VARIETÀ ALGEBRICHE E SPAZI PARZIALI DI RETTE

GIUSEPPE TALLINI
(*Università di Roma «La Sapienza»*)

1. Introduzione

Scopo del presente lavoro è quello di fornire un'esposizione dei recenti risultati della scuola italiana di geometria combinatoria sulla caratterizzazione di varietà algebriche notevoli come spazi parziali di rette.

Uno spazio parziale di rette è una coppia (S, L), dove S è un insieme non vuoto i cui elementi chiameremo punti ed L è un sottoinsieme delle parti di S, i cui elementi diremo rette, tale che ogni retta abbia almeno due punti, L sia un ricoprimento di S e per due punti distinti passi al più una retta. Tale definizione è molto generale: per esempio ogni grafo semplice è uno spazio parziale di rette. Per questa ragione ha interesse imporre ad esso opportuni assiomi per sviluppare fruttifere teorie.

Ogni varietà algebrica rigata, sia affine che proiettiva, rispetto alle sue rette, è uno spazio parziale di rette per il qaule valgono opportune proprietà di incidenza. Più precisamente si presenta la questione di esaminare come queste varietà algebriche possano venir caratterizzate come spazi parziali di rette soddisfacenti dati assiomi, cioè come uno spazio parziale di retta dotato di assiomi opportuni coincida, a meno di isomorfismi, con la varietà di partenza, intesa quale spazio di rette con i dati assiomi.

Un esame attento delle proprietà geometriche di cui gode la varietà in esame suggerisce il tipo di assiomi da imporre allo spazio parziale di rette. Il punto di vista della presente trattazione è appunto il suddetto.

Di fatto questo approccio porta a cartterizzare le varietà di Grassmann (nn. 3 e 4), le varietà prodotto di Segre (n. 5), le varietà di Veronese (n. 6) e le varietà di Schubert (n. 7).

Inoltre, poichè un grafo è uno spazio parziale di rette, le suddette caratterizzazion forniscono anche caratterizzazioni dal punto di vista della teoria dei grafi.

2. SPAZI PARZIALI DI RETTE: DEFINIZIONI E NOTAZIONI

Uno *spazio parziale di rette;* in breve un PLS (partial line space), è una coppia (S, L), ove S è un insieme non vuoto e L è una famiglia propria di parti di S, tali che:

(2.1) per ogni $\ell \in L$, $|\ell| \geqslant 2$;

(2.2) L è un ricoprimento di S,

(2.3) $\ell, \ell' \in L$, $\ell \neq \ell' \Rightarrow |\ell \cap \ell'| \leqslant 1$.

Gli elementi di S saranno detti punti, quelli di L rette. Per la (2.3) per due punti qualsiasi x ed y passa al più una retta; x ed y sono detti *congiungibili,* $x \sim y$, se esiste la retta xy per essi; altrimenti x, y sono detti *incongiungibili,* $x \nsim y$. Se due qualsiasi punti di (S, L) sono congiungibili, allora (S, L) si dirà *spazio di rette,* altrimenti (S, L) si dirà uno spazio parziale di rette *proprio,* PPLS . Uno spazio parziale di rette (S, L) si dirà *irriducibile* se ogni retta contiene almeno tre punti.

Un *isomorfismo* fra due spazi parziali di rette (S, L) e (S', L') è una biezione $f: S \to S'$ che muta rette in rette insieme con la sua inversa. Lo studio dei PLS viene fatto a meno di isomorfismi, cioè due spazi isomorfi verranno identificati. Il gruppo degli automorfismi di (S, L) in sè verrà denotato $\mathrm{Aut}(S, L)$.

Sia (S, L) un PLS . Un sottoinsieme T di S è detto un *sottospazio* di (S, L) se

(2.4) $x, y \in T$, $x \neq y \Rightarrow x \sim y$ ed $xy \subset T$.

Se $|T| \geqslant 2$, denotiamo con L_T l'insieme delle rette di L contenute in T, allora (T, L_T) è uno spazio di rette. Sia C_T la famiglia dei sottospazi di (S, L) contenuti in T, cioè la famiglia di sottospazi di (T, L_T) . Allora si ha:

$$(2.5)\quad \begin{cases} \phi \in C_T \;;\; \forall x \in T \;,\; \{x\} \in C_T \;;\; L_T \subset C_T \;. \\ C_T \text{ è un sistema di chiusura per } T \;. \end{cases}$$

Perciò C_T definisce un operatore di chiusura in T. Ne consegue che in T rimangono definiti gli insiemi indipendenti, i generatori e le basi. Precisamente X è un sottoinsieme indipendente di T, se per ogni x di X, $x \notin \overline{X - \{x\}}$; X è un generatore, se $\overline{X} = T$; X è una base di T, se è un generatore indipendente.

(S, L) si dirà di *rango finito,* r, se per ogni base B di qualunque suo sottospazio si ha $|B| \leqslant r$ ed esiste un sottospazio T avente una base con r elementi.

Se per un qualunque sottospazio T di (S, L) vale il seguente assioma di scambio:

$$(2.6)\qquad X \subset S,\; x, y \in S \;;\; y \notin \overline{X} \;,\; y \in \overline{X \cup \{x\}} \Rightarrow x \in \overline{X \cup \{y\}} \;,$$

allora (S, L) si dirà un PLS *combinatorio*

Si prova che se (S, L) è un PLS combinatorio di rango finito tutte le basi di un qualunque sottospazio T hanno la stessa cardinalità, il rango di T. Inoltre se T_1 e T_2 sono sottospazi di T, si ha:

$$(2.7)\qquad \text{rango}\, T_1 + \text{rango}\, T_2 \geqslant \text{rango}\,(T_1 \cap T_2) + \text{rango}\,(\overline{T_1 \cup T_2}).$$

Sia (S, L) un PLS proprio. Un sottospazio M è un sottospazio *massimale,* se non esiste alcun sottospazio in cui M sia contenuto propriamente. Per mezzo del lemma di Zorn, si prova che ogni sottospazio è contenuto in almeno un sottospazio massimale; perciò i sottospazi massimali formano un ricoprimento di S. Se un qualsiasi sottospazio massimale è uno spazio proiettivo, il che accade se, e soltanto se, vale l'assioma di Veblen (cioè se dati due qualsiasi rette sghembe ℓ ed ℓ' ed un qualsiasi punto P non su di esse esiste al più una retta per P che incontra ℓ ed ℓ'), allora (S, L) si dice un PLS *proiettivo*. In tal caso nella (2.7) vale il segno di uguaglianza.

