142

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

REPRINTED FROM:

Giornate di Geometrie Combinatorie

a cura di:

GIORGIO FAINA
GIUSEPPE TALLINI

PERUGIA - 1993

Le (n)-varietà in spazi lineari.

G. Tallini

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza", Piazzale Aldo Moro 2, 00185 Roma. (E-mail add: tallini@vaxrma.roma1.infn.it).

Abstract

A (n)-variety H in a linear space $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ is a subset such that:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \quad either \quad l \subset H, \quad or \quad |l \cap H| \in \{0,1,n\}$$

$$and \quad n-secant \quad lines \quad do \quad exist.$$

Here we outline the foundations of the theory of (n)-varieties in a linear space $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, pointing out the properties of a linear space contaning a (n)-variety and conversely. We explain several results and open problems on this subject.

1 Definizioni e prime proprietà.

Sia $\mathbf{P} = (\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare e sia $\mathcal{S}$ il sistema di chiusura dei suoi sottospazi (cfr. [15]). Possiamo allora considerare l'operatore di chiusura relativo ad $\mathcal{S}$, la chiusura di un sottoinsieme X essendo l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono X, essa viene denotata con $\overline{X}$. Si possono quindi dare le nozioni di insieme X ***indipendente*** (se $\forall x \in X$, $x \notin \overline{X - \{x\}}$), ***dipendente***, ***generatore*** (se $\overline{X} = S$), ***base*** (se X è indipentente e generatore). Chiameremo ***iperpiano*** di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ un sottospazio $S \in \mathcal{S}$ tale che:

$$T \in \mathcal{S} : S \subset T \Longrightarrow T = \mathbf{P}.$$

ossia un coatomo nel reticolo $(\mathcal{S}, \subseteq)$. Chiameremo *primo* di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ un sottospazio $P \in \mathcal{S}$ ad intersezione non vuota con ogni retta, cioè

$$P \in \mathcal{S}, \quad P \ \ primo \iff \forall \ell \in \mathcal{L}, \quad \ell \cap P \neq \emptyset.$$

Evidentemente ogni primo è un iperpiano, ma non è vero il viceversa.

Uno spazio lineare $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ viene detto matroidale se per esso vale l'assioma dello scambio:

$$\forall X \subseteq \mathbf{P}, \quad \forall x, y \in \mathbf{P}: \quad x \notin \overline{X}, \quad x \in \overline{X \cup \{y\}} \implies y \in \overline{X \cup \{x\}}.$$

Diremo che $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è m-matroidale se l'assioma dello scambio vale per i sottoinsiemi X di cardinalità minore o uguale ad m. Ovviamente se $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è matroidale, esso è m-matroidale qualsiasi sia m.

Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di sottospazi di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ tale che per ogni terna di punti non allineati, x, y, z, di $\mathbf{P}$ passi uno ed un solo elemento di $\mathcal{P}$, diremo allora che $(\mathbf{P}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è uno *spazio planare* e gli elementi di $\mathcal{P}$ prendono il nome di piani. Uno spazio planare sarà detto *proprio* se il piano per x, y, z, coincide con la chiusura di x, y, z, cioè se ogni piano non contiene sottospazi propri diversi dai punti e dalle rette. Evidentemente si ha (cfr.[15]):

Teorema 1.1 *Lo spazio $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è 2-matroidale se, e solamente se, denotato con $\mathcal{P}$ la famiglia dei sottospazi di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ costituita dalla chiusura di tre qualsiasi punti indipendenti, si ha che $(\mathbf{P}, \mathcal{L}, \mathcal{P})$ è uno spazio planare proprio.*

Per ogni intero $n \geq 2$ chiameremo (n)*-varietà* di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ un sottoinsieme H di $\mathbf{P}$ tale che *ogni retta, non appartenente ad H, o è esterna ad H oppure incontra H in un sol punto x* (retta tangente ad H in x)*o in n punti distinti* (retta n-secante) e che *possegga rette n-secanti.*

Evidentemente ogni sottospazio incontra H o in un sottospazio ovvero in una n-varietà. Diremo che H *è propriamente contenuta* in $\mathbf{P}$ se $\overline{H} = \mathbf{P}$. Nel seguito supporremo sempre che H sia propriamente contenuta in $\mathbf{P}$.

Esempi di n-varietà sono le seguenti. L' intersezioni di (2)-varietà di uno spazio lineare o è un sottospazio o è una (2)-varietà. Sia $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{r,K}$ uno spazio proiettivo di dimensione r su un campo K. Ogni *quadrica* di $\mathbf{P}_{r,K}$ è una (2)-varietà. L'*intersezione di quadriche* di $\mathbf{P}_{r,K}$ (diversa da un sottospazio) è una (2)-varietà. Ne segue che le *varietà di Grassmann*, le *varietà prodotto di C. Segre* di due spazi proiettivi, le *varietà di Veronese* di $\mathbf{P}_{r,K}$ sono (2)-varietà. In uno spazio di Galois $PG(r, q)$, q quadrato, una varietà hermitiana è una (n)-varietà con $n = \sqrt{q} + 1$. Se la caratteristica del campo K è $p > 0$, l'insieme dei punti di $\mathbf{P}_{r,K}$ a coordinate nel campo fondamentale di K è una $(p+1)$-varietà. In un sistema di Steiner $S(2, k, v)$ ogni sottoinsieme di tipo $(0, 1, n)$, con $n < k$, è una (n)-varietà.

Un punto x di una (n)-varietà H dicesi *singolare* se per esso non passano rette n-secanti. H dicesi singolare o non singolare a seconda che contenga o non contenga punti singolari.

Diremo che H è *normale* se: *per ogni $S \in \mathcal{S}$ e per ogni x e y punti distinti di $S \cap H$ singolari in $S \cap H$, la retta xy è costituita da punti singolari di $S \cap H$.* Si prova subito che :

Teorema 1.2 *Se H è una (n)-varietà normale e singolare, l'insieme V dei suoi punti singolari è un sottospazio e si ha:*

$$H = \bigcup_{x \in H - V} p(x, V),$$

dove

$$p(x, V) = \bigcup_{z \in V} xz$$

è la proiezione da x di V.

Esempi di varietà normali sono quelli dati precedentemente ed altri saranno dati nel seguito. Mostriamo che esistono (n)-varietà che non sono normali. Un esempio è il seguente.

ESEMPIO 1.- Sia α un piano affine, O un suo punto, X ed Y due rette distinte per O. Sia $\mathcal{L}$ la famiglia di parti di α costituita dalle rette parallele ad X, dalle rette parallele ad Y e dalle coppie di punti la cui retta congiungente non sia né parallela ad X né parallela ad Y. Evidentemente $(\alpha, \mathcal{L})$ è uno spazio lineare che risulta 2-matroidale, ma non 3-matroidale. Siano $a_1, a_2, ..., a_n$ rette distinte parallele ad X e $b_1, b_2, ..., b_n$ rette distinte parallele ad Y, con $n \geq 2$ e minore dell'ordine di α. Sia H l'unione delle rette $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Si prova subito che H è un (n)-varietà di $(\alpha, \mathcal{L})$ che non è normale.

Una (n)-varietà H dicesi *proiettiva* se:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \quad l \subset H, \quad \forall x \in H - l: \quad p(x,l) = \bigcup_{z \in l} xz \subseteq H \qquad \Rightarrow p(x,l) \text{ piano proiettivo}.$$

Si prova facilmente che (cfr. [15]):

Teorema 1.3 *Se H è proiettiva, ogni sottospazio appartenente ad H è uno spazio proiettivo. Inoltre per ogni $T \in S$, $T \cap H$, se non è un sottospazio, risulta una (n)-varietà proiettiva. Infine H è normale e, se è singolare, H è un cono il cui vertice è lo spazio singolare, V, e ha come generatori spazi che coprono V.*

Evidentemente ogni (n)-varietà di uno spazio proiettivo è proiettiva, ma vi sono molti esempi di (n)-varietà proiettive in spazi lineari che non sono proiettivi né matroidali, anzi neanche 2-matroidali (cfr. l'Esempio 2 nel successivo capoverso 4 ed altri che si possono ottenere ispirandosi ad esso).

Un punto x di una (n)-varietà H dicesi *quasiregolare* se l'unione delle rette per x tangenti o contenute in H è un sottospazio, $\tau(x)$, che diremo *tangente* in x a H. Se $\tau(x)$ è un *iperpiano* x dicesi *regolare*, se $\tau(x)$ è un *primo* x dicesi *fortemente regolare*. H dicesi *quasiregolare* se ogni suo punto è quasiregolare, *regolare* se ogni suo punto non singolare è regolare, *fortemente regolare* se ogni suo punto non singolare è fortemente regolare. Diremo poi che H è *proiettivamente regolare* se è proiettiva e fortemente regolare. Si prova subito che:

Teorema 1.4 *Se H è una (n)-varietà rispettivamente quasiregolare, fortemente regolare, proiettivamente regolare di uno spazio lineare $\mathbf{P} = (\mathbf{P}, \mathcal{L})$ ogni sottospazio T di $\mathbf{P}$ incontra H o in un sottospazio ovvero in una (n)-varietà quasiregolare, fortemente regolare, proiettivamente regolare.*

Evidentemente ogni (n)-varietà regolare di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}_{r,k}$ è proiettivamente regolare, così le quadriche di $\mathbf{P}_{r,k}$ e le varietà hermitiane di $PG(r,q)$ sono varietà proiettivamente regolari. Osserviamo poi che le quadriche di uno spazio affine $\mathbf{A}_{r,K}$ sono (2)-varietà *non* quasiregolari nè proiettive.

ESEMPIO 2.-Diamo infine un esempio di (2)-varietà regolare e proiettiva, ma non proiettivamente regolare, in uno spazio lineare, che non è 2-matroidale, in cui ogni retta abbia cardinalità almeno tre. Sia Q una quadrica rigata non singolare di $PG(r,q) = (\mathbf{P}, \mathcal{L})$ ove q è tale che esista un sistema di Steiner

$S(2,k,q+1) = (\mathbf{S}, \mathcal{R})$, con $k \geq 3$, (per esempio $q = n^3$, $k = n+1$, ove n è la potenza di un primo). Si fissi una retta esterna, l, a Q ed una biezione $f : \mathbf{S} \to l$. Si ponga $\mathcal{L}' = (\mathcal{L} - \{l\}) \cup \{f(r) : r \in \mathcal{R}\}$. Allora $(\mathbf{P}, \mathcal{L}')$ è uno spazio lineare (con rette di cardinalità $q+1$ e k) che non è 2-matroidale ed in tale spazio Q risulta una (2)-varietà regolare e proiettiva (ma non proiettivamente regolare). Inoltre, se $r \geq 4$, esistono iperpiani tangenti a Q contenenti l: essi sono dei primi di $(\mathbf{P}, \mathcal{L}')$.

