Geometria Differenziale. a.a. 2018-19. Prof. P. Piazza
Compito a casa del 22/10/2018 (Quarto compito)

Esercizio 1. Sia S_1 il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e sia S_2 l'ipeboloide iperbolico $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Sia $F : S_1 \to S_2$ l'applicazione definita come segue: per ogni $P = (x, y, z) \in S_1$ sia $H = (0, 0, z)$ e sia r la semiretta di origine H e passante per P; poniamo $F(P) = r \cap S_2$.

- determinare l'espressione di F (risulta che $F = \tilde{F}|_{S_1}$, con $\tilde{F}$ definita su tutto $\mathbb{R}^3$).
- sia $P = (1, 0, 1) \in S_1$. Introdurre parametrizzazioni locali intorno a P ed $F(P)$ e calcolare le basi indotte da tali parametrizzazioni in $T_P(S_1)$ e $T_{F(P)}(S_2)$
- calcolare la matrice associata al differenziale $dF(P) : T_P(S_1) \to T_{F(P)}(S_2)$ con scelta di basi sui piani tangenti data dalle parametrizzazioni introdotte nel punto precedente.

Esercizio 2. Sia S il semicono definito da $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$, parametrizzato da $\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, e sia S' la superficie di equazione $x = zy^2$ parametrizzata da $\psi(\lambda, \mu) = (\lambda^2\mu, \lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Sia $f : S \to S'$ l'applicazione $f(x, y, z) = (zy^2, y, z)$, $(x, y, z) \in S$. Dopo aver spiegato perché S e S' sono regolari e perché f è un'applicazione differenziabile, calcolare $\forall P \in S$ la matrice associata a df_P rispetto alle basi di $T_P S$ e $T_{f(P)} S'$ indotte da ϕ e ψ rispettivamente.

Esercizio 3. Sia $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 \neq v^2\}$. Sia $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$(u, v) \longrightarrow (\frac{u}{u^2 - v^2}, \frac{v}{u^2 - v^2}, \frac{uv}{u^2 - v^2}).$$

Abbiamo visto nel secondo compito a casa che $\phi(U)$ è unione di 4 superfici regolari: $\phi(U) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. (Le superfici regolari sono, per definizione, connesse.)

- determinare una funzione polinomiale $P(x, y, z)$ tale che $\phi(U) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^2 \neq 0\,, P(x, y, z) = 0\}$.
- Determinare la prima forma fondamentale su ognuna delle componenti connesse di $\phi(U)$, S_j.
- determinare su ogni S_j un campo di versori normali.

Esercizio 4. Sia T il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di centro $(x_0, 0, z_0)$ e raggio r_0, con $x_0 > 0$ e $0 < r_0 < x_0$. Stabilire se

$$\phi(t, \theta) = ((r \cos t + x_0) \cos \theta, (r \cos t + x_0) \sin \theta, r \sin t + z_0)$$

è un'isometria locale dal piano al toro T.