Giuseppe Tallini

LEZIONI DI GEOMETRIA III

Spazi dei cerchi e delle sfere. Lo spazio delle coniche e la superficie di Veronese. Teoria delle coniche in un piano di Galois.

Anno Acc. 1977-78

CAPITOLO II

SPAZIO DELLE SFERE

Appunti redatti dalla sig.na Adele Basile

1. - CENNI SULLA TEORIA DELLE QUADRICHE NELLO SPAZIO PROIETTIVO $N_{4,\mathbb{R}}$

Sia $N_{4,\mathbb{R}}$ lo spazio numerico a quattro dimensioni su $\mathbb{R}$. I suoi punti avranno coordinate reali $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Gli spazi subordinati di $N_{4,\mathbb{R}}$ sono le rette, i piani e gli iperpiani (cioè gli S_3).

Ogni iperpiano è il luogo dei punti di $N_{4,\mathbb{R}}$ le cui coordinate soddisfano ad una equazione lineare omogenea in $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ che dicesi equazione dell'iperpiano. Viceversa ogni equazione lineare di tale tipo è l'equazione di un iperpiano. I piani si rappresentano come l'intersezione di due iperpiani distinti (cioè con un sistema di due equazioni lineari), le rette come intersezione di tre iperpiani indipendenti.

In tale spazio proiettivo definiamo una <u>quadrica</u> Q come il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano la più generale equazione omogenea di secondo grado, cioè del tipo:

$$(1.1)\qquad \sum_{i\,j}^{0,1,2,3,4} a_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \qquad\qquad a_{ij} = a_{ji}$$

Ogni retta dello spazio appartiene alla quadrica Q interamente o la interseca in due punti. Se essi sono reali e distinti la <u>retta</u> si dirà <u>secante</u>, se sono coincidenti si dirà <u>tangente</u>, ed <u>esterna</u> qualora essi fossero complessi e coniugati.

Un piano incontra la quadrica in una conica. Un S_3 la incontra in una quadrica dello S_3.

Un punto P della quadrica Q si dice <u>singolare</u> se ogni retta per esso o è tangente in P alla quadrica o appartiene interamente ad essa, cioè se per P non esistono rette secanti Q. Si dimostra subito che i punti singolari di Q costituiscono uno spazio subordinato V di $N_{4,}$, cioè o non ci sono punti singolari o vi è un solo punto singolare, o una retta, o un piano, o un iperpiano di punti singolari. Inoltre se Q è <u>singolare</u> (cioè se ammette punti singolari), allora Q è un <u>cono</u> proiettante da V una quadrica non singolare di uno spazio subordinato sghembo con V. Pertanto, lo studio delle quadriche è ricondotto a quelle non singolari. I coefficienti che compaiono nella (1.1) determinano una matrice simmetrica $A = ((a_{ij}))$.

Le quadriche singolari sono caratterizzate dall'essere det A = 0, i punti singolari essendo tutti e soli quelli che soddisfano il sistema $\sum_{j=0}^{4} a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 0,1,2,3,4)$.

Se det A $\neq$ 0, la quadrica è dunque <u>non singolare</u>. Si consideri un punto P di Q e le rette per P tangenti o che appartengono alla quadrica. Tali rette giacciono su un <u>iperpiano</u> che dicesi <u>tangente</u> in P alla quadrica.

Esso ha equazione:

$$(1.2) \quad 2f(x/y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} y_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} y_4\right) = 0$$

Consideriamo tutte le rette, per un punto y esterno alla Q, tangenti alla quadrica. Otteniamo un cono quadrico circoscritto per y alla quadrica di equazione $f(x/y) - f(x)\,f(y) = 0$. I punti di contatto delle tangenti a Q, stanno su un <u>iperpiano</u> che dicesi <u>polare</u> di P rispetto alla quadrica, la sua equazione è data ancora dalla $f(x/y) = 0$, cioè dalla (1.2). Poichè $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, vale il seguente <u>teorema di reciprocità</u>:

I. <u>Se y appartiene all'iperpiano polare di x rispetto alla quadrica, allora x appartiene allo iperpiano polare di y.</u>

Due punti si diranno <u>reciproci</u> rispetto a Q se l'uno appartiene all'iperpiano polare dell'altro. La corrispondenza <u>punto</u> $\longleftrightarrow$ <u>iperpiano polare</u> è biettiva se det A $\neq$ 0.