Relativamente alle (n)-varietà proiettivamente regolari, procedendo in modo analogo a quanto provato in [13] nn. 2,3, tenuto conto dei Teoremi (1.3) e (1.4), si ha che:

Teorema 1.5 *Sia $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ un qualsiasi spazio lineare ed H una (n)-varietà proiettivamente regolare non singolare di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$. Per ogni $x \in H$, $\Gamma_x = \tau(x) \cap H$ è una (n)-varietà proiettivamente regolare di $\tau(x)$ che ammette x come unico punto singolare. Ne segue che Γ_x è un cono proiettante da x una (n)-varietà proiettivamente regolare non singolare di un primo S, non per x, di $\tau(x)$. Diremo che H è di tipo finito m, se gli spazi contenuti in H hanno dimensione finita, limitata superiormente, ed m è la massima dimensione di tali spazi. In tal caso gli spazi di dimensione m di H costituiscono un ricoprimento di H. Inoltre per ogni $x \in H$ esiste una $(2m)$-pla di sottospazi $(S_1, S_2, ..., S_{2m})$, ciascuno dei quali risulta un primo del precedente, con $S_1 = \tau(x)$, tale che $S_{2i+1} \cap H$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$ è un cono, Γ_{2i+1}, con vertice un punto x_{2i+1} e proiettante da esso la (n)-varietà $H_{2i+2} = S_{2i+2} \cap H$, che risulta proiettivamente regolare non singolare di tipo $m-i$ in S_{2i+2}.*

Proviamo che:

Teorema 1.6 *Ogni (n)-varietà H quasiregolare risulta normale.*

Dimostrazione: Basta provare (cfr. Teor. 1.4) che se x ed y sono punti singolari per H (ed allora la retta xy appartiene ad H), per ogni punto z di xy e per ogni punto $t \in H - xy$ la retta zt è contenuta in H. Si ha:

$$xt, yt \subseteq H \Longrightarrow \tau(t) \ni x, y \Longrightarrow \tau(t) \supseteq xy \ni z \Longrightarrow zt \subseteq \tau(t) \Longrightarrow zt \subseteq H,$$

onde l'asserto.

Teorema 1.7 *Sia* $\mathbf{P} = (P, \mathcal{L})$ *uno spazio lineare tale che ogni retta abbia cardinalità almeno tre e sia* H *una* (n)*-varietà quasiregolare di* $\mathbf{P}$. *Allora* H *è propriamente contenuta in* $\mathbf{P}$, *cioè* $\overline{H} = \mathbf{P}$.

Dimostrazione: Ragionando per assurdo, supponiamo $\overline{H} \subset \mathbf{P}$. Sia l una (n)-secante di H ed x, y due punti distinti di $l \cap H$. Esiste $t \in \mathbf{P} - \overline{H}$. La retta xt è tangente in x ad H, onde $\tau(x) \supseteq xt$. Sia z un punto della retta yt, diverso da y e t [certamente esistente per l'ipotesi fatta su $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$]. Poiché $z \in \mathbf{P} - \overline{H}$, la retta xz è tangente in x ad H, onde $\tau(x) \supseteq xz$. Ma allora si ha:

$$xz \subseteq \tau(x), xt \subseteq \tau(x) \Longrightarrow z, t \in \tau(x) \Longrightarrow y \in zt \subseteq \tau(x) \Longrightarrow xy \subseteq \tau(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow xy \subseteq H,$$

ma ciò è assurdo, perché la xy è una (n)-secante di H. Si ha così l'asserto. Osserviamo che l'ipotesi fatta sulla cardinalità delle rette di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è essenziale, come è facile provare su esempi.

Chiameremo (n)-*ovoide* una (n)-varietà quasiregolare, Ω, di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ che non contenga rette. Se $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è uno ***piano***, ossia non ammette sottospazi propri diversi dai punti e dalle rette e contiene tre punti indipendenti, l'(n)-ovoide prende il nome di (n)-*ovale* se é regolare, cioè se per ogni $x \in \Omega$, $\tau(x)$ è una retta, (n)-*iperovale* se per ogni $x \in \Omega$. $\tau(x)$ è il punto x, cioè ogni retta di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ incontra Ω in zero o n punti; se esiste $x \in \Omega$ tale che $\tau(x) = \{x\}$ ed un punto $y \in \Omega$ tale che $\tau(y)$ è una retta. diremo che Ω è una (n)-*quasiovale*. Se il piano $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è tale che per ogni suo punto passa un numero costante (finito) r di rette, per esempio se è un sistema di Steiner $S(2, k, v)$, allora risulta $|\Omega| = (r-1)(n-1)+1$ se Ω è una (n)-ovale, $|\Omega| = r(n-1)+1$ se Ω è una (n)-iperovale ed allora n deve dividere $r-1$, e non esistono (n)-quasiovali.

Nel seguito ci occuperemo delle (n)-varietà quasiregolari di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$.

2 Seminuclei e nuclei.

Sia H una (n)-varietà di uno spazio lineare $\mathbf{P}=(P, \mathcal{L})$. Un punto $x \in \mathbf{P} - H$ dicesi *seminucleo* se per x non passano n-secanti, cioè se ogni retta per x è esterna o tangente a H. Un seminucleo x chiamasi *nucleo* se ogni retta per x è tangente a H. Per esempio in uno spazio di Galois $PG(2s, q)$, con q pari, ogni quadrica non singolare ammette sempre un nucleo. Si prova subito che:

Teorema 2.1 *Se* $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ *è un sistema di Steiner o, più in generale, gode della proprietà che per ogni punto* x *il numero delle rette per* x *è una costante (finita)* r *(onde* $|\mathbf{P}| \leq r(r-1)+1$*) ed* H *è una* (n)*-varietà di* $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ *che ammetta un nucleo, allora* $|H| = r$ *ed ogni seminucleo di* H *è un nucleo.*

Nel seguito supporremo H quasiregolare e denoteremo con V il sottospazio dei punti singolari di H, con Σ l'insieme dei seminuclei di H e con N l'intersezione di tutti i sottospazi tangenti ad H. Proviamo che:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{y \in H} \tau(y) = V \bigcup \Sigma. \tag{2.1}$$

Dimostrazione: Si ha:

$$x \in N - H \iff x \in \tau(y), \forall y \in H; \quad x \notin H \iff$$

$$\iff xy \cap H = \{y\}, \forall y \in H; \quad x \notin H \iff x \in \Sigma$$

ed inoltre

$$x \in N \cap H \iff x \in H; \quad x \in \tau(y), \forall y \in H \iff$$

$$\iff x \in H; \quad xy \subset H, \forall y \in H; \quad x \neq y \iff x \in V.$$

Ne segue l'asserto.

Dalla (2.1) segue che:

Teorema 2.2 *Se* H *ammette un nucleo* x *allora risulta:*

$$N = p(x, V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{z \in V} xz.$$

Ne segue che se H *è non singolare* $(V = \emptyset)$ *si ha:*

$$N = \{x\}.$$

Proviamo ora che:

Teorema 2.3 *Se H è una (n)-varietà quasiregolare di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ che ammetta un seminucleo x e se esiste una retta secante, s, e uno spazio S, contenente $\overline{s\cup\{x\}}$, tale che il numero delle rette per ciascun punto di S sia un costante r ed ogni retta di S abbia almeno tre punti (per esempio se S è un sistema di Steiner) allora è $n=2$; inoltre se S è un piano risulta $|S\cap H|=r$, $S\cap H$ è una ovale in S che ammette come nucleo x, r è dispari e si ha $S\cap N=\{x\}$. In particolare se $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è un sitema di Steiner ed H ammette un seminucleo, allora è $n=2$.*

<u>Dimostrazione</u>: Sia $y\in s\cap H$. Lo spazio $S'=S\cap r(y)$ è diverso da S (perché per y passa la n-secante s di $S\cap H$ in S). Sia r' il numero delle rette di S' per y; risulta $r'<r$. Essendo x un seminucleo di $S\cap H$ in S, si ha $|S\cap H|\le r$. Poiché le $r-r'$ rette di S per y, non in S', sono tutte n-secanti $S\cap H$ risulta:

$$r\ge|S\cap H|=(r-r')(n-1)+|S'\cap H|\ge(r-r')(n-1)+1\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r-1\ge(r-r')(n-1)\Longrightarrow n-2\le(r'-1)/(r-r').$$

D'altra parte (poiché ogni retta di S ha almeno tre punti ed essendo $|S'|\le r$) si ha:

$$r\ge|S'|\ge 2r'+1>2r'-1\Longrightarrow(r'-1)/(r-r')<1,$$

onde è $n-2<1$, cioè $n=2$.

Se S è un piano, lo spazio $S'=S\cap r(y)$ o si riduce al punto y, ovvero è una retta. Essendo $|S\cap H|\le r$, non può essere $S'=\{y\}$ (in quanto in tal caso sarebbe $|S\cap H|=r+1$). Se S' è una retta, non può tale retta essere tutta contenuta in H (altrimenti $|S\cap H|=(r-1)+|S'|\ge r+1$, mentre è $|S\cap H|\le r$). Dunque S' è una retta tangente in y ad $S\cap H$. Se ne deduce che $|S\cap H|=r$ e quindi $S\cap H$ in S è una ovale che ammette x come nucleo, onde $S\cap N=\{x\}$ e $(S\cap H)\cup\{x\}$ è una iperovale in S, cioè un insieme di tipo $(0,2)$, dunque $|(S\cap H)\cup\{x\}|=r+1$ è pari ossia r è disperi. Ne segue l'asserto.

Dal Teor. 2.3 segue che:

Teorema 2.4 *Sia H una (n)-varietà quasiregolare di un sistema di Steiner $(\mathbf{P},\mathcal{L})=S(2,k,v)$, con $n\ge3$. Allora per ogni $x\in\mathbf{P}-H$ passa almeno una n-secante.*

Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare 2-matroidale, cioè (cfr. n.1) tale che denotato con $\mathcal{P}$ la famiglia dei sottospazi di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ costituita dalla chiusura di tre qualsiasi punti indipendenti, si ha che $(\mathbf{P},\mathcal{L},\mathcal{P})$ è uno spazio planare proprio. Diremo che $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ soddisfa all'assioma del fascio, o brevemente alla condizione (φ), se

(φ) *in ogni piano π di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ le rette di un fascio hanno cardinalità costante (finita) $r(\pi)$ (ed allora risulta $|\pi|\le r(r-1)+1$).*

Diamo esempi di tali spazi.

