Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2014-15.
Compito a casa del 3 Gennaio 2015. Soluzioni.

Esercizio 1. *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *due spazi metrici.*
1. *Sia* $Z = X \times Y$ *e* $\delta((x,y),(x',y')) := d_X(x,x') + d_Y(y,y')$. *Verificare che* (Z, δ) *è uno spazio metrico.*
2. *Consideriamo il caso particolare* $X = Y = \mathbb{R}$, d_X *uguale alla metrica euclidea e* d_Y *uguale alla metrica discreta. Descrivere gli intorni sferici* $D_r(\underline{0})$ *di* $(\mathbb{R}^2, \delta)$ *al variare di* $r > 0$.
3. *Verificare che* δ *non è topologicamente equivalente alla metrica euclidea.*

Soluzione.
1. È chiaro che $\delta((x,y),(x',y')) \geq 0$ e $\delta((x,y),(x',y')) = \delta((x',y'),(x,y))$. Inoltre $\delta((x,y),(x',y')) = 0$ sse $d_X(x,x') + d_Y(y,y') = 0$ sse $d_X(x,x') = 0$ e $d_Y(y,y') = 0$ sse $x = x'$ e $y = y'$ sse $(x,y) = (x',y')$. La disuguaglianza triangolare è anche facile conseguenza della disuguaglianza triangolare per d_X e d_Y.
2. Se (x,y) e (x',y') sono due punti in $\mathbb{R}^2$ allora, per definizione,

$$\delta((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |x - x'| \text{ se } y = y' \\ |x - x'| + 1 \text{ se } y \neq y' \end{cases}$$

Quindi $(x,y) \in D_r(\underline{0})$ sse

$$\begin{cases} |x| < r \text{ se } y = 0 \\ |x| + 1 < r \text{ se } y \neq 0 \end{cases}$$

Se $r \leq 1$ la seconda eventualità non è mai verificata; quindi se $r \leq 1$ si ha $D_r(\underline{0}) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } |x| < r\}$. Se $r > 1$ allora

$$D_r(\underline{0}) = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } |x| < r\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } y \neq 0 \text{ e } |x| < r - 1\}.$$

Fate una figura con $r = 1$ e $r = 2$.
3. Se $r \leq 1$ allora $D_r(\underline{0})$ non contiene alcun disco euclideo. Un semplice ragionamento mostra che di conseguenza δ non è topologicamente equivalente alla metrica euclidea.

Esercizio 2. *Sia* $\mathcal{E}$ *la topologia euclidea di* $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.
1. *Sia* W *un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $H = \underline{h} + W$ *un sottospazio euclideo con giacitura* W. *Verificare che* $\mathbb{R}^n \setminus H$ *è un aperto di* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$.
2. *Sia* $\mathcal{L}$ *l'insieme costituito da unioni finite di sottospazi euclidei di dimensione* k, *con* $0 \leq k \leq n-1$. *Sia* $\mathcal{T}$ *la collezione di insiemi costituita da* $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^n \setminus L$ *al variare di* L *in* $\mathcal{L}$. *Verificare che* $\mathcal{T}$ *è una topologia.*
3. *Verificare che* $\mathcal{T}$ *è strettamente più fine della topologia cofinita e strettamente meno fine della topologia euclidea.*

Soluzione.
1. Sia k la dimensione di W. Allora H ha equazioni cartesiane (nella base canonica)

$$A\underline{X} = \underline{b} \quad \text{dove } A \in M_{(n-k)\times n}\,, \ \operatorname{rg} A = n - k\,, \ \underline{b} \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Quindi $H = f^{-1}(\underline{b})$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Abbiamo visto in classe che f è continua; quindi H è la controimmagine di un chiuso tramite un'applicazione continua ed è quindi un chiuso. Ne segue che $\mathbb{R}^n \setminus H$ è aperto.