Consideriamo un punto y di Q e l'iperpiano τ tangente in y a Q (cioè l'unione delle rette che appartengono a Q o che la incontrano solo in y). Intersecando tale iperpiano τ con la quadrica, otteniamo ancora una quadrica $Q \cap \tau$, ma ogni retta per y di τ incontra la quadrica $Q \cap \tau$ in y solamente o appartiene per intera ad essa. Tale sezione $Q \cap \tau$ deve essere necessariamente un cono quadrico con vertice

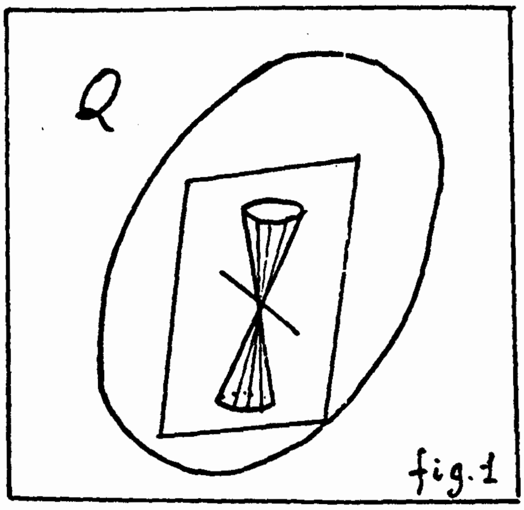

fig.1

in y (cfr. fig.1). Tale cono non può spezzarsi in piani in virtù del fatto che det A $\neq$ 0 (come facilmente si può provare). Se il cono è reale il punto dicesi iperbolico, se invece il cono è immaginario il punto dicesi ellittico. Si prova subito che se un punto è ellittico, ogni altro punto è ellittico, così se un punto è iperbolico ogni altro punto è iperbolico. Nei due casi la quadrica Q si dirà rispettivamente a punti ellittici o a punti iperbolici.

Fissiamo ora un iperpiano $x_0 = o$ come iperpiano improprio, otteniamo così uno spazio affine in cui due rette sono parallele se si incontrano in un punto di $x_0 = o$, e così due piani sono paralleli se si incontrano in una retta di $x_0 = o$ e due iperpiani sono paralleli se si incontrano in un piano di $x_0 = o$. Se la quadrica sezione della quadrica Q con l'iperpiano improprio $x_0 = o$ è a punti immaginari, la Q prende il nome di ellissoide. Se la quadrica sezione con l'iperpiano improprio è a punti reali e non singolare, la Q prende il nome di iperboloide : ellittico, se i punti di Q sono ellittici, iperbolico se i punti di Q sono iperbolici. Se l'iperpiano improprio è tangente alla quadrica e quindi la interseca in un cono, si tratterà di un paraboloide : iperbolico, se il cono è reale, o ellittico se il cono è immaginario.

2. - SPAZIO LINEARE DELLE SFERE

Una sfera di centro (α, β, γ) e raggio r, in $\mathbb{R}^3$ (x, y, z) ha equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2z\gamma + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 = 0 \tag{2.1}$$

Conviene ampliare $\mathbb{R}^3$ con i punti complessi e i punti impropri. Nel seguito pertanto opereremo nello spazio reale complessificato e ampliato con i punti impropri, di coordinate omogenee (x, y, z, t) che sarà denotato con ξ_3.

L'equazione della sfera (2.1) nello spazio ξ_3 è dunque del tipo:

(2.2) $$a_0(x^2+y^2+z^2)+a_1xt+a_2yt+a_3zt+a_4t^2=0$$

Definiscesi <u>sfera</u> nello spazio ξ_3 ogni superficie di equazione (2.2), ossia ogni quadrica di ξ_3 passante per i punti ciclici di ξ_3, cioè per <u>l'assoluto</u> di ξ_3 di equazione: $x^2+y^2+z^2=0$, $t=0$.

Il centro della sfera (2.2), se è $a_0 = 0$, è allora dato da:

(2.3) $$\alpha=-\frac{a_1}{2a_0} \qquad \beta=-\frac{a_2}{2a_0} \qquad \gamma=-\frac{a_3}{2a_0}$$

e il raggio da:

(2.4) $$r = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2-4a_0a_4}{4a_0^2}}$$

relazioni che si ottengono uguagliando la (2.1) con la (2.2).

