Corso di Laurea in Matematica.
Algebra 1. a.a. 2018-19. Proff. P. Papi e P. Piazza
Compito a casa del 24/11/2018 (ottavo compito)

Esercizio 1. Sia D un dominio di integrità con unità e sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti. Sappiamo che esiste un'applicazione iniettiva $f : D \to Q(D)$ che identifica D ad un sottoanello di $Q(D)$. Verificare che se K è un campo ed esiste un'applicazione iniettiva g di D in K allora esiste un'applicazione iniettiva $G : Q(D) \to K$ tale che $G \circ f = g$. Si dice che $Q(D)$ è il più piccolo campo che contiene D come sottoanello.

Esercizio 2. Abbiamo visto in classe che se d è un intero e d non è un quadrato allora $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$ e si ha un isomorfismo di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ con $\mathbb{Z}[X]/(X^2-d)$. Cosa possiamo dire circa il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Esercizio 3.
1. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ si consideri l'ideale $I := (3, X)$. In uno dei precedenti compiti a casa abbiamo visto che $\mathbb{Z}[X]/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Ritrovare questo risultato applicando il secondo (per certi autori il terzo) teorema di isomorfismo, scegliendo in maniera opportuna un ideale contenuto in $(3, X)$.
2. Applicare un ragionamento analogo per verificare che per ogni anello commutativo unitario R si ha

$$R/(a, b) \simeq (R/(a))/([b])$$

Ad esempio: a cosa è isomorfo $\mathbb{Z}[X]/(p, X^2 - 1)$ con p primo ?

Esercizio 4. **1.** Si determini per quali valori dell'intero $n \geq 1$ si ha un omomorfismo (ben definito) di anelli $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_n$ dato da $f(a + ib) = \overline{a + 5b} \in \mathbb{Z}_n$.
2. Se n è come in 1, si verifichi che $J = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i] \text{ tale che } n \mid a + 5b\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Determinare inoltre per quali valori di n tale ideale è massimale.
Possibili suggerimenti: utilizzare il teorema fondamentale di omomorfismo; realizzare $\mathbb{Z}[i]$ come $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.

Esercizio 5. Dati due ideali non nulli I e J dell'anello (commutativo con unità) A, si considerino gli ideali

$$IJ = \{ \sum_{\text{finita}} \iota_k j_k \,, \quad \iota_k \in I, j_k \in J\} \,, \quad I \cap J \,, \quad I + J = \{i + j \mid i \in I,\, j \in J\} \subset A\,.$$

(1) dimostrare che si ha sempre $IJ \subset I \cap J$.
(2) Dimostrare che se $I + J = A$ allora $IJ = I \cap J$.
(3) Dimostare la seguente generalizzazione del *Teorema Cinese dei Resti*: se $I + J = A$, allora

$$A/IJ \simeq A/I \times A/J\,.$$

Esercizio 6.
Dimostrare che il polinomio $P(X) = X^4 + 3X^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[X]$. [1]

Esercizio 7.
Consideriamo il polinomio $P(x) = 45 + 75X^2 + 15X^4 + 3X^5$. Stabilire se $P(X)$ è un elemento irriducibile in:

[1] È possibile verificare che $P(X)$ è riducibile in $\mathbb{Z}_p[X]$ per ogni scelta di p primo e che nessun traslato di $P(X)$, $T_{1,n}(P)$, soddisfa le ipotesi del criterio di Eisentein.

(1) $\mathbb{C}[X]$
(2) $\mathbb{R}[X]$
(3) $\mathbb{Q}[X]$
(4) $\mathbb{Z}[X]$
(5) $\mathbb{Z}_3[X]$
(6) $\mathbb{Z}_5[X]$