ESEMPIO 1.- Ogni sistema di Steiner $S(2,k,v)$ che sia 2-matridale.

ESEMPIO 2.- Ogni $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ infinito, con $|l|=k$, $\forall l\in\mathcal{L}$ (sistema di Steiner infinito), che sia 2-matroidale, con piani finiti. Per esempio uno spazio di Galois di dimensione numerabile.

ESEMPIO 3.- Sia $\mathcal{R}$ la famiglia delle rette di uno spazio di Galois $PG(d,q)$ e sia $\mathbf{P}$ un sottoinsieme di $PG(d,q)$ tale che:

$$\forall l\in\mathcal{R},\qquad |l\cap\mathbf{P}|>\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}\tag{2.2}$$

Posto $\mathcal{L}=\{l\cap\mathbf{P}: l\in\mathcal{R}\}$, si ha che $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è 2-matroidale e soddisfa la condizione (φ). Infatti siano $\{x,y,z\}$ tre punti non allineati di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, α il piano di $PG(d,q)$ che li congiunge. Il sottospazio $\pi=\alpha\cap\mathbf{P}$ di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è un piano, in quanto, denotato con m la minima cardanalità delle rette di π, se esistesse in π un sottospazio proprio S contenente tre punti indipendenti, dovrebbe aversi $|S|\ge m(m-1)+1$ e quindi, se $t\in\pi-S$, per t passerebbero almeno $|S|$ rette di π, ma le rette di π per t sono $q+1$, onde sarebbe $q\ge m^2-m$, cioè $m\le\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}$, mentre è $m>\frac{1+\sqrt{1+4q}}{2}$. Ne segue che π risulta la chiusura di $\{x,y,z\}$ in $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, onde $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è 2-matroidale. Inoltre ogni fascio di rette di π ha $q+1$ rette, se ne deduce l'asserto.

Osserviamo che la disuguaglia (2.2) è essenziale, in quanto esistono, come ora proveremo con il seguente esempio, sottoinsiemi $\mathbf{P}$ di $PG(d,q)$, tali che posto $\mathcal{L}=\{l\cap\mathbf{P}: l\in\mathcal{R}\}$ si ha che $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ non è 2-matroidale. Sia $q_1=p^h\ge3$, con p primo ed h intero positivo, e $q=p^{sh}$, con $s\ge3$. In $PG(d,q)$ sia α un piano e $\pi=PG(2,q_1)$ un subpiano di α di ordine q_1. Ogni retta di α o è esterna a π, o incontra π in un sol punto, ovvero l'incontra in q_1+1 punti. Tali ultime rette sono in numero di $q_1^2+q_1+1$ e sia K l'unione di esse. Si consideri $\mathbf{P}=(PG(d,q)-K)\cup\pi$. Evidentemente ogni retta l di α incontra $\mathbf{P}$ in $q+1-(q_1^2+q_1+1)$ punti, se l è esterna a π, in $q+1-q_1^2$ punti, se l è 1-secante π, in q_1+1 punti, se l è secante π.

Quindi, essendo $q_1 \geq 3$ ed $s \geq 3$, ogni retta di $PG(d,q)$ ha almeno $q_1 + 1$ punti in comune con $\mathbf{P}$. Ne segue che, se S è un qualsiasi sottospazio di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, il numero delle rette per un punto di S in S è costante (si tenga conto che $\alpha \cap \mathbf{P}$ in $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ contiene un unico sottospazio proprio non banale,dato da π) . Ma $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ non è 2-matroidale: infatti se z,t sono due punti distinti di π, l è la retta di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ per z,t, $x \in \pi - l$ ed $y \in \alpha \cap \mathbf{P} - \pi$ [poiché $|\overline{l \cup y}| \geq (q_1+1)(q-q_1^2)+1 > q+1$ e per x passano esattamente $q+1$ rette di $\alpha \cap \mathbf{P}$] si ha che $x \in \overline{l \cup y}$, mentre $y \notin \overline{l \cup x} = \pi$, onde $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ non è 2-matroidale.

ESEMPIO 4.- Analogo all'esempio 3, pur di sostituire a $PG(d,q)$ gli esempi 1 o 2.

Proviamo che:

Teorema 2.5 *Sia H una (n)-varietà quasiregolare di uno spazio lineare $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ 2-matroidale, soddisfacente la condizione φ e tale che ogni retta abbia almeno tre punti. Se H ammette un seminucleo x, allora $n = 2$ e ogni retta l per x non contenuta in $N = \cup_{y \in H}\tau(y)$ è tangente ad H. Ne segue che se x è un nucleo ogni seminucleo di H è un nucleo.*

<u>Dimostrazione</u>: Per il Teor. 2.3 risulta $n = 2$. Sia z un punto di l, con $z \neq x$. Poiché $z \notin N$, per z passa una retta, s, 2-secante H. Sia $\pi = \overline{l \cup s}$ ed r il numero delle rette di un fascio del piano π. Per il Teor. 2.3 si ha che $\pi \cap H$ è una ovale che ammette come nucleo x, dunque ogni retta di π per x è tangente H, onde l è tangente H, come volevasi provare. Se x è un nucleo, sia $x' \in N - V$ [V essendo lo spazio dei punti singolari di H], l' una qualsiasi retta per x' contenuta in N, con $x \notin l'$, π' il piano $\overline{x \cup l'}$ ed $r = r(\pi')$. Si ha [essendo x un nucleo] $|\pi' \cap V| = r$. Ma allora le rette proiezioni da x' della retta $\pi' \cap V$ sono in numero di r e quindi esauriscono le rette per x' di π', onde l' incontra V, ne segue che anche x' è un nucleo. Si ha così l'asserto.

Teorema 2.6 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare 2-matroidale, soddisfacente alla condizione φ e tale che ogni retta abbia almeno tre punti e sia H una (n)-varieta quasiregolare di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ dotata di seminuclei (allora è $n = 2$). Se l è una retta esterna ad H per un seminucleo x, allora $l \subseteq N$ e per ogni $y \in H - V$ si ha che $\overline{(l \cup \{y\})} \cap H$ è una retta. In particolare se $\overline{(l \cup \{y\})}$ è un sistema di Steiner, esso è un piano affine.*

<u>Dimostrazione</u>: Segue dai Teoremi 2.5 e 2.3.

Teorema 2.7 *Se $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è un sistema di Steiner 2-matroidale (finito o infinito, ma con piani finiti) privo di piani affini ed H è una (2)-varieta quasiregolare di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, allora ogni seminucleo x di H è un nucleo, onde $N = p(x,V)$ [cfr. Teor. 2.2], quindi, se H è non singolare, essa ammette al più un nucleo.*

<u>Dimostrazione</u>: Segue dal Teor. 2.6.

Teorema 2.8 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare tale che ogni retta abbia almeno tre punti ed il numero delle rette per un punto sia una costante R e sia Ω un (n)-ovoide di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ che ammetta un nucleo x. Allora $n = 2$, $|\Omega| = R$. $\Omega_x = \Omega \cup \{x\}$ è un $(R+1)$-insieme di tipo $(0,2)$, R è dispari. Se $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è 2-matroidale e i fasci di rette hanno tutti la stessa cardinalità r, ogni piano o è esterno ad Ω_x ovvero incontra Ω_x in un $(r+1)$-insieme di tipo $(0,2)$, onde r è dispari, inoltre $r+1$ divide $R+1$. Se inoltre esiste un sottospazio S di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ tale che: $r+1 < |S \cap \Omega_x| < r^2+r$ allora $(\mathbf{P},\mathcal{L}) = PG(d,2)$, $d \geq 3$, e Ω_x è il complementare di un iperpiano di $PG(d,2)$.*

<u>Dimostrazione</u>: Per il Teor. 2.3 risulta $n = 2$ e poiché le rette per il nucleo x sono R si ha $|\Omega| = R$. Sia $y \in \Omega$, $\tau(y)$ lo spazio tangente in y ad Ω, R' il numero delle rette di $\tau(y)$ per y, risulta allora: $|\Omega| = (R - R') + 1$, ma $|\Omega| = R$, onde $R' = 1$, cioè $\tau(y)$ è la retta xy; ne segue che $\Omega_x = \Omega \cup \{x\}$ è un $(R+1)$-insieme di tipo $(0,2)$ e quindi $R+1$ è pari, cioè R è dispari.

Supponiamo ora che $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ sia 2-matroidale e che i fasci di rette abbiano tutti la stessa cardinalità r. Se π è un piano avente un punto y in comune con Ω_x, le r rette di π per y incontrano Ω_x ulteriormente in un punto, onde è $|\pi \cap \Omega_x| = r+1$, cioè Ω_x è un $(r+1)$-insieme di tipo $(0,2)$ e quindi r è dispari. Sia l una retta esterna ad Ω_x e sia m il numero dei piani per l secanti Ω_x, deve allora aversi: $(r+1)m = R+1$, dunque $r+1$ divide $R+1$.