2. È ovvio che $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono in $\mathcal{T}$. Inoltre, se $L_i \in \mathcal{L}$ allora si ha

$$\bigcup_{i\in I}(\mathbb{R}^n \setminus L_i) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i\in I}(L_i);$$

dato che l'intersezione di spazi euclidei è vuota oppure ancora uno spazio euclideo, è facile verificare, utilizzando le proprietà distributive dell'unione e dell' intersezione, che l'unione di elementi in $\mathcal{T}$ è in $\mathcal{T}$. Analogamente, da $(\mathbb{R}^n \setminus L_1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus L_2) = (\mathbb{R}^n \setminus (L_1 \cup L_2)$ segue che l'intersezione di due aperti è un aperto. Quindi $\mathcal{T}$ è una topologia.
3. Se $L = \cup_{1\leq i\leq n} H_i$ con H_i euclideo, allora $\mathbb{R}^n \setminus L = \cap_{1\leq i\leq n}(\mathbb{R}^n \setminus H_i)$ e da **1** segue che questo è un aperto nella topologia euclidea (perché intersezione finita di aperti). Quindi $\mathcal{T}$ è meno fine della topologia euclidea. Dato che un disco euclideo non è un aperto di $\mathcal{T}$, ne deduciamo che $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea.
Un punto di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio euclideo di dimensione 0; quindi gli aperti della topologia cofinita sono aperti nella topologia $\mathcal{T}$. D'altra parte, il complementare di un iperpiano H in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, non è un insieme finito. Quindi $\mathbb{R}^n \setminus H$ è aperto in $\mathcal{T}$ ma non nella topologia cofinita. Conclusione: la topologia cofinita è strettamente meno fine della topologia $\mathcal{T}$.

Per gli esercizi che seguono vi invito a rivedere la definizione delle topologie i_s, i_d, j_s, j_d in Sernesi, Geometria 2, pag. 17.

Esercizio 3. *Sia* $B = \{\emptyset; \mathbb{R}; (-\infty, a]\, \forall a \in \mathbb{R}\}$. *Verificare che* B *non è una topologia ma che puo' essere presa come base di una (unica) topologia* $\mathcal{T}_B$. *Verificare che* $\mathcal{T}_B$ *è strettamente più fine di* i_s.

Soluzione.
L'unione degli insiemi $(-\infty, -1/n]$, $n \in N^*$, è l'insieme $(-\infty, 0)$, che non appartiene a B. Quindi B non è una topologia. D'altra parte è immediato verificare che B verifica il criterio della Prop. 2.2 in Sernesi 2 ed è quindi la base di un'unica topologia $\mathcal{T}_B$.
È chiaro che $(-\infty, b) \in \mathcal{T}_B$, infatti $(-\infty, b) = \cup_{n\geq 1}(-\infty, b - (1/n)]$, quindi $\mathcal{T}_B$ è più fine di i_s. D'altra parte $(-\infty, b]$ appartiene a $\mathcal{T}_B$ ma non a i_s; quindi $\mathcal{T}_B$ è strettamente più fine di i_s.

Esercizio 4. *Consideriamo lo spazio topologico* $(\mathbb{R}, i_s)$. *Consideriamo le seguenti successioni:*
$\{a_n\}$ *definitivamente costante di valore* $a \in \mathbb{R}$;
$\{b_n\}$ *con* $b_n = -n$
$\{c_n\}$ *con* $c_n = n$
Verificare che $\{a_n\}$ *converge a tutti e soli i numeri* r *tali che* $r \geq a$; $\{b_n\}$ *converge ad ogni* $r \in \mathbb{R}$; $\{c_n\}$ *non-converge.*
Verificare che se $(X, \mathcal{T})$ *è uno spazio topologico metrizzabile allora ogni successione convergente ammette un unico limite.*
Dedurne che $(\mathbb{R}, i_s)$ *non è metrizzabile.*

