

**Corso di Laurea in Matematica.**  
**Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza**  
**Compito a casa del 6/10/2018 (primo compito)**

*Esercizio 1.* Verificare che i numeri 897 e 4403 sono primi fra loro. Determinare un'identità di Bezout per il loro MCD.

*Esercizio 2.* Sia  $p$  un primo e sia  $a \in \mathbb{N}$  tale che  $1 \leq a < p^2$ . Quali sono gli  $a$  privi di inverso aritmetico mod  $p^2$  ?

*Esercizio 3.* Sia  $p > 2$  un primo. Determinare  $\{x \in \mathbb{Z}_p : x^2 = 1\}$ .

*Esercizio 4.* Determinare le soluzioni distinte mod 385 dell'equazione congruenziale

$$8X \equiv 3(385).$$

*Esercizio 5.* Dimostrare che l'equazione congruenziale  $8X \equiv 3(385)$  è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 8X \equiv 3(5) \\ 8X \equiv 3(7) \\ 8X \equiv 3(11) \end{cases}$$

Ridurre tale sistema ad un sistema cinese e risolverlo utilizzando la dimostrazione del teorema cinese del resto. Confrontate il risultato con quello dell'esercizio precedente.

*Esercizio 6.* Ho comprato un grosso barattolo di caramelle; il negoziante mi ha assicurato che sono circa mille ma mi ha anche detto che se le metto in fila per 13 ne rimangono 11, se le metto in fila per 11 ne rimangono 7 e ne manca una per riuscire a metterle in fila per 7. Quante caramelle ci sono nel barattolo ?

*Esercizio 7.* È dato il sistema congruenziale dipendente dal parametro  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} 3X \equiv 4(10) \\ 2X \equiv 7(9) \\ 5X \equiv a(12) \end{cases}$$

Determinare per quali  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq a \leq 11$ , tale sistema è compatibile. Per tali  $a$  risolvere il sistema.

*Suggerimento: il metodo di sostituzione può essere utile ....*

*Esercizio 8.*

Sia  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$  l'insieme degli elementi (moltiplicativamente) invertibili di  $\mathbb{Z}_n$ .

(i) Determinare la cardinalità di  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{18})$ . Determinare l'inverso di ogni elemento di  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{18})$ .

(ii) Determinare la cardinalità di  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{247})$

*Esercizio 9.* Calcolare le ultime due cifre del numero  $123^{123}$ .

*Suggerimento: utilizzate il Teorema di Eulero-Fermat.*

*Esercizio 10.* Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 13^{190} & \text{mod } 35 \\ 4x \equiv 8 & \text{mod } 6 \end{cases}$$