Sia S un sottospazio di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ tale che: $r+1 < |S \cap \Omega_x| < r^2+r$, porremo $\omega_x = S \cap \Omega_x$ e $\varrho + 1 = |\omega_x|$, onde $\varrho > r$. Per ogni punto $y \in \omega_x$ le rette di S per y sono tutte secanti ω_x e quindi sono in numero di ϱ. Sia t una retta per $y \in \omega_x$ e sia c il numero dei piani per t di S; ciascuno di essi contiene $r-1$ rette per y diverse da t, viceversa ciascuna delle $\varrho - 1$ rette di S per y, diversa da t, determina un tale piano. Ne segue che $(r-1)c = \varrho - 1$, cioè:

$$c = \frac{\varrho - 1}{r - 1} \iff \varrho = (r-1)c + 1. \tag{2.3}$$

Sia l una retta di S esterna ad ω_x e sia a il numero dei piani per l secanti ω_x, si ha: $(r+1)a = \varrho + 1$, cioè, per la (2.3):

$$a = \frac{\varrho + 1}{r + 1} = c - \frac{2(c-1)}{r+1}. \tag{2.4}$$

Essendo r dispari, porremo $r = 2s + 1$. Da (2.3) si ha allora $\varrho = 2sc + 1$. Da (2.4) si ha che:

$$b = \frac{2(c-1)}{r+1} = \frac{(c-1)}{s+1} \tag{2.5}$$

è un intero. Sia σ il numero dei piani secanti ω_x. Poiché ciascuno di tali piani incontra ω_x in $r+1$ punti a tre a tre non allineati, si ha, per le (2.3), (2.4):

$$\sigma = \frac{(\varrho+1)\varrho(\varrho-1)}{(r+1)r(r-1)} = ac\frac{(2sc+1)}{(2s+1)} \tag{2.6}$$

Non può essere $b = 0$, altrimenti sarebbe $c = 1$, cioè S sarebbe un piano, ossia $\varrho = r$. Ne può essere $b \geq 2$, altrimenti dalle (2.5) e (2.3) si avrebbe $\varrho + 1 = |\omega_x| \geq r^2 + r$, mentre ciò è escluso dalle ipotesi. Risulta dunque $b = 1$. Ma allora dalle (2.4), (2.5), (2.6) si ottiene: $c = s + 2$, $a = s + 1$ e

$$\sigma = (s+1)(s+2)\frac{(2s^2 + 4s + 1)}{(2s+1)}$$

che, dovendo essere intero, comporta che sia $s = 1$ e quindi $r = 2s + 1 = 3$. Ma allora ogni piano di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è un piano di Fano e quindi $(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = PG(d, 2)$, con $d \geq 3$, e Ω_x è il complementare di un iperpiano in $PG(d, 2)$. Si ha così l'asserto.

Teorema 2.9 *Sia $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ un sistema di Steiner, $S(2, q+1, v)$, con $q \geq 3$, 2-matroidale, con piani equicardinali e sia H una (2)-varietà di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ quasiregolare, che ammetta un nucleo x e che non sia un ovoide (altrimenti cfr. Teor. 2.8). Allora $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è uno spazio di Galois $PG(d, q)$, con q pari e $d \geq 3$, ed H è una quadrica (singolare o non), ovvero un cono di $PG(d, q)$ con spazio vertice un S_{d-3} e direttrice un $(q+1)$-arco piano.*

Dimostrazione: Per il Teor. 2.3 ogni piano per x che contenga una secante di H, incontra H in una ovale che ammette x come nucleo. Se quindi π è un piano congiungente x con una retta l di H esso non conterrà secanti di H, dunque $\pi \cap H$ è un sottospazio proprio di π [perché $x \notin H$], ma allora $\pi \cap H = l$. Poichè x è un nucleo di H, il numero delle rette di π per x uguaglia la cardinalità di l, cioè è $q + 1$. Ne segue che π è un $S(2, q+1, q^2+q+1)$ ossia è un piano proiettivo. Ma allora, poiché i piani di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ sono equicardinali, ogni piano di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è proiettivo, quindi $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è uno spazio proiettivo finito d'ordine q e dimensione $d \geq 3$, ossia $(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = PG(d, q)$. Dal Teor. 4.6 segue allora l'asserto.

3 Le (n)-varietà negli spazi di Galois $PG(r, q)$, con $q > 2$.

Sia H una (n)-varietà di uno spazio di Galois $PG(r, q)$, con $q = p^h > 2$, p primo (cfr. [13]). Si prova facilmente che:

Teorema 3.1 *Se la (n)-varietà H di $PG(r, q)$ è singolare, essa risulta un cono con spazio vertice un S_d e proiettante da S_d una (n)-varietà non singolare, H', di un S_{r-d-1} sgembo con l'S_d. Inoltre H è rispettivamente quasiregolare o regolare se, e solamente se, tale risulta H'.*

Lo studio delle (n)-varietà è così ricondotto a quello delle (n)-varietà non singolari. Proviamo che:

Teorema 3.2 *In $PG(2, q)$ una (n)-varietà H quasiregolare è necessariamente una delle seguenti:*

(1) n rette formanti fascio;

(2) un insieme di tipo $(0, n)$, cioè una (n)-iperovale (ed allora $|H| = q(n-1) + n$ ed n divide q);

(3) una (n)-ovale di tipo $(0, 1, n)$ (ed allora $n < \sqrt{q} + 1$ ed $|H| < q\sqrt{q} + 1$);

(4) una (n)-ovale di tipo $(1, n)$, ma allora è $n = \sqrt{q} + 1$ e $|H| = q\sqrt{q} + 1$ (cfr. [16]).

Dimostrazione: Se H contiene due rette il loro punto d'incontro è singolare per H e quindi si ha il caso (1). Se H contiene una sola retta l, per ogni $y \in H$, si ha $\tau(y) = \{y\}$ (altrimenti H sarebbe singolare), onde $|H| = (q+1)(n-1)+1$; d'altra parte (pensando i punti di H distribuiti sulle rette per $x \in H$) risulta $|H| = q(n-1)+q+1$, uguagliando i due valori di $|H|$ così ottenuti si ha l'assurdo $n = q+1$. Dunque o si ha il caso (1) oppure H non contiene rette, ma allora si hanno i casi (2), (3), (4). Proviamo ora che nei casi (3) e (4) deve aversi: $n \leq \sqrt{q}+1$ ed $|H| \leq q\sqrt{q}+1$ i segni di uguaglianza avendosi se, e soltanto se, H non ammette rette esterne; infatti, denotato con t_o, t_1, t_n rispettivamente il numero delle rette esterne, tangenti ed n-secanti H, risulta:

$$t_o + t_1 + t_n = q^2+q+1, \quad t_1 = |H| = q(n-1)+1, \quad t_1 + nt_n = [q(n-1)+1](q+1),$$

da cui si ha:

$$t_o = \frac{q(q-1)}{n} - q(n-2)$$

e quindi, essendo $t_o \geq 0$:

$$n \leq \sqrt{q}+1, \qquad |H| \leq q\sqrt{q}+1.$$

$$t_o = 0 \iff n = \sqrt{q}+1 \iff |H| = q\sqrt{q}+1.$$

È stato provato da M. Tallini Scafati in [17] che:

Teorema 3.3 *In $PG(r,q)$, con $r \geq 3$ e $q > 4$, una (n)-varietà H non singolare, priva di rette esterne, con $3 \leq n \leq q-1$ ed $n \neq \frac{q}{2}+1$, è una varietà hermitiana non singolare ed allora H è regolare, q è un quadrato ed $n = \sqrt{q}+1$.*

In [17] si trova anche una caratterizzazione completa delle (q)-varietà prive di rette esterne. Precisamente viene provato che (cfr. [17] n.4, prop.VI, pg.278-279):

Teorema 3.4 *In $PG(r,q)$ una (q)-varietà priva di rette esterne è costituita dai punti esterni ad un sottospazio S_t $(0 \leq t \leq r-1)$ e da quelli di un sottospazio S_{t-1} contenuto nell'S_t. Ogni tale (q)-varietà, se $t \leq r-2$, non risulta quasiregolare, se $t = r-1$ è costituita da q iperpiani formanti fascio.*

Da A. Barlotti è stato provato in [2] che:

Teorema 3.5 *In $PG(r,4)$, $r \geq 3$, una (3)-varietà regolare non singolare priva di rette esterne è una varietà hermitiana non singolare.*

Proviamo che:

Teorema 3.6 *In $PG(3,q)$ ogni (n)-ovoide H è tale che $n = q$ e $H = AG(3,q)$, ovvero $n = 2$ ed H è una (q^2+1)-calotta.*

Dimostrazione: Sia $x \in H$, si ha necessariamente:

(1) $\tau(x) = \{x\} \implies |H| = (q^2+q+1)(n-1)+1$,
(2) $\tau(x) = retta \implies |H| = (q^2+q)(n-1)+1$,
(3) $\tau(x) = piano \implies |H| = q^2(n-1)+1$.

Se ne deduce che se x presenta il caso (i) (i=1,2,3), per ogni punto y di H si presenta il caso (i). Nel caso (1) allora si ha che H è di tipo $(0,n)$ e quindi (cfr. [17] n.5, prop. VIII, pg.279, oppure [9] n.3, prop. XIV) è $n = q$ ed H è il complementare di un piano, cioè $H = AG(3,q)$. Esaminiamo il caso (2). Sia $t_x = \tau(x)$ la retta tangente in x ad H. Ogni piano per t_x incontra H in una (n)-ovale (cfr. Teor. 3.2); sia $y \in H$, con $y \neq x$, e t_y la tangente in y ad H; se t_y è sgemba con t_x il piano π che congiunge x con t_y è diverso dal piano congiungente y con t_x; d'altra parte π incontra H in una (n)-ovale e sia t'_x la tangente in x a tale (n)-ovale in π; quindi per x passano due distinte tangenti ad H, la t_x e la t'_x e ciò è escluso. Dunque le rette tangenti ad H sono a due a due incidenti e quindi, non potendo manifestamente essere complanari (perché altrimenti H starebbe in un piano), esse passano tutte per uno stesso punto z, ma allora $(q^2+q)(n-1)+1 \leq q^2+q+1$, da cui segue $n = 2$ e che H è una (q^2+q+1)-calotta e ciò è assurdo (cfr. [5], n. 2). Dunque il caso (2) non può presentarsi. Esaminiamo il caso (3). Sia l una retta esterna ad H ed u e v rispettivamente il numero dei piani per l tangenti o esterni ad H. I rimanenti $q+1-(u+v)$ piani per l incontrano ciascuno H in una (n)-ovale (cfr. Teor. 3.2) e quindi in $q(n-1)+1$ punti. Deve allora aversi (pensando i punti di H distribuiti sui piani per l):

$$|H| = q^2(n-1)+1 = (q+1-(u+v))(q(n-1)+1)+u,$$

da cui

$$v = q[n-(u+v))(n-1)]. \qquad (3.1)$$

Risulta $0 \le v < q$ [se fosse $v = q+1$ sarebbe $H = \emptyset$, se fosse $v = q$ sarebbe $|H| = q(n-1)+1$ e ciò è escluso dalla (3)]. Dalla (3.7) allora segue che deve essere $0 \le n-(u+v)(n-1) < 1$, cioè $n = (u+v)(n-1)$, da cui $n = 2$. Ne segue l'asserto.