Al variare degli a_i, nella (2.2), tale equazione rappresenta vari tipi di sfere, come ora precisiamo.

Se è $a_0 = 0$, dalla (2.2) otteniamo

(2.5) $$t\,(a_1x+a_2y+a_3z+a_4t)=0,$$

la sfera degenera quindi nel piano improprio e in un piano reale. E' da notare che si tratta sempre di una sfera, perchè è una quadrica passante per i punti ciclici dello spazio.

A seconda del segno di $a_1^2+a_2^2+a_3^2-4a_0a_4$ distinguiamo tre casi (cfr. (2.4)):

(2.6) $a_1^2+a_2^2+a_3^2-4a_0a_4>0 \Longrightarrow$ <u>r è reale e positivo, perciò la sfera sarà reale</u>

(2.7) $a_1^2+a_2^2+a_3^2-4a_0a_4=0 \Longrightarrow$ <u>r = 0</u>, perciò la sfera ha raggio nullo ed è costituita da un cono che proietta dal centro la conica tutta immaginaria data dall'assoluto, quindi <u>la sfera è il luogo delle rette isotrope dello spazio.</u>

(2.8) $a_1^2+a_2^2+a_3^2-4a_0a_4<0 \Longrightarrow$ <u>r è immaginario, la sfera è priva di punti reali.</u>

<u>FASCIO DI SFERE</u>

Si consideri l'equazione

(2.9) $$b_0(x^2+y^2+z^2)+b_1xt+b_2yt+b_3zt+b_4t^2=0, \text{ con } b_0\neq 0.$$

Facendo una combinazione lineare della (2.2) e della (2.9) con

λ e μ definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nulla, si ottiene una equazione del tipo:

$$(2.10)\quad (\lambda a_0+\mu b_0)(x^2+y^2+z^2)+(\lambda a_1+\mu b_1)x+(\lambda a_2+\mu b_2)y+(\lambda a_3+\mu b_3)z+(\lambda a_4+\mu b_4)=0$$

La (2.10) è l'equazione di una famiglia di sfere che chiamiamo <u>fascio di sfere</u>. Le sfere (2.2) e (2.9) si incontrano in una circonferenza C che appartiene a ogni sfera del fascio. Viceversa, se una sfera contiene C, essa appartiene al fascio. Le sfere del fascio sono, dunque, tutte e solo quelle che passano per la circonferenza C, che prende il nome di circonferenza <u>base</u> del fascio. La circonferenza C, base del fascio, giace su un piano π che è detto <u>piano radicale</u>. Tale piano insieme al piano improprio costituisce l'unica sfera degenere del fascio. Il centro di ogni sfera sta evidentemente sulla retta passante per il centro C e ortogonale a π, che dicesi <u>asse centrale</u> del fascio. Imponendo alla (2.10) di avere raggio nullo, si ottiene:

$$(\lambda a_1+\mu b_1)^2+(\lambda a_2+\mu b_2)^2+(\lambda a_3+\mu b_3)^2-4(\lambda a_0+\mu b_0)(\lambda a_4+\mu b_4)=0$$

da cui si riconosce che nel fascio vi sono esattamente due sfere di raggio nullo, le quali dal punto di vista reale si riducono ciascuna ad un punto (il centro della sfera) sull'asse centrale.

Distinguiamo quattro tipi di fascio:

I - <u>fascio di sfere secanti</u>: se la circonferenza base C è reale (cfr. fig.2);

II - <u>fascio di sfere esterne</u>: se la circonferenza base C è totalmente immaginaria (cfr. fig.3);

III - <u>fascio di sfere tangenti</u>: se la circonferenza base C è di raggio nullo, cioè se le sfere del fascio sono tutte tangenti ad un piano (piano radicale) in un fissato punto P (cfr.fig.4);

IV - <u>fascio di sfere concentriche</u>: se si incontrano nell'assoluto, contato due volte (cfr. fig.5).

Le due sfere a raggio nullo del fascio, hanno centro immaginario nel primo caso; hanno centri reali e distinti nel secondo caso; sono coincidenti nel punto di tangenza nel terzo; sono coincidenti col centro nel quarto.

