Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 19/10/2018 (terzo compito)

Esercizio 1. Sia $G =< g >$ un gruppo ciclico di ordine n.
Verificare che $< g^r >=< g^d >$ con $d := \mathrm{MCD}(n, r)$. Dedurne che i generatori di G sono in numero di $\phi(n)$ e descriverli.

Esercizio 2. Dimostrare che $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}), \cdot)$ è ciclico e determinarne tutti i sottogruppi.

Esercizio 3. Consideriamo il gruppo simmetrico S_3.
1 Scrivere tutti gli elementi di S_3.
2 Scrivere la tabella moltiplicativa di S_3.
3 Quali sono i possibili ordini degli elementi di S_3 ?
4 Determinare l'ordine di ogni elemento di S_3.
5 Quali sono i possibili ordini dei sottogruppi di S_3 ?
6 Verificare che S_3 ha quattro sottogruppi ciclici: 3 di ordine 2 ed uno di ordine 3.
7 Determinare il reticolo dei sottogruppi di S_3 specificando quali fra di essi sono normali.

Esercizio 4. Sia R il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, con $a > b$, dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Vi ricordo che gli elementi di $O(2)$ che trasformano R in se stesso costituiscono un sottogruppo di $O(2)$ di ordine 4, denotato V_4 e chiamato *gruppo di Klein.*
Scrivete la tabella moltiplicativa di V_4.
Vero o Falso: V_4 è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Spiegare.
Vero o Falso: V_4 è un sottogruppo di S_4. Nel caso affermativo descrivere esplicitamente tale sottogruppo di S_4 e stabilire se è normale in S_4.
Vero o Falso: V_4 è un sottogruppo di A_4 ed è normale in A_4.

Esercizio 5. Verificare che esistono a meno di isomorfismi solo due gruppi di ordine 4: il gruppo ciclico di ordine 4 ed il gruppo di Klein V_4.

Esercizio 6. Determinare il reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
Determinare i generatori distinti di $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

Esercizio 7. Sappiamo che $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ ha una struttura di gruppo di ordine 4.
Vero o Falso: $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 8. Vero o Falso:

- $(\mathbb{Z}, +)$ è isomorfo a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $(\mathbb{Q}, +)$ è isomorfo a $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- S_3 è isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

Esercizio 9. Per le seguenti permutazioni di S_8 determinare : inversa, decomposizione in cicli disgiunti, ordine.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Sia $\sigma = (13564) \in S_9$. Sia $\tau = (45)(842)(793) \in S_9$. Determinare $\tau\alpha\tau^{-1}$. Fare lo stesso esercizio con $\alpha = (34)(867)$ e $\tau = (13)(76)(47)$.
Determinare (se esiste) $\tau \in S_9$ tale che $\beta = \tau\alpha\tau^{-1}$ con:

- $\alpha = (4657)(98123) \qquad \beta = (5746)(123)(89)$:
- $\alpha = (1357) \qquad \beta = (2468)$

Esercizio 11. Dimostrare che esiste in S_{30} un sottogruppo di ordine 209.
Suggerimento: $209 = 11 \cdot 19$.

Esercizio 12. Determinare il reticolo dei sottogruppi di D_4.

Esercizio 13. Dimostrare che A_n è generato da 3-cicli.
Suggerimento: dimostrare che il prodotto di 2 trasposizioni è un 3 -ciclo oppure è il prodotto di due 3-cicli.

Esercizio 14. Sia $G := GL(2, \mathbb{R})$ e sia $S := \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

(1) Si dimostri che S è un sottogruppo normale di G.
(2) Determinare a quale gruppo è isomorfo G/S.