Una *poligonale* in (S, L) è una m.pla di rette distinte $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ldots, \ell_m)$ tale che $\ell_i \cap \ell_{i+1} \neq \phi$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$. La poligonale sarà *chiusa*, ovvero *aperta*, a seconda che $\ell_1 \cap \ell_m \neq \phi$, ovvero $\ell_1 \cap \ell_m = \phi$. (S, L) si dirà *connesso*, se per ogni $x, y \in S$ esiste una poligonale per x ad y. Se (S, L) non è connesso, la relazione ρ definita da:

(2.8) $\quad x, y \in S$, $x \rho y \Leftrightarrow$ esiste una poligonale per x ad y,

è una relazione d'equivalenza in S. Data una qualsiasi classe di equivalenza S_i, $i \in I$, sia L_i l'insieme delle rette di L contenute in S_i; poichè $L = \cup\ (L_i : i \in I)$ e $L_i \cap L_j = \phi$, $i \neq j$, (S_i, L_i) è un PLS connesso, $i \in I$, che sarà detto componente connessa di (S, L). Perciò ogni (S, L) o è connesso, ovvero può esser data una sua partizione in componenti connesse, pertanto lo studio dei PLS può esser svolto limitandosi a quelli connessi.

Nel seguito saranno usate le seguenti notazioni per un PLS (S, L). Per $p \in S$ ed $\ell \in L$,

(2.9) $\quad p \sim \ell$ (cioè p congiungibile con ℓ) ogni punto di ℓ è congiungibile con p ;

(2.10) $\quad p \nsim \ell$ (negazione di $p \sim \ell$) esiste qualche punto di ℓ non congiungibile con p ;

(2.11) $\quad p \not\approx \ell$ (cioè p incongiungibile con ℓ) non esistono punti di ℓ congiungibili con p ;

(2.12) $\quad p \dashv \ell$ esiste uno ed un sol punto q su ℓ tale che $p \sim q$;

(2.13) $\quad p, q, t \in S$, $q \underset{p}{\not\approx} t$ se, e solo se, o $q \sim p \sim t$ ovvero $q \nsim p \nsim t$.

(2.14) $\quad \ell, \ell' \in L$, $\ell \sim \ell'$ se, e solo se, per ogni $p \in \ell$ e $p' \in \ell'$ risulta $p \sim p'$.

3. UNA CARATTERIZZAZIONE DELLA VARIETA' DI GRASSMANN RAPPRESENTANTE LE RETTE DI UNO SPAZIO PROIETTIVO

E' ben noto che le rette di $P_{n,K}$, spazio proiettivo n-dimensionale sopra il campo K , possono essere rappresentate iniettivamente come punti di $P_{N,K}$, ove $N = n(n+1)/2 - 1$. Inoltre tali punti costituiscono una varietà algebrica G, intersezione di opportune quadriche, detta la varietà di Grassmann rappresentativa delle rette di $P_{n,K}$. Denotato con R la famiglia delle rette di $P_{n,K}$ sia $\rho : R \to G$ la suddetta rappresentazione. Sia S l'insieme dei punti di G e L l'insieme delle rette di $P_{N,K}$ appartenenti a G; la coppia $G = (S, L)$ è un PLS e ρ induce una biezione fra i fasci di rette di $P_{n,K}$ e le rette di L . Inoltre i sottospazi di G sono spazi proiettivi e i sottospazi massimali possono esser ripartiti in due famiglie $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$. Gli elementi di $\mathcal{S}$ sono spazi $(n$-$1)$-dimensionali provenienti mediante ρ dalle stelle di rette di $P_{n,K}$ (una stella di rette essendo l'insieme di tutte le rette per un punto). Gli elementi di $\mathcal{P}$ sono piani proiettivi provenienti mediante ρ dai piani rigati, cioè i piani considerati come insiemi delle loro rette in $P_{n,K}$. E' facile verificare che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ soddisfano alle seguenti condizioni:

(α) Ogni terna di punti due a due congiungibili di $G = (S, L)$ appartengono ad uno stesso sottospazio.

(i) $T, T' \in \mathcal{S}$, $T \neq T'$ implicano $|T \cap T'| = 1$.

(ii) $T \in \mathcal{S}$, $\pi \in \mathcal{P}$ implicano o $T \cap \pi = \phi$, ovvero $T \cap \pi \in L$.

(iii) Per ogni $\ell \in L$, esistono un unico $T \in \mathcal{S}$ e un unico $\pi \in \mathcal{P}$ tali che $\ell \subset T \cap \pi$.

Osservazione. Sia P uno spazio proiettivo di dimensione maggiore di due e supponiamo che $\boldsymbol{P}$ non sia coordinatizzabile sopra un campo. Ancora a $\boldsymbol{P}$ si può associare lo spazio parziale di rette $G(\boldsymbol{P})=(S(\boldsymbol{P}), L(\boldsymbol{P}))$ i cui punti son le rette di $\boldsymbol{P}$ e le cui rette sono i fasci di rette in $\boldsymbol{P}$. E' facile provare che i sottospazi massimali di $G(\boldsymbol{P})$ sono ancora ripartiti in due famiglie $\mathscr{S}(\boldsymbol{P})$ e $\mathscr{P}(\boldsymbol{P})$ soddisfacenti (α), (i), (ii) e (iii). Ovviamente, se $\boldsymbol{P}$ può coordinatizzarsi sopra un campo, tale costruzione fornisce la struttura d'incidenza di punti e rette sulla varietà di Grassmann delle rette di $\boldsymbol{P}$.

In [22] G. Tallini ha dimostrato che (α), (i), (ii) e (iii) caratterizzano i PLS del tipo $G(\boldsymbol{P})$. Cioè precisamente egli ha provato il seguente teorema.

I. *Sia* (S, L) *un* PLS *per cui volgono le proprietà seguenti:*

P.1. *Ogni terna di punti due a due congiungibili appartiene a un sottospazio.*

P.2. *Nessuna retta è un sottospazio massimale e l'insieme dei sottospazi massimali di* (S, L) *può essere ripartito in due famiglie* $\mathscr{S}$ *e* $\mathscr{P}$ *tali che:*

(i) $T, T' \in \mathscr{S}, T \neq T'$ *implicano* $|T \cap T'| = 1$;

(ii) $T \in \mathscr{S}$, $\pi \in \mathscr{P}$ *implicano o* $T \cap \pi = \phi$, *ovvero* $T \cap \pi \in L$

(iii) *per ogni* $\ell \in L$, *esistono un unico* $T \in \mathscr{S}$ *e un unico* $\pi \in \mathscr{P}$ *tali che* $\ell \subset T \cap \pi$.

Sotto queste ipotesi, esiste uno spazio proiettivo $\boldsymbol{P}$ *di dimensione almeno tre, tale che* (S, L) *è isomorfo a* $G(\boldsymbol{P})=(S(\boldsymbol{P}), L(\boldsymbol{P}))$.

In particolare, se (S, L) è un PLS finito e irriducibile, esso è isomorfo alla varietà di Grassmann rappresentante le rette di uno spazio di Galois $PG(n, q)$. Se (S, L) è un grafo nel qual caso la P.1 vale sempre, allora il PLS è isomorfo al "line graph" di un grafo completo.

