

Sia (S,C) uno spazio di chiusura geometrico. Proviamo che:

TEOREMA I.- **Sia (S,C) $(n-1)$-matroidale, e ammetta una base B con n elementi. Allora ogni base consta di n elementi ed ogni insieme di n elementi indipendenti costituisce una base.**

DIM. L' asserto e' vero per $n=1$, perche' in tal caso, $|S|=1$, cioe' $S=\{x\}$. Possiamo dunque procedere per induzione rispetto ad n, supponendo cioe' $n\geq 2$, vero l' asserto per $n-1$, e da cio' provarlo per n.

Sia $B=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Essa prende anche il nome di **n-simplesso**. Chiameremo **faccia** di B, opposta all' elemento x_i, la chiusura, Π_i, degli elementi di B diversi da x_i. Evidentemente $x_i\notin\Pi_i$. Cominciamo a provare che:

(3.1) $$\Pi_1\cap\Pi_2 = \overline{\{x_3,x_4,...,x_n\}}.$$

La (3.1) e' ovvia se $n=2$. Supporremo percio' $n\geq 3$. Evidentemente $\Pi_1\cap\Pi_2 \supseteq \overline{\{x_3,x_4,...,x_n\}}$. Se, per assurdo, fosse $\Pi_1\cap\Pi_2 \not\subseteq \overline{\{x_3,x_4,...,x_n\}}$, esisterebbe un $y \in \Pi_1\cap\Pi_2$

tale che:

(3.1.1) $$y \notin \overline{\{x_3, x_4, \dots, x_n\}}.$$

D' altra parte si ha anche che:

(3.1.2) $$y \in \Pi_1 = \overline{\{x_2, x_3, \dots, x_n\}},$$

(3.1.3) $$y \in \Pi_2 = \overline{\{x_1, x_3, \dots, x_n\}};$$

applicando due volte l' assioma dello scambio, dalle (3.1.1), (3.1.2), 3.1.3), si ha che $x_1 \in \overline{\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}}$ e $x_2 \in \overline{\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}}$. Quindi:

$S = \overline{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} \subseteq \overline{\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}} \subseteq S$, e dunque

(3.1.4) $$S = \overline{\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}}.$$

Ma allora, per il Teorema I del n. 2 (tenuto conto che $(S, \mathbb{C})$ e' $(n-1)$-matroidale) e per la (3.1.1), si ha che $\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ e' indipendente e quindi, per la (3.1.4), $\{y, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ e' una base di S. Essa e' costiuita perc' di $n-1$ elementi; tenuto conto che $(S, \mathbb{C})$ e' $(n-1)$-matroidale e quindi anche $(n-2)$-matroidale, per l' induzione ammessa si ha che ogni base di S deve essere costituita da $n-1$ elementi e cio' e' escluso perche' B e' una base con n elementi. L' assurdo prova la (3.1).

In modo analogo si prova che:

(3.2) $$\Pi_{i_1} \cap \Pi_{i_2} \cap \ldots \cap \Pi_{i_m} = \overline{\{x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_n}\}}$$

ove $(i_1, i_2, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots i_n)$ e' una permutazione di $(1, 2, \ldots, n)$, e quindi anche che:

(3.3) $$\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \ldots \cap \Pi_n = \emptyset$$

Proviamo ora che:

(3.4) **Fissati m punti indipendenti $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ di $(S, \mathcal{C})$, con $m \leq n$, esistono m punti di $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, e non e' restrittivo supporre che siano i primi m, tali che $B' = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, x_{m+1}, \ldots x_n\}$ sia ancora una base per $(S, \mathcal{C})$.**

Supponiamo dapprima $m = 1$. Sia $y_1 \in S$; l' insieme $\{y_1\}$ e' un indipendente, perche' $y_1 \notin \overline{\emptyset} = \emptyset$ (essendo $(S, \mathcal{C})$ uno spazio di chiusura geometrico). Il punto y_1, in forza della (3.3), non appartiene allora a nessuna delle facce di B. Non e' restrittivo supporre (pur di scambiare eventualmente gli indici), che

(3.4.1) $$y_1 \notin \Pi_1 = \overline{\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}}.$$

D' altra parte $y_1 \in S = \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$, quindi, per l' assioma dello scambio, (tenuto conto che $|\{x_2, x_3, \ldots, x_{xn}\}| = n-1$), si ha $x_1 \in \overline{\{y_1, x_2, \ldots, x_n\}}$, da cui:

$$B=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subseteq \overline{\{y_1,x_2,\ldots,x_n\}}$$

e quindi $$S=\bar{B} \subseteq \overline{\{y_1,x_2,\ldots,x_n\}} \subseteq S$$

cioe' $$S = \overline{\{y_1,x_2,\ldots,x_n\}}.$$

Da cio' segue l' asserto per $n=1$, essendo i punti $\{y_1,x_2,\ldots,x_n\}$ indipendenti per la (3.4.1) e per il Teorema I del n. 2.