Teorema 3.7 *In $PG(r,q)$, con $r \ge 3$, sia H una (n)-varietà quasiregolare e non singolare. Se esiste un piano π che incontra H in un sol punto, x, allora $n = 2$.*

Dimostrazione: Sia s una retta n-secante per x (certamente esistente perché H è non singolare). Si consideri il sottospazio S_3 di $PG(r,q)$ che congiunge π con s. Ogni retta per x dell'S_3, non contenuta in π, è n-secante H (altrimenti tutto l'S_3 dovrebbe essere contenuto in $\tau(x)$ e quindi s non potrebbe essere n-secante H). Ne segue che $H' = S_3 \cap H$ non può contenere rette (altrimenti una tale retta dovrebbe passare per x e ciò è escluso per quanto detto sopra). Dunque H' è un (n)-ovoide di $S_3 = PG(3,q)$. Dal Teor. 3.6 segue allora che $n = 2$ (non potendo essere $H' = AG(3,q)$ perché $\pi \cap H' = \{x\}$). Si ha così l'asserto.

Teorema 3.8 *In $PG(r,q)$, con $r \ge 3$, sia H una (n)-varietà quasiregolare e non singolare. Se esiste una retta v esterna ad H allora è $n = 2$, ovvero $H = AG(r,q)$.*

Dimostrazione: Supponiamo che H ammetta una retta tangente, t, in un punto z. Si consideri un sottospazio S_3 che contenga t e v. Se $H' = H \cap S_3 = \{z\}$, il piano che congiunge z con v incontra H solo in z e quindi (cfr. Teor. 3.7) risulta $n = 2$. Se H' è un sottospazio di $PG(r,q)$, diverso da $\{z\}$, non potendo essere un piano (perché v è esterna ad H), è una retta per z sgemba con v. Allora il piano per z e per v incontra H solo in z e quindi, per il Teor. 3.7, risulta $n = 2$. Possiamo quindi supporre che H' sia una (n)-varietà quasiregolare, non contennte piani. Se essa è singolare con vertice un punto y, il piano per y e per v incontra H solo in y e quindi (cfr. Teor. 3.7) risulta $n = 2$. Dunque possiamo supporre H' non singolare. Se H' non contiene rette, cioè è un (n)-ovoide, per il Teor. 3.6, non potendo essere $H' = AG(3,q)$ (perché H' ammette la tangente t) risulta ancora $n = 2$. Supponiamo infine che H' sia non singolare e contenga qualche retta. Se l è una retta di H' e $z \in H' - l$, il piano per z ed l incontra H' in n rette formanti fascio (cfr. Teor. 3.2) e quindi per z passa una sola retta di H' incidente l. Ne segue che H' è rigata e che per ogni punto $x \in H'$ lo spazio $\tau(x)$, tangente in x ad H', è un piano che incontra H' in n rette per x. Denotato con $\mathcal{L}$ la famiglia delle rette di H' si ha allora che $(H', \mathcal{L})$ risulta un quadrangono di parametri $q+1$ ed n.

Ricordiamo che un *quadragono* di parametri s e t è uno spazio geometrico $(\mathbf{S}, \mathcal{L})$ (gli elementi di $\mathbf{S}$ si dicono punti, quelli di $\mathcal{L}$ si dicono rette ed F_x denota l'insieme delle rette per $x \in \mathbf{S}$) tale che:

$$\forall l_1, l_2 \in \mathcal{L}, \quad l_1 \neq l_2 \quad \Longrightarrow \quad |l_1 \cap l_2| \le 1, \tag{3.2}$$

$$\forall l \in \mathcal{L}, \quad |l| = s \ge 3, \tag{3.3}$$

$$\forall x \in \mathbf{S}, \quad |F_x| = t \ge 2, \tag{3.4}$$

$$\forall x \in \mathbf{S}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \quad x \notin l \quad \Longrightarrow \quad \exists! l' \in \mathcal{L}: \quad x \in l', \quad |l \cap l'| = 1. \tag{3.5}$$

In [4] viene provato che per un quadragono di parametri s e t, con $t \ge 3$, risulta

$$t \le (s-1)^2 + 1, \qquad s \le (t-1)^2 + 1. \tag{3.6}$$

Il quadragono $(H', \mathcal{L})$ ha parametri $s = q+1$ e $t = n$. Quindi se $n \ge 3$, per l'ultima disuguaglianza precedente, deve aversi $n \ge \sqrt{q}+1$. D'altra parte se $x \in H'$ il piano per x e la retta esterna v incontra $\tau(x)$ in una retta tangente ad H' in x e quindi incontra H' in un n-ovale di tipo $(0,1,n)$ (cfr. Teor. 3.2 e Tepr. 3.7), ma allora deve essere $n < \sqrt{q}+1$ mentre è $n \ge \sqrt{q}+1$. Ne segue che se H ammette una tangente risulta in ogni caso $n = 2$.

Se H non ammette rette tangenti, esso è un insieme di classe $[0, n, q+1]$ di $PG(r,q)$, $r \ge 3$ e quindi necessarimente è $n = q$ (cfr. Theorem 2.8 di [14] e prop. VIII di [17]). Ne segue che il complementare di H è un sottospazio di $PG(r,q)$ che deve essere un iperpiano, altrimenti H non sarebbe quasiregolare, cioè $H = AG(r,q)$. Si ha così l'asserto.

Teorema 3.9 *In $PG(r,q)$, con $r \ge 3$, per una (n)-varietà H quasiregolare, non singolare, con $3 \le n \le q-1$, risulta $n = \sqrt{q}+1$.*

Dimostrazione: Per il Teor. 3.8 H non ammette rette esterne e quindi, se fosse $n \neq \sqrt{q}+1$, per il Teor. 3.2 ogni piano non contenuto in H incontrerebbe H in n rette formanti fascio, oppure in una retta. Sia l una n-secante di H e π un piano per l. Esso incontra H in n rette formanti fascio con centro un punto x. Se t è una tangente ad H di π (onde $x \in t$), ogni piano per t incontra H in n rette formanti fascio con centro x, oppure in una retta per x. Ma allora x è un punto singolare per H. Si ha così l'asserto.

Dai Teoremi 3.3, 3.4, 3.5, 3.8, 3.9 si ha:

Teorema 3.10 *In $PG(r,q)$, con $r \geq 3$ e $q > 4$, ogni (n)-varietà H quasiregolare non singolare, con $n \geq 3$ è una varietà hermitiana non singolare ovvero è $H = AG(r,q)$. Se $q = 4$ ogni 3-varietà regolare non singolare è una forma hermitiana non singolare.*

Dai Teoremi 3.1, 3.2, 3.10 si ottiene una caratterizzazione completa delle (n)-varietà quasiregolari di $PG(r,q)$, con $r \geq 3$ e $n \geq 3$.

4 Le (2)-varietà negli spazi di Galois $PG(r,q)$, con $q > 2$.

In forza del Teor. 3.1 e tenuto conto che in $PG(2,q)$ una (2)-varietà risulta costituita da una retta e un punto, o da due rette, ovvero da un k-arco, ci possiamo limitare a studiare le (2)-varietà non singolari di $PG(r,q)$ con $r \geq 3$. Porremo nel seguito:

$$\theta_{s,q} = \sum_{i=0}^{s} q^i. \tag{4.1}$$

Da G.Tallini in [7] (cfr. anche [6]) è stato provato che:

Teorema 4.1 *In $PG(r,q)$, con $r \geq 3$ e $q \geq 3$, una (2)-varietà H non singolare, con $|H| \geq \theta_{r-1,q}$, non costituita da un iperpiano e un sottospazio (sgembo con l'iperpiano), risulta, se q è dispari, una quadrica non singolare se r è pari, una quadrica iperbolica se r è dispari. Se q è pari, oltre ai casi precedenti H si compone di una quadrica Q (singolare o non) che ammette uno spazio nucleo, con l'aggiunta di un punto x dello spazio nucleo (con $x \notin Q$), ovvero di un cono proiettante da uno*

spazio S_{r-3} un $(q+1)$-arco piano, con l'aggiunta di un punto x del suo spazio, S_{r-2}, nucleo (con $x \notin S_{r-3}$). Notiamo che in questi ultimi casi H non è quasiregolare.

Dal precedente Teorema si ha che:

Teorema 4.2 *In $PG(r,q)$ con $r \geq 3$ e $q \geq 3$ ogni (2)-varietà H non singolare quasiregolare, con $|H| \geq \theta_{r-1,q}$, risulta una quadrica non singolare. Precisamente, se r è pari ($r = 2s$) H è una qualsiasi quadrica non singolare di $PG(2s,q)$ ed è $|H| = \theta_{2s-1,q}$; se r è dispari ($r = 2s+1$) H è una quadrica iperbolica di $PG(2s+1,q)$ ed è $|H| = \theta_{2s,q} + q^s$.*

Si prova (cfr. B.Qvist [5] e A.Barlotti [1]):

Teorema 4.3 *In $PG(3,q)$, con $q \geq 3$, una (2)-varietà H priva di rette (cioè una $|H|$-calotta) è tale che $|H| \leq q^2+1$ e se $|H| = q^2+1$ essa è un (2)-ovoide regolare e se q è dispari è una quadrica ellittica. Ne segue che ogni (2)-ovoide è regolare e sarà chiamato semplicemente ovoide.*

Proviamo che:

Teorema 4.4 *Se in $PG(r,q)$, con $q \geq 3$ e $r \geq 3$, esiste una (2)-varietà quasiregolare H priva di rette allora $r = 3$ ed H è un ovoide.*

<u>Dimostrazione</u>: Se $r = 3$ l'asserto segue dal Teor. 4.3. Supponiamo $r \geq 4$, sia s una secante di H e π un piano per s. Ogni S_3 per π incontra H in una (2)-varietà quasiregolare priva di rette, cioè in un ovoide (cfr. Teoremi 3.6 e 4.3), onde $|H \cap S_3| = q^2 + 1$ e $|H \cap \pi| = q + 1$. Ne segue che:

$$|H| = (q^2 - q)\theta_{r-3,q} + (q+1) = q^{r-1} + 1, \tag{4.2}$$

Ma in [7] (Teorema del n.4, pg.124) si prova che il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di $PG(r,q)$, con $q \geq 3$ e $r \geq 4$, risulta $< q^{r-1} + 1$ e ciò è in contrasto con la precedente uguaglianza. L'assurdo prova l'asserto.