Proveremo ora il suddetto teorema. Per ogni $p \in S$, poichè L è un ricoprimento di S, esiste una retta $r \in L$ per p. Ma allora per (iii), esiste un $\pi \in \mathscr{P}$ per r e quindi per p; sarà $\pi \neq r$ (perchè r non è massimale), onde esistono due rette distinti per p, di π e quindi per la (iii) esistono due elementi di $\mathscr{S}$ per p, necessariamente distinti per la (ii). Pertanto per ogni $p \in S$ passano almeno due elementi *distinti* di $\mathscr{S}$. Sia ℓ_p l'insieme degli elementi di $\mathscr{S}$ passanti per p; sarà $|\ell_p| \geqslant 2$. Nell'insieme $\mathscr{S}$ si consideri la famiglia di parti

(3.1) $\mathfrak{A} = \{\ell_p\}_{p \in S}$;

essa è propria, per (iii). La coppia $(\mathscr{S}, \mathfrak{A})$ è uno spazio di rette, in forza di (i).

Proviamo che:

(3.2) *ogni* $\pi \in \mathscr{P}$ *è un piano proiettivo.*

cioè che due rette di π si incontrano in un punto. Ragionando per assurdo, supponiamo che in π esistano due rette r_1 ed r_2, tali che $r_1 \cap r_2 = \phi$. Siano T_1 e T_2 gli elementi di $\mathscr{S}$ contenenti rispettivamente r_1 ed r_2 (esistenti per la (iii)). Per (i), T_1 e T_2 si incontrano in un punto p, che non può appartenere a π (altrimenti $r_1 \cap r_2 = \{p\}$). Siano $p_1 \in r_1$ e $p_2 \in r_2$; i punti p_1, p_2 e p sono distinti e due a due congiungibili (in quanto $p_1, p_2 \in \pi$; $p_1, p \in T_1$; $p_2, p \in T_2$), quindi (cfr. P.1) esiste un sottospazio contenente p_1, p_2, p. Sia τ un massimale contenente tale sottospazio; esso (cfr. P.2) deve appartenere o a $\mathscr{S}$ oppure a $\mathscr{P}$ ma non può appartenere a $\mathscr{S}$ in quanto ha in comune con $T_1 \in \mathscr{S}$ la retta pp_1 e quindi, se $\tau \in \mathscr{S}$ per (i), si avrebbe $\tau = T_1$, onde $p_2 \in T_1$ e, dato che $T_1 \cap \pi = r_1$, cfr. (ii), si avrebbe $p_2 \in r_1 \cap r_2$, mentre è $r_1 \cap r_2 = \phi$); pertanto $\tau \in \mathscr{P}$. Ma allora per la retta $p_1 p_2$ passerebbero due elementi di $\mathscr{P}$ distinti (dati da π e τ) e ciò contrasta con (iii). L'assurdo prova l'asserto.

Siano ora T_1, T_2, T_3 tre elementi distinti ed indipendenti di $(S, \mathfrak{A})$, cioè tre elementi di $\mathscr{S}$ che si incontrino due a due in punti distinti. Siano $p_1 = T_2 \cap T_3$, $p_2 = T_3 \cap T_1$, $p_3 = T_1 \cap$

$\cap T_2$ (cfr (i)). I punti p_1, p_2 (appartenendo a T_3) sono congiungibili, esiste cioè la retta $p_1 p_2$ in (S, L); analogamente, esistono le rette $p_2 p_3$ e $p_3 p_1$. In forza dell'assioma P.1, i punti p_1, p_2, p_3, appartengono ad un sottospazio di (S, L) e quindi ad un massimale τ, il quale non può appartenere a $\mathscr{S}$ (in quanto, essendo $p_3 \in \tau$ e $p_3 \notin T_3$, è $\tau \neq T_3$ e τ e T_3 hanno la retta $p_1 p_3$ in comune, mentre due elementi distinti di $\mathscr{S}$ si incontrano solamente in un punto per (i)), onde $\tau \in \mathscr{P}$ e quindi esso è un piano proiettivo per la (3.2). Si consideri l'insieme α costituito dagli elementi di $\mathscr{S}$ che incontrano τ ciascuno in una retta; esso contiene T_1, T_2, T_3; inoltre è un piano proiettivo in $(S, \mathfrak{R})$ (infatti due elementi distinti T, T' di α appartengono ad un solo elemento ℓ_p ($\in \mathfrak{R}$) tutto contenuto in α, ove p è il punto di intersezione delle rette $r = T \cap \tau$ ed $r' = T' \cap \tau$, in forza di (ii); inoltre se ℓ_p ed $\ell_{p'}$ sono elementi distinti di $\mathfrak{R}$ contenuti in α, si ha che $p, p' \in \tau$, onde per la retta pp' di τ passa uno ed uno solo elemento di α comune ad ℓ_p ed $\ell_{p'}$ per (iii)). Ne segue che in $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ lo spazio congiungente T_1, T_2, T_3 è un piano proiettivo (dato da α). Pertanto $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ è uno spazio proiettivo.

L'applicazione $p \in S \to \ell_p \in \mathfrak{R}$ è biettiva; sia

(3.3) $\rho : \ell_p \in \mathfrak{R} \to p \in S$

la biezione inversa di $p \in S \to \ell_p \in \mathfrak{R}$. Evidentemente ρ muta ogni retta della stella di centro $T \in \mathscr{S}$ in $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ in un punto dello spazio T di (S, L), ponendo una biezione fra le rette della stella ed i punti di T, e ciò per ogni T di $\mathscr{S}$.

Proviamo che:

(3.4) *ρ muta le rette di un piano rigato di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ nei punti di un piano $\pi \in \mathscr{P}$, inducendo un isomorfismo fra essi. Viceversa, per ogni $\pi \in \mathscr{P}$, si ha che $\rho^{-1}(\pi)$ è un piano rigato di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$.*

Sia α un piano di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ e siano T_1, T_2, T_3 tre suoi punti indipendenti. Essi sono tre sottospazi di (S, L) (elementi di $\mathscr{S}$) a due a due incidenti in punti distinti ed indipendenti $p_1 = T_2 \cap T_3$, $p_2 = T_3 \cap T_1$, $p_3 = T_1 \cap T_2$.

Poichè i punti p_1, p_2, p_3 sono a due a due congiungibili, esiste in (S, L) un sottospazio massimale per essi, π (cfr. P.1), che è necessariamente un elemento di $\mathscr{P}$ (cfr. (i)). L'insieme dei sottospazi $T \in \mathscr{S}$ che intersecano π in rette risulta in $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ un piano contenente T_1, T_2, T_3, cioè coincide con il piano α. Ogni retta ℓ_p di α è dunque costituita da tutti gli elementi di $\mathscr{S}$ che incontrano π nelle rette del fascio di centro nel punto p di π. Pertanto ρ muta ogni retta ℓ_p di α nel punto p di π, e viceversa. Ne segue l'asserto.