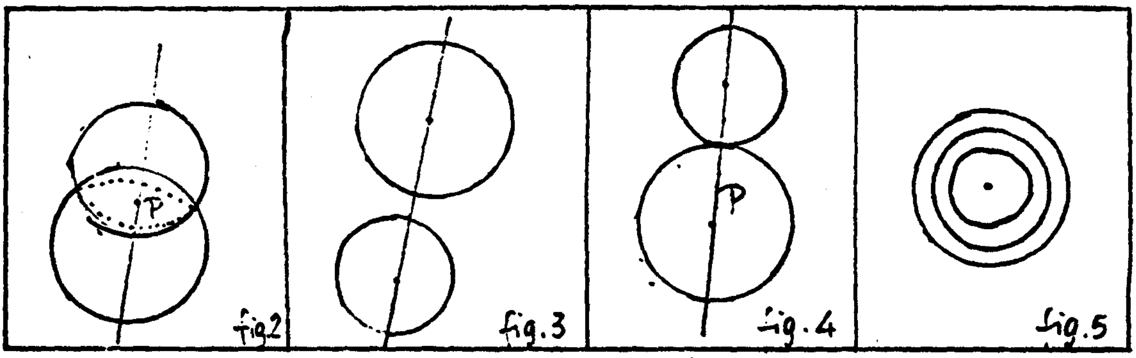

fig.2 fig.3 fig.4 fig.5

RETE DI SFERE

Si considerino tre sfere non formanti fascio e se ne faccia una combinazione lineare con coefficienti omogenei λ, μ e ν, si ottiene una equazione (dipendente linearmente da due parametri essenziali) di una famiglia ∞^2 di sfere che si chiama rete di sfere.

SISTEMA ∞^3 DI SFERE

Si considerino quattro sfere tali che una non appartiene alla rete formata dalle altre tre, e se ne faccia una combinazione lineare, si ottiene un sistema lineare ∞^3 di sfere.

SPAZIO DELLE SFERE

Ciò premesso, si consideri la famiglia $\mathcal{S}$ di tutte le sfere a coefficienti reali dello spazio e l'applicazione K che fa corrispondere alla sfera S di equazione (2.2) la quintupla omogenea $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ punto dello spazio numerico $N_{4,\mathbb{R}}$:

(2.11) $\quad K: S \in \mathcal{S} \longrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in N_{4,\mathbb{R}}$.

La $K: \mathcal{S} \to N_{4,\mathbb{R}}$ è manifestamente biettiva.

Possiamo considerare perciò lo spazio lineare (cfr. n.1, cap.I) a quattro dimensioni su $\mathbb{R}$:

(2.12) $\quad (\mathcal{S}, K: \mathcal{S} \longrightarrow N_{4,\mathbb{R}} . \{\alpha \circ K\})$

Esso prende il nome di spazio delle sfere.

Mediante la biezione K, $\mathcal{S}$ è strutturato a spazio grafico di dimensione 4. In esso le rette sono le controimmagini di rette di $N_{4,\mathbb{R}}$. In $N_{4,\mathbb{R}}$ una retta la otteniamo con una combinazione lineare di due punti. Dunque in $\mathcal{S}$ una retta è una combinazione lineare di due sfere, cioè un fascio di sfere. Similmente un piano in $\mathcal{S}$ sarà costituito da una combinazione lineare di tre sfere non formanti fascio, cioè da una rete di sfere, e un iperpiano da una combinazione lineare di quattro sfere non formanti rete, cioè da un sistema lineare ∞^3 di sfere.

Le sfere di raggio nullo si rappresentano in $N_{4,\mathbb{R}}$ con i punti, non su $a_o = o$, della quadrica $\mathcal{G}$, di equazione: (cfr. 2.7)

(2.13) $\quad \mathcal{G} : a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 4\, a_0 a_4 = 0$

Denoteremo con $\mathcal{G}_o$ i punti di $\mathcal{G}$ per i quali sia $a_0 \neq 0$. Da quanto precede si ha che, mediante K, i punti reali di $\mathcal{G}_o$ si identificano con i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Le sfere degeneri in un piano reale e nel piano improprio si rappresentano in $N_{4,\mathbb{R}}$ con i punti dell'iperpiano $a_o = 0$. Considerando $N_{4,\mathbb{R}}$ come spazio affine qualora si scelga $a_o = 0$ come iperpiano improprio, la quadrica $\mathcal{G}$ risulta tangente allo iperpiano improprio nel punto C (0, 0, 0, 0, 1), in quanto l'intersezione di $a_o = 0$ con la (2.13) ha equazione $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, $a_o = 0$ e risulta un cono quadrico Γ totalmente immaginario con centro nell'unico punto reale C.