G.Tallini in [8] ha provato che:

Teorema 4.5 *In $PG(r,q)$, con $r \geq 4$ e $q \geq 4$, una (2)-varietà H con $|H| = \theta_{r-1,q} - q^{\delta+1}$, ove δ è la massima dimensione degli spazi contenuti in H, è tale che δ verifica le limitazioni $\frac{r-3}{2} \leq \delta \leq r-2$ ed inoltre che per $\delta = \frac{r-3}{2}$ (e quindi r dispari)*

H risulta una quadrica non singolare di tipo ellittico (onde è $|H| = \theta_{r-1,q} - q^{\frac{r-1}{2}}$), per $\frac{r-3}{2} < \delta \leq r-4$ (e quindi $r > 5$), essa è un cono quadrico di tipo ellittico con spazio vertice un $S_{2\delta+2-r}$, per $\delta = r-3$ H risulta un cono con spazio vertice un S_{r-4} e proiettante da S_{r-4} un ovoide di uno spazio S_3 sgembo con l'S_{r-4} (e quindi un cono quadrico se q è dispari).

Proviamo ora che:

Teorema 4.6 *In $PG(r,q)$, con $r \geq 3$ e $q \geq 4$, ogni (2)-varietà H non singolare e quasiregolare è una quadrica non singolare (e quindi H risulta regolare), oppure è un ovoide di $PG(3,q)$, con q pari.*

Dimostrazione: Se H non contiene rette allora è $r = 3$ ed H è un ovoide (cfr. Teor. 4.4). Se H contiene una retta l, per ogni $x \in H - l$, il piano che congiunge x ed l o appartiene ad H ovvero incontra H, oltre che in l, in una retta l' per x (cfr. Teor. 3.2); dunque H è rigata. Se x ed y sono due punti di H tali che la retta xy non sia contenuta in H, le rette per x di H sono biettive con quelle per y (infatti se l è una retta per x di H, il piano congiungente y ed l incontra H nella retta l ed in una retta l' per y e viceversa per il Teor.3.2). Se ne deduce che per ogni $x \in H$ passa un numero N costante di rette di H e che è $N \geq 2$. Tenuto conto di ciò e dei Teoremi 4.2 , 4.3, 3.1, 3.2 segue facilmente l'asserto per $r = 3$ ed $r = 4$. Possiamo allora procedere per induzione rispetto ad r, supponendo $r \geq 5$ e vero l'asserto per $r-1$.

Sia Π un qualsiasi iperpiano di $PG(r,q)$. Poiché H è rigata risulta $H \cap \Pi \neq \emptyset$. Se fosse $|H \cap \Pi| = 1$, cioè $H \cap \Pi = \{x\}$, $x \in H$, ogni retta di H dovrebbe passare per x e quindi $\tau(x) = PG(r,q)$, ossia x sarebbe singolare per H. Dunque $H \cap \Pi$ o è una (2)-varietà quasiregolare di Π, ovvero è un sottospazio S_d, con $d \geq 1$. Nel primo caso se la (2)-varietà $H \cap \Pi$ avesse una retta singolare l, sia $x \in l$ ed $y \in H - \tau(x)$. Il piano α congiungente y con l intersecherebbe H, oltre che in l, in una retta l', per il Teor. 3.2; sia $z = l \cap l'$, risulterebbe allora $\tau(z) = PG(r,q)$ (perchè $\Pi \subseteq \tau(z)$ essendo z singolare per $H \cap \Pi$ in Π ed l' passa per z ma non appartiene a Π), cioè H sarebbe singolare e ciò è escluso. In modo analogo si giunge all'assurdo se $H \cap \Pi$ è un sottospazio S_d. Si è così provato che $H \cap \Pi$ è una (2)-varietà quasiregolare che è non singolare ovvero ammette un unico punto singolare x ed allora $\Pi = \tau(x)$. Per l'induzione nel primo caso $H \cap \Pi$ è una quadrica non singolare, nel secondo caso

per il Teor. 3.1, $H \cap \Pi$ è un cono proiettante dal punto singolare x una quadrica non singolare di un $\overline{S}_{r-2}$ di Π non per x, ovvero , se $r = 5$ e q è pari, un ovoide di $\overline{S}_3$.

Proviamo che, se H ammette un iperpiano tangente Π in x ad H, allora H è una quadrica non singolare. Se r è pari, poiché $(\overline{S}_{r-2} \cap H) = \theta_{r-3,q}$, si ha (considerando i punti di H distribuiti sulle rette per x): $|H| = q^{r-1} + q\theta_{r-3,q} + 1 = \theta_{r-1,q}$ e quindi, per il Teor. 4.2, H è una quadrica non singolare. Se r è dispari e $(\overline{S}_{r-2} \cap H)$ è una quadrica iperbolica (onde $|(\overline{S}_{r-2} \cap H)| = \theta_{r-3,q} + q^{\frac{r-3}{2}}$) risulta : $|H| = q^{r-1} + q(\theta_{r-3,q} + q^{\frac{r-3}{2}}) + 1 > \theta_{r-1,q}$, quindi per il Teor. 4.2 si ha che H è una quadrica iperbolica. Se r è dispari é $(\overline{S}_{r-2} \cap H)$ è una quadrica ellittica o un ovoide (se $r = 3$ e q è pari), si ha che la dimensione massima degli spazi di $(\overline{S}_{r-2} \cap H)$ è $\frac{r-5}{2}$, inoltre che $|\overline{S}_{r-2} \cap H| = \theta_{r-3,q} - q^{\frac{r-3}{2}}$. Ne segue che $|H| = q^{r-1} + q(\theta_{r-3,q} - q^{\frac{r-3}{2}}) + 1 = \theta_{r-1,q} - q^{\frac{r-1}{2}}$ e che gli spazi di dimensione massima di H hanno dimensione $\frac{r-3}{2}$; dal Teor. 4.5 otteniamo allora che H è una quadrica ellittica.

Ci rimane da provare dunque che esiste almeno un iperpiano tangente ad H. Se così non fosse ogni iperpiano Π incontrerebbe H in una quadrica non singolare. Se r è dispari tale quadrica avrebbe allora $\theta_{r-2,q}$ punti, onde H sarebbe ad un sol carattere rispetto agli iperpiani e quindi $H = \emptyset$ ovvero $H = PG(r,q)$ (cfr. [9] teor.I,[11]) e ciò è assurdo. Se r è pari non può accadere che $\Pi \cap H$ è sempre di tipo ellittico, altrimenti H sarebbe ad un sol carattere rispetto agli iperpiani e si ha l'assurdo. Esiste dunque un iperpiano $\overline{\Pi}$ che incontra H in una quadrica iperbolica. Sia $x \in \overline{\Pi} \cap H$. Lo spazio tangente, $\tau(x)$, in x ad H non può essere un iperpiano (in quanto siamo nell'ipotesi che ogni iperpiano incontra H in una quadrica non singolare) e quindi $\tau(x)$ coincide con l'S_{r-2} tangente in x ad $\overline{\Pi} \cap H$ in $\overline{\Pi}$. Considerando i punti di H distribuiti sulle rette per x si ha allora:

$$|H| = q^{r-1} + q^{r-2} + q(|S_{r-3} \cap H|) + 1 = q^{r-1} + q^{r-2} + q(\theta_{r-4,q} + q^{\frac{r-4}{2}}) + 1 > \theta_{r-1,q}$$

e quindi, per il Teor. 4.2, H sarebbe una quadrica non singolare, ma allora ammetterebbe iperpiani tangenti, contro l'ipotesi. Segue così completamente l'asserto.

Dai Teoremi 3.1 e 4.6 segue che:

Teorema 4.7 *Ogni (2)-varietà quasiregolare di $PG(r,q)$, $r \geq 3$ e $q \geq 4$, risulta una quadrica singolare o non, oppure, se q è pari, è un cono proiettante da uno spazio vertice S_{r-4} un ovoide di un S_3, o un cono proiettante da uno spazio vertice S_{r-3} una ovale o una iperovale piana.*

5 Caratterizzazioni di (n)-varietà quasiregolari in opportuni spazi lineari.

Cominciamo a dimostrare che:

Teorema 5.1 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare tale che: $\forall l \in \mathcal{L}$, $|l| = q+1$ e che ammette un primo Π. Allora ogni piano non contenuto in Π è un piano proiettivo.*

Dimostrazione: Sia α un piano di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ non contenuto in Π, $x \in \alpha - \Pi$, l_1, l_2 rette distinte di α per x, $x_i = l_i \cap \Pi$, $i = 1,2$, $l = x_1x_2$. Risulta $\alpha \cap \Pi = l$ (in quanto, essendo α un piano, in α non vi sono sottospazi non banali). Ma allora, poiché Π è un primo, α è la proiezione da x della retta l. Ne segue che $|\alpha| = q^2+q+1$ e cioè α è un sistema di Steiner $S(2,q+1,q^2+q+1)$ ossia è un piano proiettivo.

Osserviamo che esistono svariati spazi $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ soddisfacenti all'ipotesi del Teor. 5.1, che non sono spazi proiettivi. Proviamo ora che:

Teorema 5.2 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ un sistema di Steiner 2-matroidale (cfr. n.1) $S(2,q+1,v)$, con $q \geq 4$ e $v > \theta_2$, e che contenga un primo Π, allora $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è uno spazio di Galois $PG(r,q)$, con $v = \theta_{r,q}$.*

Dimostrazione: Se x,y,z sono tre punti non allineati di $\mathbf{P} - \Pi$ la loro chiusura è un piano α (essendo $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ 2-matroidale) e quindi, per il teorma precedente, è un piano proiettivo, onde $\alpha - \Pi$ è un piano affine d'ordine $q \geq 4$. Ne segue, per il teorema di F.Buekenhaut [3], che $\mathbf{P} - \Pi$ rispetto alle rette date da $\mathcal{L}' = \{l - \Pi : l \in \mathcal{L}, l$ non in $\Pi\}$ è uno spazio affine $AG(r,q)$. Sia ora β un qualsiai piano di Π e y,z,t tre suoi punti indipendenti, onde $\beta = \overline{\{y,z,t\}}$. Sia $x \in \mathbf{P} - \Pi$, lo spazio $S = \overline{x \cup \beta} = \overline{\{x,y,z,t\}}$ è tale che $S - \Pi$ è lo spazio affine $AG(3,q)$ che in $AG(r,q)$ congiunge le rette xy, xz, xt. Se l_1 ed l_2 sono due rette distinte di β, i piani $\alpha_1 = \overline{x \cup l_1}$ ed $\alpha_2 = \overline{x \cup l_2}$ sono tali che $\alpha_1 - l_1$ ed $\alpha_2 - l_2$ sono due piani di $AG(3,q)$ passanti per x. Dunque essi si incontrano in una retta il cui punto improprio è $l_1 \cap l_2$, onde l_1 e l_2 sono incidenti, cioè β è un piano proiettivo. Si è così provato che ogni piano di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è un piano proiettivo di ordine q e quindi che $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è uno spazio di Galois $PG(r,q)$ con $v = \theta_{r,q}$.

