Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2014-15.
Compito a casa del 3 Gennaio 2015 (undicesimo ed ultimo compito a casa)

Esercizio 1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici.
1. Sia $Z = X \times Y$ e $\delta((x, y), (x', y')) := d_X(x, x') + d_Y(y, y')$. Verificare che (Z, δ) è uno spazio metrico.
2. Consideriamo il caso particolare $X = Y = \mathbb{R}$, d_X uguale alla metrica euclidea e d_Y uguale alla metrica discreta. Descrivere gli intorni sferici $D_r(\underline{0})$ di $(\mathbb{R}^2, \delta)$ al variare di $r > 0$.
3. Verificare che δ non è topologicamente equivalente alla metrica euclidea.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.
1. Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e sia $H = \underline{h} + W$ un sottospazio euclideo con giacitura W. Verificare che $\mathbb{R}^n \setminus H$ è un aperto di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$.
2. Sia $\mathcal{L}$ l'insieme costituito da unioni finite di sottospazi euclidei di dimensione k, con $0 \leq k \leq n-1$. Sia $\mathcal{T}$ la collezione di insiemi costituita da $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n \setminus L$ al variare di L in $\mathcal{L}$. Verificare che $\mathcal{T}$ è una topologia.
3. Verificare che $\mathcal{T}$ è strettamente più fine della topologia cofinita e strettamente meno fine della topologia euclidea.

Per gli esercizi che seguono vi invito a rivedere la definizione delle topologie i_s, i_d, j_s, j_d in Sernesi, Geometria 2, pag. 17.

Esercizio 3. Sia $B = \{\emptyset; \mathbb{R}; (-\infty, a]\, \forall a \in \mathbb{R}\}$. Verificare che B non è una topologia ma che puo' essere presa come base di una (unica) topologia $\mathcal{T}_B$. Verificare che $\mathcal{T}_B$ è strettamente più fine di i_s.

Esercizio 4. Consideriamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}, i_s)$. Consideriamo le seguenti successioni:
$\{a_n\}$ definitivamente costante di valore $a \in \mathbb{R}$;
$\{b_n\}$ con $b_n = -n$
$\{c_n\}$ con $c_n = n$
Verificare che $\{a_n\}$ converge a tutti e soli i numeri r tali che $r \geq a$; $\{b_n\}$ converge ad ogni $r \in \mathbb{R}$; $\{c_n\}$ non-converge.
Verificare che se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico metrizzabile allora ogni successione convergente ammette un unico limite.
Dedurne che $(\mathbb{R}, i_s)$ non è metrizzabile.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la successione $\{x_n\}$ con $x_n = (1/n, 1/(n+1))$.
Verificare che $\{x_n\}$ converge a $(0, 0)$ nella topologia dell'esercizio 2.
Verificare che $\{x_n\}$ non converge a $(0, 0)$ nella topologia indotta dalla metrica dell'esercizio 1.

Definizione. Uno spazio topologico è di Hausdorff (o T_2) se presi due punti distinti u e v in X esistono due aperti U e V tali che $u \in U$, $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 6. Verificare che $P^n(\mathbb{R})$, con la topologia quoziente descritta a lezione, è di Hausdorff.