Quindi $\mathcal{G}$ è un paraboloide ellittico con centro in C, polo dello iperpiano improprio.

Studiamo ora le varie sezioni piane di $\mathcal{G}$. Ogni piano α interseca $\mathcal{G}$ in una conica di vario tipo a seconda delle intersezioni della retta impropria di α con $\mathcal{G}$, cioè con Γ. Precisamente, se tale retta impropria non passa per C, i punti comuni ad essa e al cono Γ sono complessi e coniugati, perciò la conica $\alpha \cap \mathcal{G}$ è una ellisse.

Se la retta impropria di α passa per C, i due punti comuni ad essa e a Γ coincidono con C, quindi la conica sezione $\alpha \cap \mathcal{G}$ è tangente alla retta impropria di α in C, cioè è una parabola. Si è così provato che: un piano α interseca $\mathcal{G}$ solo in ellissi e parabole e precisamente in una ellisse se α non passa per C, in una parabola se α passa per C.

Studiamo ora le sezioni di $\mathcal{G}$ con un S_3 . Un S_3 interseca l'iper piano improprio nel piano improprio dell'S_3 . Se tale piano non passa per C, esso segherà il cono Γ in una conica totalmente immaginaria, perciò la quadrica sezione ha all'infinito una conica totalmente immaginaria e quindi è una ellissoide.

Se il piano improprio dell'S_3 passa per C, la sezione di questo con il cono Γ è costituita da due rette complesse coniugate per C.

Dunque, la quadrica sezione di S_3 con $\mathcal{G}$ ha all'infinito una conica spezzata in due rette complesse coniugate e quindi è un paraboloide ellittico di S_3 .

Si è così provato che: le sezioni iperpiane di $\mathcal{G}$ sono ellissoidi e paraboloidi ellittici; precisamente è un ellissoide se l'iperpiano non passa per C, è un paraboloide ellittico se l'iperpiano passa per C.

I quattro tipi di fasci di sfere si ritrovano nel modo seguente come rette di $N_{4,\mathbb{R}}$.

(1) Un fascio di sfere secanti ha due sfere di raggio nullo con centri complessi e coniugati. Esso mediante K si trasforma in una retta che interseca la quadrica $\mathcal{G}$ in due punti complessi coniugati, cioè in una retta esterna a $\mathcal{G}$.

(2) Un fascio di sfere esterne ha due sfere di raggio nullo, a centri reali e distinti. Dunque la retta corrispondente al fascio interseca la quadrica $\mathcal{G}$ in due punti propri reali e distinti, cioè è una retta secante $\mathcal{G}_0$.

(3) Un fascio di sfere tangenti ha due sfere di raggio nullo coincidenti con quella che ha centro nel punto di tangenza delle sfere del fascio. Dunque la retta corrispondente incontra la quadrica $\mathcal{G}$ in un solo punto, cioè è una retta tangente alla quadrica.

(4) Un fascio di sfere concentriche ha una sola sfera di raggio nullo coincidente col centro. La retta corrispondente passa per il centro C (0, 0, 0, 0, 1) di $\mathcal{G}$, cioè è un diametro (infatti

non è restrittivo supporre che il fascio di sfere concentriche abbia centro nell'origine; esso allora avrà equazione:

$$\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right)+\mu=0$$

La retta corrispondente è quindi costituita dai punti di coordinate $(\lambda, 0, 0, 0, \mu)$ cioè è la retta di equazioni $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; tale retta passa per C).

Il paraboloide ha punti esterni e punti interni: i punti esterni (cioè quei punti per cui l'iperpiano polare è secante $\mathcal{B}$), sono tali che $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 4a_0a_4 > 0$; i punti interni (cioè quei punti per cui l'iperpiano polare è esterno a $\mathcal{B}$), sono tali che $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 4 . a_0a_4 < 0$.

