Geometria Analitica. a.a. 05/06. Gruppo A-H (Prof. P. Piazza)
Esercizi per casa del 21/10/05

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una sua decomposizione in somma diretta. Possiamo allora definire quattro operatori:
$P_{W_1}^{W_2}$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2;
$P_{W_2}^{W_1}$, la proiezione su W_2 parallelamente a W_1;
$S_{W_1}^{W_2}$, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;
$S_{W_2}^{W_1}$, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.
Per semplificare la notazione poniamo

$$P_1 := P_{W_1}^{W_2}\,, \quad P_2 := P_{W_2}^{W_1}\,, \quad S_1 := S_{W_1}^{W_2}\,, \quad S_2 := S_{W_2}^{W_1}$$

Questi operatori sono definiti come segue: ogni vettore $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$. Definiamo $P_1 : V \to V$ associando a $\underline{w} \in V$ il vettore $\underline{w}_1 \in V$: quindi $P_1(\underline{w}) = \underline{w}_1$ per definizione. Analogamente: $P_2(\underline{w}) = \underline{w}_2$ per definizione. Infine

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

Se V è uno spazio metrico con prodotto scalare definito positivo $<\,,\,>$ e $W_2 = (W_1)^\perp$ allora $P_1 = P_{W_1}$, la proiezione ortogonale su W_1, $P_2 = P_{(W_1)^\perp}$, la proiezione ortogonale su $(W_1)^\perp$. Analogamente S_1 è la simmetria ortogonale rispetto a W_1 e S_2 è la simmetria ortogonale rispetto a $(W_1)^\perp$

Esercizio 1. Verificare che queste applicazioni sono *lineari* (già risolto lo scorso anno in $\mathbb{R}^3$). Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 ; su un disegno indicate $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$.

Esercizio 2. Verificare che sussistono le seguenti identità:

$$(P_1)^2 = P_1\,; \quad (P_2)^2 = P_2\,; \quad P_1 + P_2 = \mathrm{Id} \tag{1}$$

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{2}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id}\,; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{3}$$

In queste formule Id è l'applicazione identica, che manda $\underline{v}$ in $\underline{v}$.

Esercizio 3. $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di simmetria ortogonale rispetto alla retta di equazioni cartesiane $2x_1 - x_2 = 0$.

Esercizio 4. Verificare che P_1 e P_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_1}(0) = W_2$, $V_{P_1}(1) = W_1$; $V_{P_2}(0) = W_1$, $V_{P_2}(1) = W_2$.
Verificare che S_1 e S_2 sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_1}(1) = W_1$, $V_{S_1}(-1) = W_2$; $V_{S_2}(1) = W_2$, $V_{S_2}(-1) = W_1$.

Abbiamo verificato nell' Esercizio 2 che $P_j^2 = P_j$. Se $T : V \to V$ è un endomorfismo tale che $T^2 = T$ allora si dice che T è *idempotente*. Quindi le proiezioni sono operatori idempotenti. Dimostretrete nei prossimi 2 esercizi il viceversa.

Esercizio 5. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ un operatore idempotente (quindi $T^2 = T$). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T; verificare che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Esercizio 6. Verificare che se T è idempotente allora $V = V_T(1) \oplus V_T(0)$. Concludete che vale la seguente affermazione: se T è idempotente allora T è una proiezione.
Suggerimento. Possiamo scrivere, per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} = T\underline{v} + (I - T)\underline{v}$...

Esercizio 7. Sia ora V uno spazio metrico. Verificare che se P è una proiezione *ortogonale* su W, $P \equiv P_W$, allora P è autoaggiunto (fatto in classe; rifatelo).

Esercizio 8. Verificare che se T è idempotente *e* autoaggiunto, allora T è una proiezione ortogonale (e più precisamente la proiezione ortogonale su $V_T(1)$).
Suggerimento: verificare che $V_T(0) \perp V_T(1)$
Deducete in particolare che in $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico, l'operatore $L_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definito da una matrice B tale che $B^2 = B$ e $B^T = B$ è una proiezione ortogonale (e più precisamente la proiezione ortogonale su $V_B(1)$).
In conclusione, avete dimostrato la seguente
Proposizione. Se $T^2 = T$ e T è autoaggiunto allora T è la proiezione ortogonale su $V_T(1)$.

Esercizio 9. Riconoscere che la matrice $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$ è associata nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ ad un operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio W.

Passiamo alle simmetrie. Un operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ è un'involuzione se $T^2 = \mathrm{Id}$. Sappiamo dall'esercizio 2 che le simmetrie sono involuzioni.

Esercizio 10. Sia T è un'involuzione. Sia λ un autovalore. Allora $\lambda = \pm 1$.
Suggerimento: se $T\underline{v} = \lambda\underline{v}$ allora da una parte $\underline{v} = T^2\underline{v}$ (per ipotesi) e d'altra parte $T^2\underline{v} = \lambda T\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$. Continuate voi.

Esercizio 11. Sia T è un'involuzione. Allora $V = V_T(1) \oplus V_T(-1)$.
Suggerimento: osservate che $\underline{v} = \frac{v+Tv}{2} + \frac{v-Tv}{2}$.
Concludete dall'esercizio 10 e 11 che un'involuzione è una simmetria.

Esercizio 12 Sia ora V uno spazio metrico. Verificare che la simmetria ortogonale S_W rispetto ad un sottospazio W gode delle seguenti 2 proprietà:
(i) $S_W^2 = I$ (già verificato per ogni simmetria nell'esercizio 2)
(ii) S_W è un operatore autoaggiunto.

Esercizio 13 Sia V metrico. Sia T un'involuzione. Supponiamo, che T sia *anche* autoaggiunto. Verificare che sotto questa ulteriore ipotesi la decomposizione di cui nell'esercizio 11 è di fatto una decomposizione ortogonale: $V = V_T(1) \oplus^{\perp} V_T(-1)$.

Esercizio 15 Concludete che vale la seguente
Proposizione Se $T^2 = \mathrm{Id}$ e T è autoaggiunto allora T è la simmetria ortogonale rispetto a $V_T(1)$.[1]

---

[1] Deducete in particolare che in $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare canonico l'operatore L_B definito da una matrice B tale che $B^2 = I$ e $B = B^T$ è la simmetria ortogonale rispetto a $V_B(1)$.