Geometria I. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 7 Novembre 2014 (sesto compito)

Esercizio 1.
Calcolare gli invariati affini delle nove coniche canoniche affini reali

$$\mathrm{rg}(\mathcal{C})\,,\quad \mathrm{rg}(A_0)\quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,,\quad |s|\,,\quad |s_0|$$

e verificare che essi le distinguono. Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il segno del determinante di A_0 è per definizione 0 quando il rango di A_0 non è 2.
Create una tabella con le 9 coniche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra.
Notate che Sernesi non usa $|s|$ e $|s_0|$ ma, invece, l'informazione sul supporto e più precisamente se esso è vuoto o non-vuoto (il supporto di una conica è ovviamente un invariate affine).

Esercizio 2.
Risolvere l'esercizio 1 a) della Sezione 27 nel libro di Sernesi

Esercizio 3.
Risolvere l'esercizio 2 della Sezione 27 nel libro di Sernesi.
Suggerimento 1. Utilizzare la Proposizione 27.4
Suggerimento 2. Potete anche vedere f come la composizione di due proiettività molto semplici: la proiettività che porta i primi 3 punti nei punti fondamentali e l'inversa della proiettività che porta i 3 punti di arrivo nei punti fondamentali.
Suggerimento 3. Potete anche usare un argomento diretto, dove cercate una matrice incognita in $PGL(2,\mathbb{R})$ ed imponete condizioni.

Esercizio 4
Risolvere l'esercizio 3 della Sezione 27 nel libro di Sernesi..
Suggerimento. Fate una figura e ispiratevi di nuovo dalla Proposizione 27.4.
(Il testo dell'esercizio trae in inganno: la proiettività che vi si chiede di determinare non è unica e quindi era meglio utilizzare l'articolo indeterminativo...)

Esercizio 5
Risolvere l'esercizio 4 della Sezione 27 nel libro di Sernesi.
Suggerimento. Collegare i punti fissi di una proiettività con gli autovettori dell'automorfismo lineare associato.

Esercizio 6
Risolvere l'esercizio 1 ed il 2 della sezione 30 in Sernesi.

Esercizio 7
Leggere la definizione di centro di simmetria di una curva algebrica affine. Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro. Sia $\underline{c}$ l'unica soluzione del sistema

$$A_0\underline{x} + \underline{b} = \underline{0}$$

con $\underline{b}^t = |a_{01}\;\; a_{02}|$. Verificare che $\underline{c}$ è un centro di simmetria per $\mathcal{C}$.
Suggerimento. Consideriamo T uguale alla traslazione di $\underline{c}$: $T := T_{\mathrm{Id},\underline{c}}$ e sia $\mathcal{D} = T^{-1}\mathcal{C}$. Convincersi che $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto a $\underline{c}$ se e solo se $\mathcal{D}$ è simmetrica rispetto a $\underline{0}$. Verificare poi che $\mathcal{D}$ è simmetrica rispetto a $\underline{0}$ utilizzando la formula

vista a lezione per la matrice B che definisce $\mathcal{D}$ (è molto semplice verificare se una curva è simmetrica rispetto all'origine)

Esercizio 8 Rifate da soli l'esercizio risolto in classe. (Per testo e soluzioni consultate le seguenti pagine web:
`http://www1.mat.uniroma1.it//people/piazza/020116eso.pdf` (esercizio 1)
`http://www1.mat.uniroma1.it//people/piazza/020116essbis.pdf` (soluzione)
Fate un disegno accurato della conica nei due riferimenti; determinate un'affinità T e una conica canonica $\mathcal{D}$ tali che $\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$.

Esercizio 9 Piano euclideo E^2. Consideriamo la conica $\mathcal{D}$ di equazione

$$x^2 + 4xy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

Determinare una conica *canonica* $\mathcal{D}$ ed una isometria T tale che $\mathcal{C} = T(\mathcal{D})$.