Le sfere che hanno raggio reale, in $N_{4,\mathbb{R}}$, vanno perciò in punti esterni alla quadrica $\mathcal{B}$, mentre le sfere a raggio immaginario vanno in punti interni a $\mathcal{B}$, in forza delle relazioni (2.5) e (2.8).

Approfondiremo ora lo studio della rappresentazione delle sfere di raggio nullo. Per ogni punto P di $\mathbb{R}^3$, sia $K^0(P)$ il trasformato mediante K della sfera che ha centro in P e raggio nullo. L'applicazione K^0 così definita:

$$K^0 : P \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow K^0(P) \in \mathcal{B}_0$$

è una biezione tra i punti di $\mathbb{R}^3$ e i punti di $\mathcal{B}_0$; essa identifica $\mathbb{R}^3$ coi punti propri di $\mathcal{B}$.

Sia $S \in \mathcal{S}$, una sfera di raggio reale. Tramite K, S viene trasformata in un punto K (S) proprio di $N_{4,\mathbb{R}}$ ed esterno alla $\mathcal{B}$ (essendo S di raggio reale). Fissato un punto P su S consideriamo il piano tangente a S in P e il fascio di sfere tangenti al piano in P

In $N_{4,\mathbb{R}}$ a tale fascio corrisponde una retta per K (S), tangente a $\mathcal{B}$ nel punto $K^0(P)$ (cfr. fig.6).

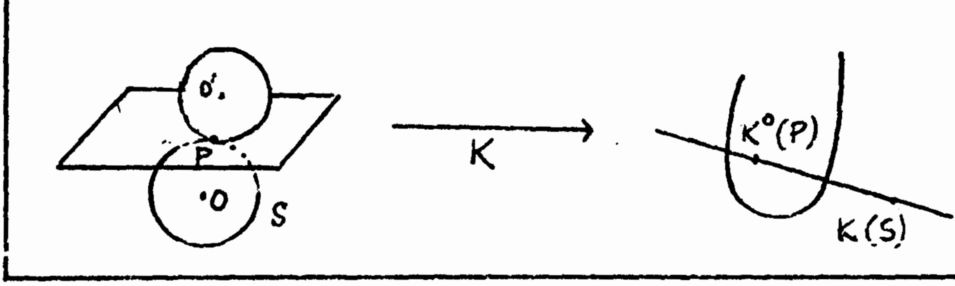

fig. 6

Al variare di P sulla sfera S, anche la tangente al paraboloide per K (S) varia, discrivendo il cono circoscritto alla quadrica $\mathcal{G}$ per il punto K (S). I punti comuni a tale cono e a $\mathcal{G}$ giacciono su di un iperpiano: l'iperpiano polare di K (S) rispetto a $\mathcal{G}$. La sezione di $\mathcal{G}$ con tale iperpiano polare è una quadrica nello spazio a tre dimensioni, i cui punti sono i trasformati dei punti di S mediante K^o. Poichè K (S) è un punto proprio di $N_{4,\mathbb{R}}$, il suo iperpiano polare non passa per C, la quadrica sezione è pertanto un ellissoide $\mathcal{E}$. Se la sfera S ha raggio nullo, è $K(S) \in \mathcal{G}_o$, e quindi l'iperpiano polare risulta quello tangente. Se la sfera S è totalmente immaginaria, K (S) è interno a $\mathcal{G}$, pertanto il suo iperpiano polare è esterno e la quadrica sezione è sempre un ellissoide anche se totalmente immaginario. Pertanto K^o muta sfere di raggio $\neq 0$ di $\mathbb{R}^3$ in ellissoidi di $N_{4,\mathbb{R}}$.

Sia ora S un piano (sfera degenere) di $\mathbb{R}^3$. Allora K (S) è improprio (perchè $a_o = o$), l'iperpiano polare di K (S) rispetto a $\mathcal{G}$ passa dunque per C; la quadrica sezione è quindi un paraboloide. Pertanto un piano di $\mathbb{R}^3$ si trasforma mediante K^o in un parabolide della quadrica $\mathcal{G}$.