Dato che ρ trasforma una stella rette in un sottospazio $T \in \mathscr{S}$ ed un piano rigato in un sottospazio $\pi \in \mathscr{P}$, si ha che:

(3.5) *ρ muta un fascio di rette di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ in una retta di (S, L). Viceversa, per ogni $r \in L$, $\rho^{-1}(r)$ è un fascio di rette di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$.*

Ne segue che ρ induce un isomorfismo tra una stella di rette di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ di centro $T \in \mathscr{S}$, strutturata come spazio proiettivo mendiante i fasci di rette, ed il sottospazio T di (S, L), quindi tali sottospazi sono spazi proiettivi. Osserviamo infine che se (S, L) è irriducibile (cioè ogni sua retta ha almeno tre punti), anche $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ è irriducibile, e viceversa.

Concludendo si ha che:

II. *Sia (S, L) uno spazio parziale di rette proprio, soddisfacente agli assiomi* P.1 e P.2. *Allora estistono uno spazio proiettivo $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ ed una biezione $\rho : \mathfrak{R} \to S$ che muta fasci di rette di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ in rette di (S, L), con $\rho^{-1} : S \to \mathfrak{R}$ che muta $T \in \mathscr{S}$ e $\pi \in \mathscr{P}$ in stelle di rette e piani rigati. Infine $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ è irriducibile se, e soltanto se, lo è (S, L). Ne segue che, se $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$ è irriducibile, finitamente generato e pascaliano, allora (S, L) è isomorfo alla varietà grassmanniana delle rette di $(\mathscr{S}, \mathfrak{R})$.*

Ciò prova il teorema 1. Poichè ogni spazio proiettivo irriducibile finito è finitamente generato e pascaliano, dalla proposizione I otteniamo la seguente caratterizzazione della varietà grassmanniana rappresentativa delle rette di uno spazio di Galois.

III. *Ogni spazio parziale di rette proprio, irriducibile, finito, soddisfacente agli assiomi* P.1, P.2, *è isomorfo alla varietà grassmanniana delle rette di uno spazio di Galois.*

Il teorema ora dimostrato è stato il punto di partenza di varie investigazioni aventi lo scopo di studiare le strutture di incidenza delle varietà di Grassmann di indice qualunque, di generalizzare i risultati agli spazi affini e di considerare altre varietà algebriche notevoli da questo punto di vista. Nei numeri seguenti esporremo appunto tali questioni.

4. SPAZI DI GRASMANN

Sia Σ uno spazio affine, o proiettivo, finito, o infinito. Per ogni intero h, $1 \leq h \leq \dim \Sigma - 1$, sia $G^h(\Sigma)$ la famiglia degli spazi h-dimensionali di Σ.

Lo *h-mo spazio di Grassmann associato a* Σ, ovvero lo spazio di Grassmann dei sottospazi h-dimensionali di Σ, è definito come lo spazio parziale di rette $\Gamma^h(\Sigma) = (G^h(\Sigma), F^h(\Sigma))$, dove $F^h(\Sigma)$ denota la famiglia di tutti gli h-fasci di Σ (un h-fascio è l'insieme di tutti i sottospazi h-dimensionali passanti per uno spazio $(h-1)$-dimensionale ed appartenenti ad un sottospazio $(h+1)$-dimensionale). E' evidente che $\Gamma^h(\Sigma)$ è un PLS proprio e connesso.

Osserviamo che quando $\Sigma = \boldsymbol{P}_{n,K}$ è lo spazio proiettivo n-dimensionale sopra il campo K, $\Gamma^h(\Sigma)$ è isomorfo alla varietà di Grassmann rappresentativa dei sottospazi h-dimensionali di Σ.

Denotiamo con $S(\Sigma)$ e $T(\Sigma)$ le famiglie di sottospazi massimali di $\Gamma^h(\Sigma)$ definite come segue:

$S \in S(\Sigma) \Leftrightarrow S$ è una h-stella completa di Σ, cioè l'insieme di tutti i sottospazi h-dimensionali di Σ per un sottospazio $(h-1)$-dimensionale, il centro di S, eventualmente all'infinito quando Σ è uno spazio affine.

$T \in \pi\,\Sigma) \Leftrightarrow T$ è la famiglia di tutti i sottospazi h-dimensionali di Σ appartenenti ad un sottospazio $(h+1)$-dimensionale.

E' facile controllare che $S(\Sigma)$ e $T(\Sigma)$ ripartiscono l'insieme $M(\Sigma)$ di tutti i sottospazi massimali di $\Gamma^h(\Sigma)$. Ovviamente, quando Σ è uno spazio affine, si distinguerà una partizione in $S_2(\Sigma)$ e $S_1(\Sigma)$ a seconda che il centro della stella sia, o meno, all'infinito.

Lo spazio $\Gamma^h(\Sigma)$ soddisfa le seguenti proprietà di incidenza:

A1. Tre qualunque punti a due a due congiungibili appartengono ad un sottospazio.

A2. Nessuna retta è sottospazio massimale. La famiglia $M(\Sigma)$ dei sottospazi massimali può essere suddivisa in tre classi S_1, S_2 e T, tali che, posto $S = S_1 \cup S_2$, valgono le seguenti condizioni.

(i) $S, S' \in S_2$, $S \neq S' \Rightarrow S \cap S' = \phi$;

(ii) $S \in S$, $T \in T \Rightarrow S \cap T = \phi$ ovvero $S \cap T$ è una retta;

(iii) per ogni $f \in F^h(\Sigma)$, esistono un unico $S \in S$ e $T \in T$, tali che $f \subset S \cap T$;

(iv) (assioma di Veblen in S) dati $S_1, S_2 \in S$, o incontrantisi in un punto ovvero appartenenti ad S_2, se $S'_1, S'_2 \in S$ sono distinti ed ambedue incontrano S_1 ed S_2 in punti distinti, allora o S'_1 e S'_2 hanno intersezione non vuota, ovvero appartengono ad S_2.

A3. Se $S_2 \neq \phi$; allora ogni punto appartiene almeno ad un sottospazio massimale di S_2.

Ovviamente o $S_2 \neq \phi$, ovvero $S_2 = \phi$, a seconda che Σ è uno spazio affine o proiettivo. Inoltre, quando $S_1 = \phi$, le proprietà (i) e A3 sono vuote.

E' stato dimostrato che A1, A2, A3 caretterizzano gli spazi di Grassmann associati agli spazi affini o proiettivi in un senso che verrà precisato in seguito.

Un PLS, $\Gamma = (G, F)$, proprio e connesso è detto uno *spazio di Grassmann affine (proiettivo)* se valgono A1, A2, A3 e $S_2 \neq \neq \phi$ ($S_2 = \phi$). Uno spazio di Grasmann affine o proiettivo si dice di indice finito b se contiene una catena C, satura di lunghezza $b+1$ di sottospazi il cui elemento inferiore è una retta e il cui elemento superiore è un sottospazio di T. Questa nozione è ben posta, poichè se tale catena C esiste, allora ogni altra catena della stessa specie si dimostra che ha la stessa lunghezza b.