Possiamo allora procedere per induzione rispetto ad m, cioe' supporre $m \geq 2$, l' asserto vero per $m-1$, e dimostrarlo per m. Per l' induzione ammessa, l' insieme

$$B'=\{y_1,y_2,\ldots,y_{m-1},x_m,\ldots,x_n\}$$

e' una base per (S,C). Denoteremo con Π_i' la faccia di B' opposta al punto di indice i. Risulta, per la (3.2):

(3.4.2) $$\Pi_m' \cap \Pi_{m+1}' \cap \ldots \cap \Pi_n' = \overline{\{y_1,y_2,\ldots,y_{m-1}\}}.$$

Poiche' i punti $y_1,y_2,\ldots,y_m$ sono indipendenti, il punto y_m non puo' appartenere al primo membro della (3.4.2). Esiste cioe' almeno una faccia di B' cui y_m non appartiene. Non e' restrittivo supporre, (pur di scambiare gli indici), che:

(3.4.2) $$y_m \notin \Pi_m' = \overline{\{y_1,\ldots,y_{m-1},x_{m+1},\ldots,x_n\}}.$$

D' altra parte risulta anche:

$y_m \in \overline{\{y_1,\ldots,y_{m-1},x_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}}$. Per l'assioma dello scambio allora, (essendo $|\{y_1,\ldots,y_{m-1},x_{m+1},\ldots,x_n\}|=n-1$), si ha:
$$x_m \in \overline{\{y_1,\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}},$$
da cui:
$$B'=\{y_1,\ldots,y_{m-1},x_m,\ldots,x_n\} \subseteq \overline{\{y_1,\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}},$$
e quindi
$$S=\overline{\{y_1,\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}}.$$
Si ha cosi' l' asserto, tenuto conto che i punti $\{y_1,\ldots,y_m,x_{m+1},\ldots,x_n\}$ sono indipendenti per il Teorema I del n. 2 e per la (3.4.2). Si e' cosi' provata la (3.4). Per $m=n$, la (3.4) prova che scelti comunque n punti indipendenti di $(S,\mathcal{C})$, essi costituiscono una base. Da cio' segue che $n+1$ punti distinti di $(S,\mathcal{C})$, sono sempre dipendenti e quindi che il massimo numero di punti indipendenti di $(S,\mathcal{C})$ e' n. D' altra parte una base di $(S,\mathcal{C})$ non puo' avere un numero di punti $\leq n-1$, altrimenti, per l' induzione ammessa, ogni base di $(S,\mathcal{C})$ avrebbe $n-1$ punti, e cio' e' escluso perche' $|B|=n$. Ne segue che ogni base di $(S,\mathcal{C})$ ha esattamente n punti. Si e' cosi' provato il Teorema I. c.v.d.

Proviamo ora che:

TEOREMA II.- Sia $(S,\mathcal{C})$ uno spazio di chiusura geometrico, $(n-1)$-matroidale, che ammetta una base con n elementi. Allora esso e' matroidale.

DIM. Sia $X \subset S$ tale che $\overline{X}$ sia un sottoinsieme proprio di S. Allora ogni sottoinsieme indipendente di X, contiene un numero di elementi minore (strettamente) di n (per il Teorema I). Sia $m(<n)$ il massimo numero di punti indipendenti di X e sia $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ un insieme di punti indipendenti di X. Si ha allora (cfr. Teorema I n. 2):

(3.5) $$\overline{X}=\overline{\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}}.$$

Per ogni $z \in S$, si ha: $X \cup \{z\} \subseteq \overline{X} \cup \{z\} \subseteq \overline{\{x_1,x_2,\ldots,x_m,z\}}$ e quindi:

$$\overline{X \cup \{z\}} \subseteq \overline{\{x_1,x_2,\ldots,x_m,z\}},$$

d' altra parte, evidentemente, $\overline{\{x_1,x_2,\ldots,x_m,z\}} \subseteq \overline{X \cup \{z\}}$.

