Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2014-15.
Compito a casa del 6 Dicembre 2014 (nono compito a casa)

Esercizio 1. Risolvere l'esercizio 4 della sezione 34 in Sernesi.

Esercizio 2. Risolvere l'esercizio 5 della sezione 34 in Sernesi.

Esercizio 3. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione $X_1^3 + X_0X_1^2 - X_0X_2^2 = 0$.
1. Verificare che l'origine di $A^2(\mathbb{C}) \subset P^2(\mathbb{C})$ è un nodo per $\mathcal{C}$ e determinarne le tangenti principali.
Perché siamo sicuri che non esistono altri punti singolari ?
2. Calcolare la prima polare di $\mathcal{C}$ rispetto a $O[1,0,0]$, $\Gamma^1_O(\mathcal{C})$, e caratterizzarla.
3. Calcolare $I(\mathcal{C}, \Gamma^1_O(\mathcal{C}); O)$.
4. Calcolare la prima polare di $\mathcal{C}$ rispetto a $P[0,0,1]$ e verificare che $\mathcal{C} \cap \Gamma^1_P(\mathcal{C})$ è costituito da tre punti Q_1, Q_2, Q_3.
5. Calcolare $I(\mathcal{C}, \Gamma^1_P(\mathcal{C}); Q_j)$ $\forall j$.
6. Determinare le tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da $P[0,0,1]$.
Suggerimento: può essere utile fare uso delle proprietà di $I(F,G;P)$ viste a lezione.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica affine in $A^2(\mathbb{C})$ di equazione $f(X,Y) = 0$. Verificare che un punto semplice $P \in \mathcal{C}$ è un flesso se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} f_{XX}(P) & f_{XY}(P) & f_X(P) \\ f_{XY}(P) & f_{YY}(P) & f_Y(P) \\ f_X(P) & f_Y(P) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(Se sostituiamo a P le variabili (X_0, X_1, X_2) nell'equazione precedente allora otteniamo l'equazione affine dell'Hessiana $\mathcal{H}$.)

Esercizio 5. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione affine $X^3 - X^2 + Y^2 = 0$. Verificare che il punto improprio di $\mathcal{C}$ è un flesso. Verificare che esistono altri due flessi e determinarne le coordinate. (Utilizzare l'esercizio precedente. Non avrete bisogno di ricorrere al risultante.)

Esercizio 6. Sia $\mathcal{C}$ una cubica *non singolare* di $P^2(\mathbb{C})$. Supponiamo che $\mathcal{C}$ ammetta $P[0,0,1]$ come flesso, con tangente inflessionale la retta $X_0 = 0$. Verificare che allora $\mathcal{C}$ ha equazione affine

$$Y^2 = G(X)$$

con grado $G = 3$ e G avente tutte radici distinte.
Si veda Sernesi, inizio della dimostrazione del Teorema 36.1; una volta risolto l'esercizio leggete la (molto facile) fine della dimostrazione del Teorema 36.1(forma di Weistrass di una cubica non singolare).
Suggerimento: potete, ad esempio, deomogenizzare rispetto a X_2 portando P nell'origine di $A^2(\mathbb{C})$. Imponete ora le condizioni date e dimostrate che $\mathcal{C}$ ha equazione omogenea che è del tipo

$$X_0X_2^2 + 2X_2X_0A(X_0, X_1) + B(X_0, X_1) = 0$$

con A omogeneo di grado 1 e B omogeneo di grado 3. Considerate ora la sostituzione :

$$Y_0 = X_0\,, \quad Y_1 = X_1\,, \quad Y_2 = X_2 + A(X_0, X_1)$$

e portate l'equazione di $\mathcal{C}$ nella forma

$$Y_0 Y_2^2 = C(Y_0, Y_1)$$

con C omogeneo di grado 3. Spiegate perché il deomogenizzato di C rispetto a Y_0 ha grado 3. Concludete che $\mathcal{C}$ ha equazione affine

$$Y^2 = G(X)$$

con G di grado 3. Spiegate perché dall'ipotesi che $\mathcal{C}$ sia una cubica *non singolare* segue che le radici di G devono essere necessariamente distinte.