Geometria I.
Prof. P. Piazza
Compito a casa del 24 Ottobre 2014 (quarto compito)

October 24, 2014

Esercizio 0 (di ripasso). Verificare che una matrice ortogonale è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

Esercizio 0.5 (di ripasso) Risolvere l'esercizio n. 6 al segment link:
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/raccolta99.pdf`

Esercizio 1 (di ripasso). Verificare che l'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una proiezione su un sottospazio vettoriale W_1 parallelamente ad un sottospazio vettoriale W_2. Determinare tali sottospazi.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato e sia S il sottospazio affine di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1\,.$$

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\mathrm{Span}((1,0,-1,0),(2,0,0,2))$.
2.1 Spiegare perché è ben definito l'operatore di proiezione su S parallelamente a U, $P_{S,U}$.
2.2 Sia $\underline{t}$ un punto generico di $A^4(\mathbb{R})$. Determinare $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$P_{S,U}(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c}$$

Esercizio 3. Sia A uno spazio affine su V, S un sottospazio affine di giacitura W ed U un sottospazio vettoriale supplementare di W. Dare la definizione dell'applicazione $\Sigma_{S,U}$ di simmetria rispetto a S parallelamente a U. (Fate una figura: se siete bloccati consultate Sernesi 20.10, complemento 4 (Seconda Edizione) per ispirazione).
Descrivere in coordinate questa applicazione nel caso in cui $A = A^4(\mathbb{R})$ e S ed

U sono i sottospazi che compaiono nell'Esercizio 2.

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1,1) = (0,0)\,, \quad f(-2,-2) = (1,-1)\,, \quad f(1,-2) = (1/4, 1/2)$$

ed in caso affermativo determinarla.

Esercizio 5. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Siano r, s, t e r', s', t' le rette di equazione

$$r : x = 1, \quad s : x = y, \quad t : y = -2$$

$$r' : 2x - y = 0, \quad s' : x = -y, \quad t' : 2x + y = 1$$

Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r'\,, \quad f(s) = s'\,, \quad f(t) = t'$$

ed in caso affermativo determinarla.

Esercizio 6. Verificare che la convessità è una proprietà affine.