Ne segue:

(3.6) $$\overline{X \cup \{z\}} = \overline{\{x_1,x_2,\ldots,x_m,z\}}.$$

Si ha, per le (3.5),(3.6), (ove si ponga una prima volta $z=y$ e una seconda volta $z=x$) e per la $(n-1)$-

-matroidalita' di (S,C):

$$\forall X \subseteq S,\ \forall x, y \in S\ :\ x \notin X,\ x \in \overline{X \cup \{y\}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x \notin \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}},\ x \in \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y\}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y \in \overline{\{x_1, x_2, \ldots, x_m, x\}} = \overline{X \cup \{x\}}.$$

Si e' cosi' provato l' assioma dello scambio per (S,C), qualunque sia il sottoinsieme X di S. Da cio' segue l' asserto. c.v.d.

Se (S,C) e' matroidale, si definisce **rango** di (S,C) e lo si denota con rango (S,C), il numero degli elementi di una e quindi di ogni base di (S,C) (cfr. Teorema I).

Proviamo che:

<u>TEOREMA III</u>.- **Sia (S,C) matroidale, di rango n. Siano $\{x_1, \ldots, x_m\}$ m punti indipendenti di S, con $m<n$. Si possono allora determinare in S n-m punti $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$, in modo che $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sia una base per S.**

<u>DIM</u>. Poiche' $m<n$, si ha:

$$\overline{\{x_1, \ldots, x_m\}} \neq S$$

e quindi esiste $x_{m+1} \in S$ tale che:

$$x_{m+1} \notin \overline{\{x_1, \ldots, x_m\}}.$$

Allora, per il Teorema I del n. 2, i punti $x_1, \ldots$

$\ldots, x_m, x_{m+1},$ sono indipendenti. Se essi generano S, l'asserto rimane provato; in caso contrario, procedendo induttivamente, dopo n−m passi, si ha l'asserto. c.v.d.

4.- Rango dei sottospazi e disuguaglianza di Grassmann per uno spazio di chiusura geometrico, matroidale.

Sia $(S,\mathcal{C})$ uno spazio di chiusura geometrico, $(n-1)$-matroidale, che possegga n (≥ 2) punti indipendenti: $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Sia $T\in\mathcal{C}$. Il sottospazio $T=(T,\mathcal{C}_T)$, (cfr. n. 1), risulta $(n-1)$-matroidale. Se quindi esso ammette una base con m elementi, ed e' $m\leq n$, per il Teorema I del n. 3, ogni base di T ha m elementi ed ogni insieme di m elementi indipendenti in T e' una base per T. Diremo allora che T ha **rango m** e **dimensione** m−1 e scriveremo:

(4.1) $$\operatorname{rango} T = m, \quad \dim T = m-1.$$

Sia $\mathscr{S}_n$, $(\subseteq \mathcal{C})$, la famiglia dei sottospazi di $(S,\mathcal{C})$ ciascuno dei quali abbia rango $\leq$ n. Poiche' $(S,\mathcal{C})$ e' geometrico, si ha che:

(4.2) $$\begin{cases} \emptyset \in \mathscr{S}_n ; \ \forall x \in S, \ \{x\} \in \mathscr{S}_n ; \\ \text{rango}\, T = 0 \Leftrightarrow T = \emptyset ; \ \text{rango}\, T = 1 \Leftrightarrow T = \{x\}. \end{cases}$$

Si consideri l' applicazione:

(4.3) $$\rho : T \in \mathscr{S}_n \mapsto \text{rango}\, T \in \{0,1,\dots n\}.$$

Essa e' suriettiva. Infatti, $\forall m \in \{0,1,\dots n\}$, si conside_ ri il sottoinsieme di X dato da $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$; esso risulta un indipendente (perche' tale e' X), onde $\overline{Y} = \overline{\{x_1, x_2, \dots, x_m\}}$ e' un chiuso che ammette una base (data da Y) con m elementi ed e' $m \leq n$. Dunque $\overline{Y} \in \mathscr{S}_n$ e $\text{rango}\, \overline{Y} = m$, cioe' ρ e' suriettiva.

Proviamo ora che:

(4.4) $$U, V \in \mathscr{S}_n, \ U \subseteq V \Rightarrow [\ \text{rango}\, U \leq \text{rango}\, V ; \ \text{rango}\, U = \\ = \text{rango}\, V \Leftrightarrow U = V\ ]$$

<u>DIM</u>. Poniamo $u = \text{rango}\, U$ e $v = \text{rango}\, V$. Sia inoltre $\{x_1, x_2, \dots, x_u\}$ una base per U, onde $\{x_1, x_2, \dots, x_u\}$ e' un indipendente di V (perche' $U \subseteq V$). Per il Teorema III del n. 3, esistono allora $v-u$ punti di V, dati da $\{x_{u+1}, \dots, x_v\}$, tali che $\{x_1, \dots, x_u, x_{u+1}, \dots x_v\}$ costituisce una base per V. Quindi $u \leq v$, il segno di uguaglianza

avendosi se e solo se $\{x_1, x_2, \dots, x_u\}$ e' una base anche per V, cioe' se e solo se $U = \overline{\{x_1, x_2, \dots, x_u\}} = V$. Si ha cosi' l' asserto. c.v.d.