Dal teorema precedente e dai teoremi 3.1, 3.2, 3.10, 4.6 si ha:

Teorema 5.3 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ un sistema di Steiner 2-matroidale $S(2,q+1,v)$, con $q \geq 4$ e $v > \theta_2$ e sia H una (n)-varietà quasiregolare con un punto fortemente regolare (cfr. n.1) di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$. Allora $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è uno spazio di Galois $PG(r,q)$, con $r \geq 3$, e, per $n = 2$, H è una quadrica singolare o non, oppure, se q è pari, è un cono proiettante da un S_{r-4} o da un S_{r-3} rispettivamente un ovoide di un S_3 o una ovale oppure una iperovale piana, per $n \geq 3$ e $q > 4$, H è una varietà hermitiana singolare o non, oppure un cono proiettante da un S_{r-3} una (n)-ovale o una (n)-iperovale piana, oppure $H = AG(r,q)$.*

Proviamo che:

Teorema 5.4 *Sia $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ uno spazio lineare finito 2-matroidale tale che ogni fascio di rette abbia cardinalità costante $q+1$ e sia H una (n)-varietà di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, fortemente regolare, non singolare e che contenga qualche retta. Allora ogni retta di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ ha cardinalità $q+1$, cioè $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ è un sistema di Steiner 2-matroidale $S(2,q+1,v)$ e quindi, se $q \geq 4$ e $v > \theta_2$, si ha che $(\mathbf{P},\mathcal{L}) = PG(r,q)$, con $v = \theta_{r,q}$, ed H è una quadrica o una varietà hermitiana non singolare di $PG(r,q)$ (cfr. Teor. 5.3).*

Dimostrazione: Sia l una retta di un primo Π di $(\mathbf{P},\mathcal{L})$. Se $x \in \mathbf{P} - \Pi$, il piano $\alpha = \overline{l \cup \{x\}}$ incontra Π in l. D'altra parte le rette di α per x sono $q+1$ e ciascuna di esse incontra Π e quindi l in un punto, viceversa ogni punto di l è congiunto ad x da una retta di α per x, onde $|l| = q+1$. Ne segue che ogni retta che appartiene ad un primo tangente, ha cardinalità $q+1$ e quindi ogni retta tangente ad H oppure che sia contenuta in H ha $q+1$ punti. Mostreremo ora che ogni retta n-secante ed ogni retta esterna ad H ha $q+1$ punti, ne seguirà l'asserto.

Poiché H contiene una retta u, H è rigata: infatti se $y \in H - u$ il primo $\tau(y)$ contiene un punto $z \in u \cap \tau(y)$, ma allora la retta yz appartiene ad H. Sia s una retta n-secante H ed y_1, y_2 punti distinti di $s \cap H$. Poiché H è rigata esiste per y_2 una retta a_2 contenuta in H. Poiché $\tau(y_1)$ è un primo la a_2 incontra $\tau(y_1)$ in un punto x diverso da y_1. Risulta $x \in a_2 \subseteq H$, quindi la retta $a_1 = y_1x$ (essendo contenuta in $\tau(y_1)$ e passando per x) è contenuta in H. Ne segue che $\tau(x)$ contiene a_1 ed a_2 e quindi la retta $s = y_1y_2$, onde s (essendo contenuta nel primo $\tau(x)$) ha $q+1$ punti.

Supponiamo infine che l sia una retta esterna ad H. Sia $y \in H$, se $\tau(y)$ contiene l, allora $|l| = q+1$ per quanto precede. Supponiamo dunque che l non sia contenuta in $\tau(y)$ e sia $\alpha = \overline{l \cup \{y\}}$, allora $\alpha \cap \tau(y)$ è una retta t e tutte le rette per y di α, diverse da t, sono n-secanti H, onde ogni retta del fascio di centro y di α (essendo o n-secante H oppure la retta t che appartiene a $\tau(y)$) ha $q+1$ punti. Ne segue che è :

$$|\alpha| = q(q+1) + 1 = q^2 + q + 1. \tag{5.1}$$

Osserviamo che ogni retta di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ ha al più $q+1$ punti (perché ogni fascio ha $q+1$ rette). Sia $x = l \cap \tau(y)$, tutte le rette di α per x hanno dunque al più $q+1$ punti, tra esse vi è la retta l, se essa avesse meno di $q+1$ punti si avrebbe:

$$|\alpha| < q^2 + q + 1$$

e ciò è in contrasto con la (5.15). Quindi $|l| = q+1$, si ha così l'asserto.

6 (n)-varietà quasiregolari in piani con fasci di cardinalità costante.

Sia $\Pi = (\mathbf{P}, \mathcal{L})$ un piano (cioè uno spazio lineare privo di sottospazi non banali e che contenga tre punti indipendenti) tale che ogni fascio abbia cardinalità costante finita r (ed allora Π è finito, essendo $|\Pi| \le r(r-1)+1$) per esempio ogni

$S(2, q+1, v)$, con $\theta_{1,q} < v < \theta_{3,q}$, oppure l'esempio 3 del n.2 per $d = 2$. Sia H una (n)-varietà quasiregolare di Π. Per un punto x non singolare di H possono presentarsi solamente i seguenti tre casi:

$$\tau(x) = \{x\} \quad \Longrightarrow \quad |H| = r(n-1)+1, \tag{6.1}$$

$$\tau(x) = retta \quad tangente \quad \Longrightarrow \quad |H| = (r-1)(n-1)+1, \tag{6.2}$$

$$\tau(x) = l \in \mathcal{L}, \quad l \subset H \quad \Longrightarrow \quad |H| = (r-1)(n-1)+|l|. \tag{6.3}$$

Si ha subito che se per il punto non singolare x di H si presenta il caso (6.i) (i=16,17,18) per ogni altro punto y non singolare di H si presenta il caso (6.i). Ne segue che nel caso (6.16) H è una (n)-iperovale, cioè un insieme di tipo $(0,n)$ ed allora n deve dividere $r-1$ (cfr. n.1).

Nel caso (6.17) H è una (n)-ovale (cfr. n.1). Esamineremo ora più in dettaglio tale caso. Siano t_0, t_1, t_n rispettivamente i numeri delle rette esterne, tangenti, n-secanti H. Deve aversi:

$$t_0 + t_1 + t_n = |\mathcal{L}|, \tag{6.4}$$

$$t_1 = |H| = (r-1)(n-1)+1, \tag{6.5}$$

$$n(n-1)t_n = |H|(|H|-1). \tag{6.6}$$

Dalle precedenti relazioni si ha:

$$t_n \quad = \quad (r-1)^2 - \frac{(r-1)(r-2)}{n}, \tag{6.7}$$

$$t_0 \quad = \quad |\mathcal{L}| - (r-1)(r+n-2) - 1 + \frac{(r-1)(r-2)}{n}. \tag{6.8}$$

Dalla (6.22) si ha che n deve dividere $(r-1)(r-2)$. Dalla (6.23), essendo $t_0 \ge 0$, otteniamo:

$$|\mathcal{L}| \ge (r-1)(r+n-2) + 1 - \frac{(r-1)(r-2)}{n}, \tag{6.9}$$

$$|\mathcal{L}| = (r-1)(r+n-2) + 1 - \frac{(r-1)(r-2)}{n} \iff t_0 = 0. \tag{6.10}$$

Da quanto precede si deduce che:

Teorema 6.1 *Se n non divide $r-1$, in Π non esistono (n)-iperovali. Se n non divide $(r-1)(r-2)$, in Π non esistono né (n)-ovali né (n)-iperovali, cioè non esistono (n)-varietà quasiregolari prive di rette.*

Esaminiamo ora il caso (6.18). Per ogni punto x non singolare di H passa una retta $l \subset H$ e tali rette hanno tutte la stessa cardinalità che denoteremo con $k(\leq r)$. Supponiamo che H sia *non singolare*. In tal caso H non ammette rette tangenti e le rette di H costituiscono una partizione di H, onde il loro numero h è dato per la (6.18) da:

$$h = \frac{|H|}{k} = 1 + \frac{(r-1)(n-1)}{k} \tag{6.11}$$

quindi:

$$H \quad non \quad singolare \quad \Longrightarrow \quad k \quad divide \quad (r-1)(n-1). \tag{6.12}$$

Sia $z \in \Pi - H$, ogni retta per z o è n-secante ovvero è esterna ad H e sia a il numero di tali rette esterne. Si ha allora: $|H| = (r-a)n$, da ciò e dalla (6.18) otteniamo:

$$a = 1 + \frac{r-k-1}{n} \tag{6.13}$$

quindi:

$$H \quad non \quad singolare \quad \Longrightarrow \quad n \quad divide \quad r-k-1, \tag{6.14}$$

inoltre H è di tipo $(0, n, k)$.

Supponiamo ora che H sia *singolare* e sia y il suo punto singolare (necessariamente unico). H allora risulta l'unione di un certo numero, m, di rette per y, onde $|H| = m(k-1)+1$. Dalla (6.18) si ha allora:

$$m - 1 = \frac{(r-1)(n-1)}{k-1} \tag{6.15}$$

quindi:

$$H \quad singolare \quad \Longrightarrow \quad k-1 \quad divide \quad (r-1)(n-1). \tag{6.16}$$

Sia $z \in \Pi - H$. Per z passano un certo numero, b, di rette esterne ad H, $r-b-1$ rette n-secanti e la retta yz tangente ad H. Si ha allora: $|H| = (r-b-1)n+1$, da ciò e dalle (6.18), (6.30) si ottiene:

$$b = \frac{r-k}{n} = r - 1 - \frac{m(k-1)}{n} \tag{6.17}$$

quindi:

$$H \quad singolare \quad \Longrightarrow \quad n \quad divide \quad r-k. \tag{6.18}$$

Da quanto precede si ha:

Teorema 6.2 *Sia H una (n)-varietà quasiregolare, contenente qualche retta, di un piano Π tale che ogni fascio abbia cardinalità costante r. Allora le rette di H hanno tutte la stessa cardinalità k e costituiscono un ricoprimento di H, una partizione se H è non singolare ed in tal caso H non ammette tangenti. Valgono le (6.26), (6.27), (6.28), (6.29), (6.30), (6.31), (6.32), (6.33). Ne segue che se $k-1$ non divide $(r-1)(n-1)$, H è non singolare ed allora n deve dividere $r-k-1$; se k non divide $(r-1)(n-1)$, H è singolare ed allora n deve dividere $r-k$. Inoltre se le rette di Π hanno cardinalità $\leq k$, per esempio se Π è un sistema di Steiner, se $k-1$ è primo con $r-1$, H è non singolare ed n divide $r-k-1$; se k è primo con $r-1$, H è singolare ed n divide $r-k$.*

