

Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 9/11/2018 (sesto compito)

Esercizio 1. Sia G un gruppo di ordine $p^\alpha m$ con $(p, m) = 1$. Verificare che se H è un p -Sylow di G ed è normale, allora H è l'unico p -Sylow di G .
Verificare che, viceversa, se un gruppo arbitrario G ammette un unico sottogruppo H di ordine ℓ allora tale sottogruppo è necessariamente normale.

Esercizio 2. Verificare che un gruppo di ordine 28 contiene necessariamente un sottogruppo normale di ordine 7.

Esercizio 3. Sia G un gruppo di ordine 60 che non contiene sottogruppi normali di ordine 5. Determinare il numero di sottogruppi di ordine 5 di G

Esercizio 4. Dimostrare, utilizzando i teoremi di Sylow, che esiste a meno di isomorfismi un unico gruppo di ordine 15, il gruppo ciclico di ordine 15.

Suggerimento: fate vedere che esistono due sottogruppi normali, H e K , di ordine 3 e di ordine 5 rispettivamente; come si intersecano? a cosa è uguale HK ?.....

Esercizio 5. Dimostrare, utilizzando i teoremi di Sylow, che esiste a meno di isomorfismi un unico gruppo di ordine 33, il gruppo ciclico di ordine 33.

Esercizio 6. Sia G un gruppo di ordine 20. Verificare che G ha un unico sottogruppo normale di ordine 5.

Esercizio 7. Scrivere tutti i gruppi abeliani di ordine 360.

Esercizio 8. Scrivere tutti i gruppi abeliani di ordine 60 ed il maggior numero di gruppi non abeliani.

Esercizio 9. Provare che ogni gruppo di ordine 88 contiene un sottogruppo normale. Scrivere tutti i gruppi abeliani di ordine 88 ed il maggior numero di gruppi non abeliani.