Il teorema seguente caratterizza gli spazi di Grassmann:

Teorema 1 - *Se Γ è uno spazio di Grassmann proiettivo (affine) di indice b esiste uno spazio proiettivo **P** (uno spazio affine A) tale che Γ e $\Gamma^b(\boldsymbol{P})$ (Γ e $\Gamma^b(A)$) sono isomorfi. Se $b = 1$,* (iv), *cioè l'assioma di Veblen in S, è una conseguenza degli altri assiomi che definiscono uno spazio di Grassmann.*

Il teorema 1 è stato dimostrato per $b = 1$ da G. Tallini (vedi n. 3) nel caso proiettivo [22], e da A. Bichara e F. Mazzocca nel caso affine [1], [4]. La dimostrazione del caso generale ($b > 1$) è basata su un ragionamento per induzione che utilizza i risultati contenuti nei citati lavori ed è stata data da A. Bichara e G. Tallini nel caso proiettivo [10], [11] e da A. Bichara e F. Mazzocca nel caso affine [3], [6].

La natura ed il numero degli assiomi atti a definire uno spazio di Grassmann suggerirono di investigare una loro possibile dipendenza. Una risposta negativa in tal senso è stata data da A. Bichara ed F. Mazzocca [2], [5] con il seguente

Teorema 2. - *Gli assiomi definenti gli spazi di Grassmann sia affini che proiettivi sono indipendenti.*

Il teorema 1 caratterizza gli spazi $\Gamma^b(\Sigma)$ per mezzo delle proprietà di incidenza delle due famiglie $S(\Sigma)$ e $T(\Sigma)$ di sottospazi massimali. Si presenta allora la questione se sia sufficiente poggiare su una sola di queste famiglie, precisamente su $S(\Sigma)$. Di fatto, le sole proprietà di incidenza della famiglia $T(\Sigma)$ sono attualmente troppo generali per fornire la caratterizzazione cercata.

Siffatto problema è lungi dall'esser completamente risolto. Comunque, sotto l'ipotesi in cui Σ sia uno spazio proiettivo e sia $b = 1$, N. Melone e D. Olanda hanno provato il teorema che segue [19], [21].

Teorema 3. - *Sia $\Gamma = (G, F)$ un* PLS *proprio nessuna delle cui rette sia un sottospazio massimale. Γ è isomorfo allo spazio di Grassmann rappresentativo delle rette di uno spazio proiettivo se, e soltanto se, esiste un ricoprimento S di Γ dato da spazi massimali tale che:*

Se $S \in S$ e $p \in G - S$, ogni S' di S per p incontra S in un unico punto e l'insieme di tutti siffatti punti è una retta i cui punti sono precisamente i punti di S congiungibili con p.

La dimostrazione di tale teorema è conseguita costruendo un'altra famglia T di sottospazi massimali di Γ tale che per S e T valgano gli assiomi A1 e A2 del Teorema 1 sotto l'ipotesi $b = 1$ e $S_2 = \phi$.

Un'altra possibile caratterizzazione degli spazi $\Gamma^b(\Sigma)$ fa uso di proprietà di incidenza coinvolgenti soltanto le rette, cioè non è richiesta alcuna proprietà per i sottospazi massimali. Attualmente non si ha ancora un analogo risultato per $b > 1$. Il teorema che segue fornisce una risposta nel caso $b = 1$.

Teorema 4. - *Un* PLS *(G, F) irriducibile è isomorfo allo spazio di Grassmann rappresentativo delle rette di uno spazio proiettivo se, e soltanto se, valgono le condizioni seguenti:*

(4.1) $\ell \in F,\ p \in G - \ell \Rightarrow p \not\sim \ell$, o $p \dashv \ell$, *ovvero* $p \sim \ell$

(4.2) $\ell \in F,\ p, q, t \in G - \ell : p \sim \ell,\ q \sim \ell,\ t \sim \ell,\ q \underset{p}{\not\sim} t \Rightarrow q \sim t.$

(4.3) $\ell \in F \Rightarrow$ *esistono* p e q *in* G *tali che* $p \not\sim q,\ p \sim \ell$ e $q \sim \ell$

(4.4) $\ell \in F,\ p \in G - \ell,\ p \not\sim \ell \Rightarrow \hat{\ell}_p = \{x \in G : x \sim p,\ x \sim \ell\} \in F.$

(4.5) $\ell, \ell' \in F,\ p \in G : \ell \cap \ell' = \phi,\ \ell \sim \ell',\ p \not\sim \ell,\ p \not\sim \ell' \Rightarrow \hat{\ell}_p = \hat{\ell}'_p$

Tale teorema fu dapprima dimostrato da P.M. Lo Re e D. Olanda [12], [13] per un PLS finito; essi hanno provato che la famiglia di sottospazi massimali di (G, F) può essere ripartita in due famiglie, S e T, per le quali valgono gli assiomi A1 e A2 del teorema 1 in cui si faccia $b = 1$ e $S_2 = \phi$. N. Melone e D. Olanda, [19], [21], hanno esteso questo risultato al caso infinito, dimostrando che sotto l'ipotesi del Teorema 4, (G, F) possiede una famiglia di sottospazi massimali soddisfacenti le condizioni del Teorema 3.

Risultati analoghi nel caso affine sono stati stabiliti da F. Mazzocca e D. Olanda [14], [15]. Precisamente è stato provato che:

Teorema 5. - *Sia* (G, F) *un* PLS *le cui rette possono venir ripartite in due famiglie* F_1 *ed* F_2. *Allora* (G, F) *è isomorfo allo spazio di Grassmann rappresentativo delle rette di uno spazio affine se, e soltanto se, valgono le condizioni seguenti:*

(4.6) $\ell \in F,\ p \in G - \ell \Rightarrow p \not\sim \ell$ *ovvero* $p \dashv \ell$ *ovvero* $p \sim \ell$.

(4.7) *Per ogni* ℓ *in* F, *esistono* p *e* q *in* $G - \ell$, $p \neq q$, *tali che* $p \not\sim q$ $p \sim \ell$ *e* $q \sim \ell$.

(4.8) *Per ogni retta* $\ell \in F_1$ *ed ogni punto* $p \in G - \ell$, $p \not\sim \ell$, *l'insieme di tutti i punti* q *tali che* $q \sim p$ *e* $q \sim \ell$ *è una retta* $\ell(p)$ *di* F_1. *Inoltre per ogni punto* $t \in \ell$ *ed ogni* $q \in \ell(p)$, *la retta per* t *e* q *appartiene a* F_1.

(4.9) *Siano* p, q, t *tre qualsiasi punti distinti. Se* p, q *e* q, t *appartengono a rette di* F_2, *i punti* p *e* t *sono congiungibili e la retta per essi appartiene ad* F_2.