Dai Teoremi 6.1 e 6.2 si ottiene per esempio che:

Teorema 6.3 *In un sistema di Steiner $S(2, q+1, v)$, con $\theta_{1,q} < v < \theta_{3,q}$, non esistono (n)-varietà quasiregolari se n non divide $(r-1)(r-2)$, $r-q-1$, $r-q-2$. In particolare in un $S(2, q+1, q^3+1)$, con $q \geq 3$, non esistono (q)-varietà quasiregolari. In un $S(2, 10, 729)$ non esistono (n)-varietà quasiregolari con $n = 3, 6, 9$.*

7 Ulteriori proprietà di (n)-varietà quasiregolari in spazi lineari.

Sia $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ uno spazio lineare. In questo numero H denoterà una (n)-varietà di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ quasiregolare, contenente qualche retta, soddisfacente alla seguente condizione (γ):

(γ) *per ogni retta l di H e per ogni $x \in H - l$, se il sottospazio $\pi = \overline{l \cup \{x\}}$ è contenuto in H, tutte le sue rette abbiano la stessa cardinalità finita, $k(\pi)$, se non è contenuto in H, π sia un piano i cui fasci abbiano tutti la stessa cardinalità finita, $r(\pi)$.*

Osserviamo che ogni (n)-varietà soddisfa alla condizione (γ) se $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è 2-matroidale con piani finiti ed ogni sua retta abbia cardinalita costante finita k, in particolare se $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è un sistema di Steiner 2-matroidale.

Proviamo che:

Teorema 7.1 *Le rette di H hanno tutte la stessa cardinalità k.*

Dimostrazione: Siano l_1 ed l_2 due rette distinte di H. Se esse appartengono ad uno stesso piano, oppure se sono incidenti, per la condizione (γ) e per il Teor. 6.2 risulta $|l_1| = |l_2|$. Se l_1, l_2 non sono complanari sia $x_1 \in l_1$ ed $x_2 \in l_2$. Se la retta $l = x_1x_2$ appartiene ad H, per quanto su dimostrato, si ha $|l_1| = |l| = |l_2|$. Se l non è contenuta in H sia $\pi = \overline{l_1 \cup \{x_2\}}$, tale spazio non è contenuto in H e quindi è un piano i cui fasci hanno cardinalità costante $r(\pi)$ (cfr. (γ)). Il piano π incontra H in una (n)-varietà quasiregolare, dal Teor. 6.2 si ha allora che per x_2 passa una retta l_3 di $\pi \cap H$ (distinta da l_2) e che $|l_1| = |l_3|$, d'altra parte per quanto su dimostrato è $|l_3| = |l_2|$, onde $|l_1| = |l_2|$. Si ha così l'asserto.

Teorema 7.2 *Se $k-1$ non divide $(r(\pi)-1)(n-1)$ (per ogni piano $\pi = \overline{l \cup \{x\}}$ non contenuto in H, cfr. (γ)), per esempio se $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è uno spazio affine di ordine k e di dimensione finita o infinita, allora gli spazi massimali di H costituiscono una partizione di H ed hanno tutti la stessa cardinalità v, onde, se v è finito, sono dei sistemi di Steiner $S(2, k, v)$, porremo allora $a = \frac{v-1}{k-1}$. Se per ogni x di H e per ogni tangente t in x e secante s per x ad H lo spazio $\alpha = \overline{t \cup s}$ è un piano i cui fasci abbiano tutti la stessa cardinalità finita $r(\alpha)$, allora la cardinalità delle tangenti in x ad H è una costante, b, al variare di x in H. Se b ed H sono finiti si ha che $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è finito e, denotato con R il numero di tutte le rette per $x \in H$ di $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$, si ha che R è una costante e risulta:*

$$|H| = [R - (a+b)](n-1) + v; \tag{7.1}$$

se N è il numero degli spazi massimali di H, si ha:

$$|H| = Nv \quad \Longrightarrow \quad v \ \ divide \ \ [R-(c+d)](n-1). \tag{7.2}$$

Dimostrazione: Se due rette di H sono incidenti, lo spazio che le congiunge appartiene ad H (in quanto in caso contrario, per la (γ) tale spazio sarebbe un piano π i cui fasci hanno cardinalità costante $r(\pi)$ e $H \cap \pi$ sarebbe una (n)-varietà quasiregolare *singolare*, ma ciò è escluso per il Teor.6.2, tenuto conto che $k-1$ non divide $(r(\pi)-1)(n-1)$). Ne segue che la relazione ϱ definita in H da:

$$x\varrho y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \ \ ovvero \ \ la \ \ retta \ \ xy \subset H, \tag{7.3}$$

è di equivalenza, dunque gli spazi massimali di H costituiscono una partizione di H.

Sia $x \in H$, H_x lo spazio massimale di H per x ed S_x l'insieme delle rette per x di H (onde H_x è l'unione delle rette di S_x). Sia $y \in H - H_x$, la retta xy è allora n-secante H. Per ogni $l \in S_x$ il piano $\pi = \overline{l \cup \{y\}}$ incontra H in una (n)-varietà quasiregolare non singolare rigata (per la (γ), per il Teor. 6.2 e perché $k-1$ non divide $(r(\pi)-1)(n-1)$), rimane allora determinata la retta $l' \in S_y$ di $H \cap \pi$. Si ottiene in tal modo una biezione tra S_x ed S_y se si fa corrispondere ad $l \in S_x$ la retta $l' \in S_y$. Se ne deduce, per il Teor.7.1, che la cardinalità di H_x uguaglia quella di H_y.

Supponiamo ora che per ogni $x \in H$ e per ogni tangente t in x ed n-secante s per x di H, lo spazio $\alpha = \overline{t \cup s}$ sia un piano i cui fasci abbiano la stessa cardinalità finita $r(\alpha)$. Osserviamo che da ciò e dalla (γ) segue che tutte le rette per $x \in H$ hanno cardinalità finita. Denoteremo con T_x l'insieme delle tangenti in x ad H. Siano $x, y \in H$ tali che $H_x \neq H_y$, onde la retta $s = xy$ è n-secante H. Per ogni $t \in T_x$ il piano $\alpha = \overline{t \cup s}$ incontra H in una (n)-varietà quasiregolare che non è rigata (cfr. Teor. 6.2) e quindi è una (n)-ovale, onde esiste una unica retta t' di α tangente in y ad $H \cap \alpha$ ed è $t' \in T_y$. Si ottiene in tal modo una biezione tra T_x e T_y se si fa corrispondere ad ogni $t \in T_x$ la retta $t' \in T_y$. Se ne deduce che la cardinalità b, di T_x è costante al variare di x in H.

Supponiamo b ed H finiti. Allora v è finito e la cardinalità delle rette n-secanti H per $x \in H$ è data da:

$$c = \frac{|H| - v}{n-1},$$

onde c è finita, ma allora $R = a + b + c$ è finita e dalla precedente osservazione si ha che $(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ è finito. Ne segue l'asserto.

Da quanto precede si deduce che:

Teorema 7.3 *Sia* $(\mathbf{P},\mathcal{L})$ *uno spazio lineare 2-matroidale con piani finiti e rette di cardinalità costante finita k, in particolare un sitema di Steiner 2-matroidale* $S(2,k,v)$. *Se* k *e* $k-1$ *sono primi con* $r(\pi)-1$, *per ogni piano* π *di* $(\mathbf{P},\mathcal{L})$, *allora ogni* (n)*-varietà quasiregolare è un* (n)*-ovoide. Per ogni intero n tale che non divida* $r(\pi)-k$, $r(\pi)-k-1$, $(r(\pi)-1)(r(\pi)-2)$ *non esistono* (n)*-varietà quasiregolari in* $(\mathbf{P},\mathcal{L})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.Barlotti, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo.* Boll.U.M.I. 3 (10) 4 (1955), 498-506.

[2] A.Barlotti, *Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro.* Le Matematiche, 21 (1966), 387-395.

[3] F.Buekenhout, *Une caracterisation des espaces affins basee sur la notion de droite.* Math. Z. 111 (1969), 367-371.

[4] D.G.Higman, *Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs.* Atti Conv. Geom. Comb. e Appl. Perugia (1970), 263-293.

[5] B.Qvist, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane.* Ann. Acc. Sc. Fenicae, Ser. A, I, n.134 (1952).

[6] G.Tallini, *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti.* Note I, II, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 20 (1956), 311-317, 442-446.

[7] G.Tallini, *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito.* Ann. Mat. (4) 42 (1956) 119-164.

[8] G.Tallini, *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti.* Rend. Mat. Roma 16 (1957) 328-351.

[9] G.Tallini, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois.* Relazione n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli, dicembre 1973.

[10] G.Tallini, *I k-insiemi di classe* $[0,1,n,q+1]$ *regolari di* $S_{r,q}$. Quaderno dei gruppi di Ricerca Matematica del C. N. R., Atti Convegno G.N.S.A.G.A. Modena, gennaio 1975.

[11] G.Tallini, *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space.* Atti Convegno Internaz. Teorie Combinatorie (Roma, 3-15 settembre 1973), Tomo II, Acc. Naz. Lincei, (1976), 153-165.

[12] G.Tallini, *Ovoid and caps in planar spaces.* Ann. Discrete Math., North-Holland Publ. Co., 30 (1986), 347-354.

[13] G.Tallini, *Le* (n)*-varietà di uno spazio proiettivo* $P_{r,k}$. Quaderno n.102, Sem. Geom. Comb. Dip. Maty. Univ. Roma "La Sapienza", maggio 1991.

[14] G.Tallini, *Asymptotic questions in Galois geometries.* Atti Convegno "Linear Spaces" (Capri, Maggio 1991), 1-23.

[15] G.Tallini, *Lezioni di Geometria Superiore, anno acc. 1991-92.* Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza" (1992).

[16] M.Tallini Scafati, $\{k,n\}$*-archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri.* Rend. Acc. Naz. Lincei, Nota I (8) 40 (1966), 812-818; Nota II (8) 40 (1966), 1020-1025.

[17] M.Tallini Scafati, *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un* $S_{r,q}$. Rend. Mat. Roma 26 (1967), 273-303.

[18] L.Teirlinck, *On linear spaces in which every plane is either projective or affine.* Geometriae Dedicata 4 (1975) 39-44.