Soluzione.
Supponiamo che $a_n = a$ per $n \geq n_0$. Un intorno aperto di r è del tipo $N := (-\infty, r + s)$ con $s > 0$. Se $a \leq r$ allora $a \in N$ e quindi $a_n \in N$ per $n \geq n_0$. Quindi $a_n \longrightarrow r$. D'altra parte se $a > r$ allora $N = (-\infty, (a + r)/2)$ è un intorno aperto di r ma non esistono elementi di $\{a_n\}$ che appartengono ad N

per $n \geq n_0$. Quindi se $r < a$ allora $\{a_n\}$ non converge a r.
Fissiamo $r \in \mathbb{R}$ e sia $N = (-\infty, r+s)$ un suo intorno. Sia $q \in \mathbb{Z}$, $q < r+s$. Se $n_0 = |q|$ e sia $n \geq n_0$; allora $b_n = -n \leq -n_0 = -|q| \leq q < r+s$ e quindi $b_n \in N$. Ne segue che $b_n \longrightarrow r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
L'ultimo caso è ovvio: fissato $r \in \mathbb{R}$, se $c_n = n$ allora, preso sempre $N = (-\infty, r+s)$ come intorno aperto di r, è chiaro che per $n > r+s$ si ha che $c_n \notin N$. Quindi $\{c_n\}$ non converge ad alcun $r \in \mathbb{R}$. In uno spazio metrizzabile i limiti di successioni sono unici: supponiamo per assurdo che $\{a_n\}$ converga a due limiti distinti x ed y; sia $r = d(x,y)$ con d la metrica che induce la topologia. Allora, ovviamente, $D_{r/2}(x) \cap D_{r/2}(y) = \emptyset$. Ma per ipotesi $\exists n_0$ tale che $a_n \in D_{r/2}(x)$ e $a_n \in D_{r/2}(y)$. Assurdo.

Esercizio 5. *In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la successione $\{x_n\}$ con $x_n = (1/n, 1/(n+1))$. Verificare che $\{x_n\}$ converge a $(0,0)$ nella topologia dell'esercizio 2. Verificare che $\{x_n\}$ non converge a $(0,0)$ nella topologia indotta dalla metrica dell'esercizio 1.*

Soluzione.
Sia U in intorno aperto di $\underline{0}$. Allora esistono rette $\{r_1, \dots, r_s\}$ e punti $\{p_1, \dots, p_t\}$ [1] tali che $U = \mathbb{R}^2 \setminus ((r_1 \cup \dots \cup r_s) \cup (p_1 \cup \dots \cup p_t))$. Per ipotesi $\underline{0} \notin (r_1 \cup \dots \cup r_s) \cup (p_1 \cup \dots \cup p_t)$. Ora, è facile verificare che ogni retta r_j contiene al più due punti della successione $\{x_n\}$; ne segue che esiste n_0 tale che $x_n \in U$ per $n \geq n_0$. Quindi $x_n \to \underline{0}$.
Per quel che concerne l'ultima domanda, basta osservare che se $r \leq 1$ allora nessun punto di $\{x_n\}$ appartiene a $D_r((0,0))$.

Definizione. Uno spazio topologico è di Hausdorff (o T_2) se presi due punti distinti u e v in X esistono due aperti U e V tali che $u \in U$, $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 6. *Verificare che $P^n(\mathbb{R})$, con la topologia quoziente descritta a lezione, è di Hausdorff.*

Soluzione.
Sappiamo, vedere Sernesi 2, che $P^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $S^n/\mathcal{R}$ dove $\mathcal{R}$ è la relazione di equivalenza che dichiara $x \,\mathcal{R}\, y$ sse $y = \pm x$. Sia $\tau : S^n \to S^n/\mathcal{R}$ la proiezione canonica che sappiamo essere aperta. È facile verificare che S^n è di Hausdorff (utilizzare che $S^n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\| = 1\}$ e che una base per la topologia di S^n è data dall'intersezione degli interni sferici di $\mathbb{R}^{n+1}$ con S^n). Siano $u, v \in S^n$, $u \neq v$; sempre ragionando con "intorni sferici" scegliamo U intorno aperto di u con la proprietà che U non abbia punti in comune con il suo antipodale $-U$; scegliamo V con la stessa proprietà e inoltre tale che

$$U \cap V = \emptyset \,, \quad U \cap (-V) = \emptyset \,.$$

Allora $\tau(U)$ e $\tau(V)$ sono due intorni aperti di $[u]$ e $[v]$ rispettivamente e si ha (facile) $\tau(U) \cap \tau(V) = \emptyset$. Ne segue che $P^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff.

[1] ovviamente una o entrambe queste collezioni possono essere vuote