(4.10) *Sia* ℓ *una retta e* p, q *due punti congiungibili con ogni punto di* ℓ. *Scriveremo* $p \Upsilon \ell$ *(rispettivamente* $p \Upsilon_2 \ell$*) se ogni retta* (p, x), $x \in \ell$ *appartiene ad* F_1 *(rispettivamente a* F_2*) e* $p \sim_{12} \ell$ *negli altri casi; diremo poi che* p, q *sono dello stesso tipo rispetto ad* ℓ *quando* $p \Upsilon \ell$

e $q \Upsilon_1 \ell$, *ovvero* $p \Upsilon_2 \ell$ *e* $q \Upsilon_2 \ell$, *ovvero* $p \sim_{12} \ell$ *e* $q \sim_{12} \ell$. *Allora* p *e* q *sono dello stesso tipo rispetto ad* ℓ *se, e soltanto se, essi sono congiungibili.*

La dimostrazione del teorema è conseguita utilizzando il Teorema 1. Precisamente si dimostra che la famiglia dei sottospazi massimali si può ripartire in tre classi verificanti le ipotesi del Teorema 1, per $b = 1$.

5. SPAZI PSEUDOPRODOTTO E VARIETA' DI C. SEGRE

Siano $\boldsymbol{P}_n$ e $\boldsymbol{P}'_m$ due spazi proiettivi di dimensioni n ed m. Poniamo $S = \boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{P}'_m$ e denotiamo con L l'insieme delle parti di S date dai sottoinsiemi $\{p\} \times \ell'$ e $\ell \times \{q'\}$, dove $p \in \boldsymbol{P}_n$ e $q' \in \boldsymbol{P}'_m$ ed ℓ, ℓ' sono rette di $\boldsymbol{P}_n$ e $\boldsymbol{P}'_m$ rispettivamente. La coppia (S, L) è un PLS che sarà detto *spazio prodotto di C. Segre di tipo* $\{n, m\}$ e denotato con $S_{n,m}$.

Osservazione. Se $\boldsymbol{P}_n$ e $\boldsymbol{P}'_m$ sono coordinatizzabili sopra lo stesso campo K, $S_{n,m}$ è isomorfo alla varietà di C. Segre, modello proiettivo di $\boldsymbol{P}_n \times \boldsymbol{P}'_m$.

Lo spazio $S_{n,m} = (S, L)$ soddisfa alle condizioni seguenti:

S1. $\ell \in L$, $p \in S - \ell$, $p \not\sim \ell$ implica che esiste un unico punto $t_{p,\ell}$ in S tale che $p \sim t_{p,\ell}$ e $t_{p,\ell} \sim \ell$;

S2. $p, q \in S$, $p \not\sim q$ implica che esistono esattamente due punti, $\hat{p}$ e $\hat{q}$, tali che $p \sim \hat{p} \sim q$ e $p \sim \hat{q} \sim q$.

La definizione di *spazio pseudoprodotto* si presenta spontaneamente come quella di un PLS, (S, L), soddisfacente all'assioma di Veblen e agli assiomi S1 ed S2.

N. Melone e D. Olanda hanno studiato gli spazi pseudoprodotto, brevemente indicati con PPS, [18], [20] e riassumeremo ora i risultati da essi ottenuti.

Si dimostra che un PPS irriducibile contiene punti *singolari*, cioè punti che sono congiungibili con ogni punto, se, e soltanto se, esso è uno spazio proiettivo. Perciò basta limitarsi a considerare PPS senza punti singolari. Siano p e q due qualsiasi punti non congiungibili in tale spazio (S, L) : si definisce quadrangolo rispetto a p e q l'insieme dato dai quattro punti $p, q, \hat{p}, \hat{q}$ e dalle quattro rette $(p, \hat{p}), (p, \hat{q}), (q, \hat{p}), (q, \hat{q})$: esso sarà denotato con $<p, q, \hat{p}, \hat{q}>$. Se L_p denota l'insieme delle rette di (S, L) per p, allora è:

(5.1) $\quad |L_p| \geqslant 2$.

Proposizione (5.2). - *In un* PPS (S, L) *irriducibile le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(i) *Per ogni* $p \in S$, $|L_p| = 2$.

(ii) (S, L) *è isomorfo ad uno spazio prodotto di C. Segre* $S_{1,1}$

(iii) S *ha rango due.*

Proposizione (5.3). - *In un* PPS (S, L) *irriducibile sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(i) *Esiste almeno un punto* p *di* S *tale che* $|L_p| \geqslant 3$.

(ii) *Esistono coppie punto-retta non congiungibili.*

(iii) S *ha rango maggiore di due.*

Per la Proposizione (5.2) possiamo limitarci a studiare i PPS irriducibili di rango maggiore di due. Sotto queste ipotesi, sia (p, ℓ) una coppia punto-retta non congiungibile di (S, L) e per ogni punto x di ℓ, sia $<p, x, t_{p,\ell}, \hat{x}>$ il quadrangolo relativo a p, x . (S, L) sarà detto *regolare* se per ogni punto p ed ogni retta ℓ non congiungibile con p , il punto $\hat{x}$ descrive una retta mentre x varia su ℓ .

Dati due punti distinti congiungibili p, q di (S, L) , sia

(5.4) $\quad V(p, q) = \{x \in S : x \sim p \text{ e } x \sim q\}$.

Proposizione (5.5). - *Sia* (S, L) *un* PPS *irriducibile di rango maggiore di due. Allora si ha:*

(i) *Per ogni coppia* (p, q) *di punti distinti congiungibili,* $V(p, q)$ *è un sottospazio massimale di* (S, L) .

(ii) *Un qualsiasi sottospazio massimale di* (S, L) *è un* $V(p, q)$.

(iii) *Due qualunque sottospazi massimali si intersecano in al più un punto.*

(iv) *Ogni punto* p *di* S *appartiene esattamente a due distinti sottospazi massimali ed ogni retta per* p *appartiene ad uno almeno di questi spazi*

(v) *L'insieme dei sottospazi massimali di* (S, L) *è ripartito in due famiglie* Σ *e* T *tali che sottospazi della stessa famiglia siano due a due sghembi e due sottospazi di famiglie distinte si incontrino esattamente in un punto.*

Siano ora V, W due sottospazi massimali sghembi e sia $\omega_{V,W} : V \to W$ l'applicazione definita come segue. Per ogni $x \in V$, $\omega_{V,W}(x)$ è il punto in cui W incontra il sottospazio massimale per x distinto da V . Si ha la seguente:

Proposizione (5.6). - *Un* PPS *irriducibile è regolare se, e soltanto se, per ogni coppia di sottospazi massimali sghembi* V, W *l'applicazione* $\omega_{V,W}$ *è una collineazione.*

Tenendo conto della Proposizionc suddetta, gli spazi prodotto di C. Segre possono venire caratterizzati come segue.