Sia ora S una circonferenza. S è data dalla intersezione di due sfere S e S' che sono trasformate da K^o in due ellissoidi. Consideriamo gli iperpiani polari di K (S) e K (S'), essi (avendo dimensione tre) si intersecano (per la formula di Grassmann) in un piano π, tale piano interseca i due ellissoidi nella stessa ellisse.

Pertanto una circonferenza di $\mathbb{R}^3$ si trasforma mediante K^o in una ellisse.

Il fascio di sfere a cui appartengono S e S', viene trasformato mediante K in una retta r di $N_{4,\mathbb{R}}$. Ogni punto di r ha un iperpiano polare, essi costituiscono un fascio passante per il piano π (asse del fascio): tale piano π si dice piano polare della retta r.

Consideriamo una retta s di $\mathbb{R}^3$, essa è data dall'intersezione di due piani (sfere degeneri) di $\mathbb{R}^3$ che mediante K vanno in due punti impropri K (S) e K (S') di $N_{4,\mathbb{R}}$ (appartenenti ad $a_0 = 0$). Tali piani mediante K^o si mutano in due paraboloidi di $\mathcal{G}$ la cui intersezione risulta $K^o(s)$. Gli iperpiani polari di K (S) e K (S') passano per C e si intersecano in un piano passante per C, perciò la sezione di tale piano con il paraboloide è una parabola che passa per C. Pertanto K^o muta rette in parabole.

Consideriamo ora, fissato un punto P di $\mathbb{R}^3$, le sfere di S passanti per P: esse costituiscono un sistema lineare ∞^3 di sfere. Tale sistema è trasformato mediante K in un iperpiano π di $N_{4,\mathbb{R}}$. Ci proponiamo di studiare il comportamento di tale iperpiano π rispetto al paraboloide $\mathcal{G}$. Le sfere di raggio nullo del sistema si riducono all'unica sfera di centro nullo e centro P. Essa mediante K^o viene trasformata in un punto del paraboloide $\mathcal{G}$, quindi l'iperpiano π è tangente al paraboloide $\mathcal{G}$ nel punto $P' = K^o(P)$, (in quanto π ha in comune con $\mathcal{G}$ l'unico punto reale $P' = K^o(P)$). Diamo un'altra dimostrazione, più espressiva, di quanto ora provato. Consideriamo, nel sistema lineare ∞^3 di sfere per P di $\mathbb{R}^3$, una sfera S per P e il piano tangente τ ad S in P. Il fascio di sfere tangenti a τ in P, a cui appartiene la sfera S e quella di raggio nullo con centro in P, viene trasformato mediante K in una retta tangente al paraboloide $\mathcal{G}$ in $P' = K^o(P)$ e passante per K (S). Al variare di S, le rette tangenti in P' a $\mathcal{G}$ descrivono l'iperpiano tangente in P' alla quadrica $\mathcal{G}$.

Viceversa, un iperpiano tangente in $P' = K^o(P)$ a $\mathcal{G}$ proviene da un sistema lineare ∞^3 di sfere per P.

3. - ORTOGONALITA' TRA SFERE

Osserviamo che una similitudine dello spazio $\mathbb{R}^3$ muta rette in rett[e], circonferenze in circonferenze, sfere in sfere, fasci di sfere in fasci di sfere e così via. Corrispondentemente allora, una similitudine dello spazio si muta in $N_{4,\mathbb{R}}$ in una omografia (trasformazione lineare) che muta l'iperpiano improprio in sé, la quadrica $\mathcal{G}$ in sé, oltre a mutare piani in piani e rette in rette. Quindi una similitudine si muta in un'affinità di $N_{4,\mathbb{R}}$ che muta la quadrica $\mathcal{G}$ in sé.

Viceversa, una qualsiasi affinità di $N_{4,\mathbb{R}}$ che muta $\mathcal{C}$ in sé, proviene nel modo anzidetto da una similitudine dello spazio.

Ne segue che il gruppo delle similitudini di $\mathbb{R}^3$ si muta nel gruppo delle affinità di $N_{4,\mathbb{R}}$ che mutano $\mathcal{C}$ in sé.