<u>TEOREMA I</u>. - Siano $U, V \in \mathscr{S}_n$ tali che :

(4.5) $$\text{rango}\,U + \text{rango}\,V \leq n.$$

Allora risulta $U \cap V \in \mathscr{S}_n$, $\overline{U \cup V} \in \mathscr{S}_n$ ed inoltre sussiste la seguente disuguaglianza di Grassmann:

(4.6) $$\text{rango}\,U + \text{rango}\,V \geq \text{rango}(U \cap V) + \text{rango}(\overline{U \cup V}).$$

<u>DIM</u>. Poniamo $u = \text{rango}\,U$ e $v = \text{rango}\,V$. Essendo $U, V \in \mathscr{S}_n$, si ha che U e V sono spazi $(n-1)$-matroidali (poiche' lo e' S). Inoltre, ogni sottospazio di U ha rango $\leq u \leq n$, ed ogni sottospazio di V ha rango $\leq v \leq n$. Quindi $U \cap V \in \mathscr{S}_n$ e $\text{rango}(U \cap V) \leq \min[u, v]$. Sia $i = \text{rango}(U \cap V)$ e sia $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ una base per $U \cap V$. Per il Teorema III del n. 3, esiste in U un insieme $Y = \{y_{i+1}, \dots, y_u\}$, tale che $X \cup Y$ sia una base per U. Analogamente esiste in V un insieme $Z = \{z_{i+1}, \dots, z_v\}$, tale che $X \cup Z$ sia una base per V. Si ha allora:

$$\overline{X \cup Y} = U, \qquad \overline{X \cup Z} = V,$$

e quindi $$\overline{U \cup V} \subseteq \overline{X \cup Y \cup Z} \subseteq \overline{U \cup V},$$

da cui $\overline{U \cup V} = \overline{X \cup Y \cup Z}$.

Ne segue che il sottospazio $\overline{U \cup V}$ e' generato dall' insieme $X \cup Y \cup Z$ il quale consta di $i+(u-i)+(v-i)= =u+v-i$ elementi. Quindi $\overline{U \cup V}$ ammette una base costituita di c elementi, con $c \leq u+v-i \leq u+v \leq n$ (in forza della (4.5)). Dunque $\overline{U \cup V} \in \mathscr{S}_n$, ed inoltre:

$$\text{rango}(\overline{U \cup V}) = c \leq u+v-i = \text{rango}U + \text{rango}V - \text{rango}(U \cap V).$$

Da cio' si ha la (4.6). Ne segue l' asserto. c.v.d.

Sia (S,C) uno spazio di chiusura geometrico, matroidale, finitamente generato, che quindi ammette una base finita B (cfr. 1.15). Posto $|B|=n$, poiche' (S,C) e' matroidale , esso e' anche $(n-1)$-matroidale. Da quanto precede si ha allora che:

<u>TEOREMA II</u> - Sia (S,C) uno spazio di chiusura matroidale, finitamente generato, tale quindi da ammettere una base B con $|B|=n$. Allora ogni sot_ tospazio $C \in \mathcal{C}$ e' tale che le sue basi hanno tutte la stessa cardinalita', sia essa m ($\leq n$), e che ogni insieme indipendente di C, con m elementi, e' una base

per C. Dunque, posto $m = \text{rango}\,C$, l' applicazione

(4.7) $\rho : C \in \mathbf{C} \mapsto \text{rango}\,C \in \{0,1,\dots n\}$,

e' suriettiva. Inoltre:

(4.8) $\text{rango}\,C = 0 \Leftrightarrow C = \emptyset$; $\text{rango}\,C = 1 \Leftrightarrow C = \{x\}$, e

(4.9) $\forall\, U, V \in \mathbf{C},\ U \subseteq V \Rightarrow [\ \text{rango}\,U \leq \text{rango}\,V;\ \text{rango}\,U = \text{rango}\,V \Leftrightarrow U = V\ ]$.

Infine:

(4.10) $\forall\, U, V \in \mathbf{C},\ \text{rango}\,U + \text{rango}\,V \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rango}\,U + \text{rango}\,V \geq \text{rango}\,(U \cap V) + \text{rango}\,(\overline{U \cup V})$.

INDICE