Teorema - *Un* PPS *irriducibile è isomorfo ad uno spazio prodotto di C. Segre se, e soltanto se, esso è regolare.*

Daremo ora un cenno della dimostrazione, mettendo in luce che, valendo l'assioma di Veblen, ogni sottospazio di (S, L) è uno spazio proiettivo. Denotiamo con n, m le dimensioni dei sottospazi massimali appartenenti a Σ e T rispettivamente e prendiamo $V \in \Sigma$ e $W \in T$; sia $S_{n,m}$ lo spazio prodotto di C. Segre in $V \times W$. Per ogni $(p, q) \in V \times W$, i sottospazi massimali τ_p e σ_q per p e q rispettivamente, distinti da V e da W si incontrano in un punto. L'applicazione:

$$f : (p, q) \in V \times W \to \tau_p \cap \sigma_q \in S$$

risulta un isomorfismo e ne segue il teorema.

6. SPAZI DI VERONESE

Sia $\boldsymbol{P}_n$ uno spazio proiettivo finito di dimensione $n \geqslant 3$ e $V(\boldsymbol{P}_n) = (S, L)$ sia il PLS i cui punti sono le coppie non ordinate di iperpiani di $\boldsymbol{P}_n$ e le cui rette sono i sottoinsiemi di coppie con un elemento fisso, l'altro descrivendo gli iperpiani di un fascio in $\boldsymbol{P}_n$. Lo spazio $V(\boldsymbol{P}_n)$ sarà detto *spazio di Veronese* associato allo spazio proiettivo $\boldsymbol{P}_n$.

Osservazione. Se $\boldsymbol{P}_n$ è coordinato sopra un campo K di caratteristica diversa da due, allora $V(\boldsymbol{P}_n)$ è isomorfo alla struttura d'incidenza punto-retta fornita dalla varietà degli spazi tangenti alla varietà di Veronese di indici $(n, 2)$.

E' facile provare che $V(\boldsymbol{P}_n) = (S, L)$ verifica le seguenti proprietà:

V1. Per ogni $\ell, \ell' \in L$, $\ell \nsim \ell'$ esiste un sol punto p di S tale che $p \sim \ell$ e $p \sim \ell'$

V2. Se $\ell \in L$, $p, q \in S$, $p \sim \ell$, $q \sim \ell$, allora $p \sim q$.

V3. Per ogni $\ell \in L$, $p \in S$, $p \nsim \ell$, $|\{x \in S : p \sim x \sim \ell\}| \leqslant 2$.

V4. Per ogni $\ell \in L$, esiste un sol $d_\ell \in S$ tale che $d_\ell \sim \ell$ e $d_\ell \nsim x$, per ogni $x \in S$ e $x \nsim \ell$.

Queste proprietà suggeriscono di chiamare *spazio di Veronese* ogni PLS, (S, L), proprio le cui rette siano sottospazi massimali e per il quale valgano le condizioni V1, V2, V3, V4.

Riassumeremo ora i risultati ottenuti al riguardo da N. Melone [16], [17].

Uno spazio di Veronese (S, L) si dirà proiettivo, se soddisfa all'assioma di Veblen. Per ogni retta $\ell \in L$, sia

(6.1) $\quad T(\ell) = \{x \in S : x \sim \ell\}$.

Proposizione (6.2). - *Per uno spazio di Veronese* (S, L) *valgono le seguenti condizioni:*

(i) *Per ogni retta* ℓ, $T(\ell)$ *è l'unico sottospazio massimale a cui* ℓ *appartiene*

(ii) *Ogni sottospazio massimale di* (S, L) *è un* $T(\ell)$, $\ell \in L$; *perciò questi sottospazi ricoprono* S.

(iii) *Due qualunque sottospazi massimali distinti si incontrano in un unico punto.*

(iv) *Ogni punto appartiene al più a due sottospazi massimali.*

Si dirà *punto doppio* un punto $p \in S$ per il quale passi soltanto un sottospazio massimale; V denoterà l'insieme di tutti i punti doppi.

Proposizione (6.3). - *Per ogni retta* $\ell \in L$, d_ℓ *è l'unico punto doppo nel sottospazio* $T(\ell)$. *Conseguentemente ogni sottospazio massimale contiene un unico punto doppio.*

Siano T, T' due qualunque sottospazi distinti massimali e siano $d_T, d_{T'}$ i loro punti doppi; per ogni $x \in T - \{d_T\}$, denotiamo con T_x il sottospazio massimale per x distinto da T. Definiamo l'applicazione $\omega_{TT'} : T \to T'$ nel modo seguente:

$$(6.4) \qquad \omega_{TT'}(x) = \begin{cases} d_{T'} & \text{se } x = T \cap T' \ ; \\ T \cap T' & \text{se } x = d_T \ ; \\ T' \cap T_x & \text{se } x \in T - \{d_{T'}, T \cap T'\} \end{cases}$$

(S, L) sarà chiamato spazio di Veronese *regolare*, se $\omega_{TT'}$ è una collineazione per ogni coppia di sottospazi distinti massimali T, T'.

Sia ora ℓ una retta qualunque, T il sottospazio massimale per ℓ; l'insieme

$$(6.5) \qquad \alpha(\ell) = \begin{cases} \{d_{T_x} \in V : x \in \ell\}, & \text{se } d_T \notin \ell, \\ \{d_{T_x} \in V : x \in \ell - \{d_T\}\} \cup \{d_T\}, & \text{se } d_T \in \ell, \end{cases}$$

sarà detto *arco* associato ad ℓ. Denotiamo con A l'insieme di tutti gli archi.

Proposizione (6.6). - *La coppia (V, A) è uno spazio di rette, più precisamente uno spazio proiettivo.*

La precedente proposizione porta al risultato finale.

Teorema - *Sia (S, L) uno spazio di Veronese, V l'insieme dei suoi punti doppi ed A la famiglia dei suoi archi. Se (S, L) è proiettivo, regolare e di rango finito, allora esso è isomorfo allo spazio di Veronese associato ad uno spazio proiettivo, cioè il duale di (V, A).*

7. SPAZI DI SCHUBERT

Sia $\boldsymbol{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n > 1$ e denotiamo con P_h, $0 \leqslant h \leqslant n-1$, la famiglia dei sottospazi h-dimensionali di $\boldsymbol{P}$. Una n-pla $(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ di sottospazi di $\boldsymbol{P}$ sarà detta una *bandiera*, se per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-2$, $S_i \subset S_{i+1}$ e $\dim S_j = j$ per tutti gli interi $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Sia $S(\boldsymbol{P})$ la famiglia di tutte le bandiere di $\boldsymbol{P}$.

