Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2014-15.
Compito pomeridiano del 24 Novembre 2014 (tutoraggio)

Esercizio 1. Spazio proiettivo $P^3(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive x_0, x_1, x_2, x_3. Sia $f : P^3(\mathbb{R}) \to P^3(\mathbb{R})$ la proiettività definita da

$$f([x_0, x_1, x_2, x_3]) = [-x_0 - 6x_3, -2x_0 + x_1 + x_2 - 6x_3, -2x_0 + x_2 - 6x_3, 2x_3].$$

1. Verificare che f ha tre punti fissi e determinarne le coordinate.
2. Dimostrare che f trasforma l'iperpiano di equazione $x_3 = 0$ in se stesso.

Esercizio 2. Retta proiettiva $P^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano dati i punti p_1, p_2, p_3, p_4 con

$$p_1 = [1, 0] \qquad p_2 = [3, 4] \qquad p_3 = [2, 1] \qquad p_4 = [4, 5].$$

1. Calcolare i birapporti $\beta(p_1, p_2, p_3, p_4)$ e $\beta(p_2, p_1, p_4, p_3)$.
2. Determinare l'epressione in coordinate della proiettività $f : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(p_1) = p_2 \qquad f(p_2) = p_1 \qquad f(p_3) = p_4 \qquad f(p_4) = p_3$$

3. Dire se esiste una proiettività $g : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ tale che

$$g(p_1) = p_2 \qquad g(p_2) = p_3 \qquad g(p_3) = p_4 \qquad g(p_4) = p_1.$$

Esercizio 3. Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Siano dati i punti $P_1 = [1, 4, 1]$, $P_2 = [0, 1, 1]$, $P_3 = [2, 3, -3]$.
1. Dimostrare che i tre punti sono allineati e determinare le retta r che li contiene.
2. Consideriamo su r il sistema di riferimento di coordinate omogenee λ, μ in modo tale che i punti P_1, P_2, siano i punti fondamentali e P_3 il punto unità; determinare le coordinate λ, μ di un punto di r in funzione delle sue coordinate omogenee x_0, x_1, x_2.
3. Determinare le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 del punto $P \in r$ tale the il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P) = -4$.

Esercizio 4. Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Consideriamo le due rette $r : x_0 + x_1 = 0$ e $r' : x_0 - x_2 = 0$. Siano λ, μ coordinate omogenee di r nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 0, 1]$ e $[1, -1, 0]$ come punti fondamentali e $[1, -1, 2]$ come punto unità. Siano λ', μ' coordinate omogenee di r' nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 1, 0]$ e $[1, 0, 1]$ come punti fondamentali e $[2, 3, 2]$ come punto unità. Fissiamo il punto $P_0 = [1, 0, 0]$, che è esterno sia ad r che a r', e consideriamo l'applicazione

$$\pi_{P_0} : r \to r'$$

che associa a $P \in r$ il punto $P' = L(P_0, P) \cap r'$. Scrivere l'espressione di π_{P_0} nelle coordinate $[\lambda, \mu]$ e $[\lambda', \mu']$ verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.