Due sfere S e S' si dicono <u>ortogonali</u> se, per ogni punto P della circonferenza in cui si incontrano, il piano tangente in P a S è ortogonale al piano tangente in P a S', onde il piano tangente in P a S passa per O' (centro di S'). Evidentemente perchè S e S' siano ortogonali, basta che la condizione precedente sia verificata per un solo punto P comune a S e S'. Proviamo che:

I - <u>Se S e S' sono ortogonali, allora K (S) e K (S') sono reciproci rispetto alla quadrica $\mathcal{C}$, ossia K (S') appartiene allo iperpiano polare di K (S).</u>

<u>Dim.</u> Siano S e S' ortogonali. Con una similitudine possiamo fare in modo che S abbia centro in O (origine delle coordinate) e raggio 1, l'asse y passi per i centri O e O' di S e S', in modo tale che la circonferenza $S \cap S'$ sia ortogonale all'asse y (cfr. fig.7).

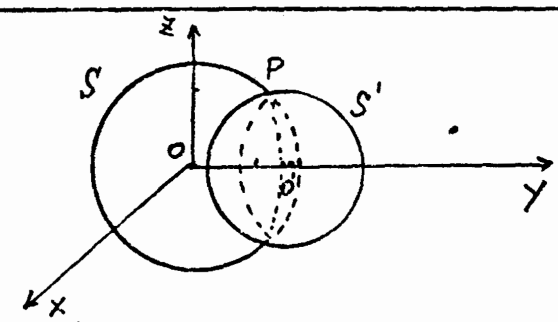

fig. 7

S così ha equazione:

(3.1) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

S' ha come centro $O'(0, h, 0)$ e raggio r, pertanto la sua equazione è:

(3.2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2hy + h^2 - r^2 = 0$

Si ha allora che è $K(S) = (1, 0, 0, 0 - 1)$ e

$K(S') = (1, 0 - 2h, 0, h^2 - r^2)$ (come si vede dai coefficienti del le (3.1) e (3.2). Posto

$$c = \frac{1 + h^2 - r^2}{2h},$$

il punto P $(0, c, \sqrt{1 - c^2})$ appartiene sia a S che a S' (come subito si verifica dalle (3.1) e (3.2)).

Il piano tangente in P a S ha equazione:

$$yc + z\sqrt{1 - c^2} - 1 = 0.$$

Imponiamo che tale piano passi per O', cioè che S sia ortogonale a S' ; si ha che:

$$hc = 1$$

ossia, tenuto conto che $c = \dfrac{1 + h^2 - r^2}{2h}$

(3.3) $\qquad h^2 - r^2 = 1.$

Mostriamo che la (3.3) equivale alla condizione che K (S) e K (S') siano reciproci rispetto a $\mathcal{C}$. L'iperpiano polare di K (S) = = (1, 0, 0, 0 - 1) rispetto a $\mathcal{C}$ ha equazione (cfr. (2.13)):

(3.4) $\qquad a_0 = a_1$

Il punto K (S') = $(1, 0 - 2h, 0, h^2 - r^2)$ appartiene all'iperpiano (3.4) se e solo se è verificata la (3.3), come si voleva dimostrare.

Dalla proposizione I, si ha che la condizione di ortogonalità tra due sfere di equazioni (2.2) e (2.9) risulta la seguente [che si ottiene appunto imponendo che il punto $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ sia reciproco del punto $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ rispetto alla quadrica $\mathcal{C}$].

(3.5) $\qquad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - 2a_4b_0 - 2a_0b_4 = 0.$

Le proprietà grafiche di $N_{4,\mathbb{R}}$ si interpretano come proprietà sulle sfere di $\mathbb{R}^3$, come il lettore può facilmente verificare, in modo analogo a quanto si è fatto per lo spazio dei cerchi.

Il lettore provi a risolvere i seguenti esercizi:

Eserc. 1 - <u>Determinare la sfera passante per il cerchio C: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e ortogonale alla sfera di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$;</u>

Eserc. 2 - <u>Determinare le sfere tangenti al piano z = 0 dandone un'interpretazione geometrica in $N_{4,\mathbb{R}}$ rispetto a $\mathcal{C}$.</u>

Giuseppe Tallini

LEZIONI DI GEOMETRIA III

Spazi dei cerchi e delle sfere. Lo spazio delle coniche e la superficie di Veronese. Teoria delle coniche in un piano di Galois.

Anno Acc. 1977-78