Sia $h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$; per ogni catena di sottospazi $\overline{S}_0 \subset \subset \overline{S}_1 \subset \ldots \subset \overline{S}_{h-1} \subset \overline{S}_{h+1} \subset \ldots \subset \overline{S}_{n-1}$ tale che $\dim \overline{S}_i = i$, denotiamo con $f_h(\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_{h-1}, \overline{S}_{h+1}, \ldots, \overline{S}_{n-1})$ l'insieme delle bandiere $\{(\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_{h-1}, S_h, \overline{S}_{h+1}, \ldots, \overline{S}_{n-1}) : S_h \in P_h\}$ e con $F_h = F_h(\boldsymbol{P})$ la famiglia dei sottoinsiemi di $S(\boldsymbol{P})$ ognuno dei quali è un $f_h(\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_{h-1}, \overline{S}_{h+1}, \ldots, \overline{S}_{n-1})$. Poniamo

$$F = F(\boldsymbol{P}) = (F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}) \quad \text{e}$$

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(\boldsymbol{P}) = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$$

La coppia $\Sigma(\boldsymbol{P}) = (S(\boldsymbol{P}), F(\boldsymbol{P}))$ sarà detta *spazio delle bandiere* di $\boldsymbol{P}$ ed è facile verificare che $(S(\boldsymbol{P}), \widetilde{F}(\boldsymbol{P}))$ è un PLS proprio e connesso. Inoltre $\Sigma(\boldsymbol{P})$ soddisfa alle seguenti condizioni:

B1. Ogni poligonale contenente esattamente una retta di $F_i(\boldsymbol{P})$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, è aperta

B2. Una poligonale di lunghezza quattro è chiusa se, e soltanto se, le sue rette appartengono a $F_i \cup F_j$, $i < j$, $j \neq i+1$, $i = 0, \ldots, n-3$, $j = 2, \ldots, n-1$.

B3. Ogni poligonale di lunghezza cinque le cui rette appartengono a $F_i \cup F_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, è contenuta in una poligonale chiusa di lunghezza sei le cui rette appartengono a $F_i \cup F_{i+1}$.

Osservazione. Se $\boldsymbol{P}$ è coordinatizzato sopra un campo, allora lo spazio $(S(\boldsymbol{P}), \widetilde{F}(\boldsymbol{P}))$ è isomorfo alla struttura di incidenza di punti e rette fornita dalla varietà di Schübert rappresentativa delle bandiere di P.

Le argomentazioni precedenti suggeriscono la seguente definizione. Sia S un insieme non vuoto e $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{n-1})$, $n \geq 2$, una n-pla di partizioni di S tale che due a due non si intersechino in blocco. Poniamo $F = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$. La coppia $\Sigma = (S, F)$ sarà detta *spazio di Schubert* di indice finito n se la coppia (S, F) è un PLS proprio e connesso soddisfacente alle condizioni B1, B2, B3.

Gli spazi di Schubert sono stati definiti e studiati da A. Bichara e C. Somma che hanno provato il seguente risultato [7], [8]:

Teorema (7.1). - *Ogni spazio di Schubert di indice finito n è isomorfo allo spazio delle bandiere di uno spazio proiettivo n-dimensionale.*

Recentemente A. Bichara e C. Somma hanno esteso agli spazi affini i risultati esposti in questo numero, cioè essi hanno definito e caratterizzato completamente lo spazio delle bandiere di uno spazio affine, [9].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bichara - F. Mazzocca, *Su una cartterizzazione dello spazio di Grassmann delle rette di uno spazio affine,* Quad. Sem. Geom. Comb. n. 31, 1980, Ist. Mat. "G. Castelnuovo", Univ. Roma.

[2] A. Bichara - F. Mazzocca, *On a characterization of Grassmann spaces associated with an affine space,* Rapp. Int. n. 5 Ist. Mat. Fac. Ing. Napoli, Sept. 1981.

[3] A.. Bichara - F. Mazzocca, *Sull'indipendenza degli assiomi che definiscono gli spazi di Grassmann affini e proiettivi,* Rapp. Int. n. 8, Ist. Mat. Fac. Ing. Napoli, Ottobre 1981.

[4] A. Bichara - F. Mazzocca, *On a characterization of Grassmann space representing the lines in an affine space,* Simon Stevin, vol. 56, (1982), 129-141.

[5] A. Bichara - F. Mazzocca, *On the independence of the axioms defining the affine and projective Grassmann spaces,* Ann. Discr. Math. 14 (1982), 123-128.

[6] A. Bichara - F. Mazzocca, *On a characterization of the Grassmann spaces associated with an affine space,* Ann. Discr. Math. 18 (1983), 95-112.

[7] A. Bichara - C. Somma, *A characterization of Schubert manifold associated with a 3-dimensional projective space,* Atti Convegno Geometria combinatoria e di incidenza, La Mendola (Italy), July 1982 Rend. Sem. Mat. Brescia, 7 (1984), 89-110.

[8] A. Bichara - C. Somma, *On Schubert manifold associated with a projective space,* to appear in Rend. Mat. Univ. Roma.

[9] A. Bichara - C. Somma, *On the flag space associated with an affine or projective space,* to appear in Rend. Mat. Univ. Roma.

[10] A. Bichara - G. Tallini, *On a characterization of the Grassmann manifold representing the planes in a projective space,* Ann. Discr. Math. 14 (1982), 129-150.

[11] A. Bichara - G. Tallini, *On a characterization of the Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space*, Ann.Discr. Math. 18 (1983), 113-132.

[12] P.M. Lo Re - D. Olanda, *Spazi di Grassmann,* Ist. Mat. "R. Cacciopoli", Univ. Napoli, 1980.

[13] P.M. Lo Re - D. Olanda, *Grassmann spaces,* J. Geometry, 17 (1981), 50-60.

[14] F. Mazzocca - D. Olanda, *A graphic characterization of the linese of an affine space,* Rapp. int. n. 6, Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli, Ottobre 1981.

[15] F. Mazzocca - D. Olanda, *A graphic characterization of the lines of an affine space,* Ann. Discr. Math. 18 (1983), 625-634.

[16] N. Melone, *Veronese spaces,* Pubbl. Ist. Mat. Univ. Napoli, n. 42, 1982.

[17] N. Melone - *Veronese spaces*, J. Geometry, 20 (1983), 169-180.

[18] N. Melone - D. Olanda, *Su certe strutture di incidenza che generalizzano le varietà di C. Segre*, Quad. Sem. Geom. Comb. n. 22, Febbraio 1980, Ist. Mat. "G. Castelnuovo", Univ. Roma.

[19] N. Melone - D. Olanda, *Una proprietà caratteristica della Grassmanniana delle rette di uno spazio proiettivo*, Publ. Ist. Mat. Univ. Napoli, n. 2, 1981.

[20] N. Melone - D. Olanda, *Spazi pseudoprodotti e varietà di C. Segre*, Rend. Mat. pura e appl., VII, I, 1981, 381-397.

[21] N. Melone - D. Olanda, *A characteristic property of the Grassmann manifold representing the lines of a projecting space*, to appear in European J. Combin.

[22] G. Tallini, *On a characterization of the Grassmann manifold representing the lines in a projective space*, in "Finite Geometries and Designs", London Math. Soc. Lecture Note Series 49, Cambridge U.P., (1981), 354-358.