Geometria Differenziale. a.a. 2018-2019

Prof. Paolo Piazza

Esame scritto del 31 Gennaio 2019.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola : ____________________

Orale (cerchiare la data):

1/2/2019 **21/2/2019**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	5	
2	8	
3	7	
4	8	
5	6	
Totale	34	

ATTENZIONE:

- DURATA DELLA PROVA SCRITTA: **3 ORE**
- GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE SPENTI
- CON L'ECCEZIONE DEL FORMULARIO NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI

Esercizio 1. Sia $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare, parametrizzata secondo la lunghezza d'arco. Siano κ_σ e τ_σ la curvatura e la torsione di σ. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da: $\alpha(s) := \underline{t}(s)$, con $\underline{t}(s)$ il versore tangente a σ in $s \in I$. Sia κ_α la curvatura di α.
Dimostrare che

$$\kappa_\alpha = \sqrt{1 + \frac{\tau_\sigma^2}{\kappa_\sigma^2}}\,.$$

Suggerimento: usare le formule di Frenet.

Esercizio 2. Sia $S = S^2$, la superficie sferica unitaria in $\mathbb{R}^3$, e sia

$$\psi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$$

una delle sue parametrizzazioni locali. Supporremo che l'insieme di definizione di ψ sia tale che la sua immagine tramite ψ contenga la regione $R \subset S^2$ definita più avanti. Siano:
$C_1' \subset \mathbb{R}^2$ il segmento di equazioni $\theta = t$, $\phi = \pi/4$, $t \in [0, \pi/2]$ nel piano (θ, ϕ);
$C_2' \subset \mathbb{R}^2$ il segmento di equazioni $\theta = \pi/2$, $\phi = t$, $t \in [\pi/4, \pi/2]$ nel piano (θ, ϕ);
$C_3' \subset \mathbb{R}^2$ il segmento di equazioni $\theta = \pi/2 - t$, $\phi = \pi/2$, $t \in [0, \pi/2]$ nel piano (θ, ϕ);
$C_4' \subset \mathbb{R}^2$ il segmento di equazioni $\theta = 0$, $\phi = \pi/2 - t$, $t \in [0, \pi/4]$ nel piano (θ, ϕ).
Sia R' la regione del piano uguale al rettangolo delimitato da questi 4 segmenti.
Siano C_1, C_2, C_3, C_4, in S^2, le immagini di questi segmenti tramite ψ; sia R la regione di S^2 immagine di R' tramite ψ.
Calcolare direttamente tutti i termini che compaiono nel teorema di Gauss-Bonnet per la regione R, verificando quindi la validità della celebre formula in questo caso particolare.
Suggerimento: la curvatura gaussiana della sfera è ben nota; la curvatura geodetica di una geodetica è zero. Ne segue che solo una fra le curve $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ ha curvatura geodetica non-nulla; dimostrare che tale curvatura geodetica è uguale a -1 (dovrete riparametrizzare la curva secondo la lunghezza d'arco).

Esercizio 3. Sia $\phi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $\phi(\theta, t) := (t\cos\theta, t\sin\theta, 1 + \theta - t)$. Non è difficile dimostrare (e potete assumerlo) che l'immagine di ϕ, S, è una superficie regolare.
Sia $\sigma(\theta) := \phi(\theta, 1)$ la linea $t = 1$:
1) calcolare la curvatura normale di σ
2) calcolare il quadrato della curvatura geodetica di σ
3) calcolare la curvatura geodetica di σ.
Suggerimento: non è difficile riparametrizzare σ secondo la lunghezza d'arco.

Esercizio 4. Sia $\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata secondo la lunghezza d'arco e sia $\phi : (a, b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione $\phi(t, v) = \sigma(t) + v\dot{\sigma}(t)$.
1. Verificare che dato $(t, v) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ con $v \neq 0$ esiste un intorno aperto U di (t, v) tale che $\phi\big|_U : U \to \phi(U)$ è una parametrizzazione di una superficie *regolare*.
2. Fissiamo un tale U e sia $S := \phi(U)$. Determinare in funzione della curvatura e/o della torsione di σ:
2.1 la prima forma fondamentale di S;
2.2 la seconda forma fondamentale;
2.3 le curvature principali di S (determinando al contempo le direzioni principali).
Suggerimento: utilizzare le formule di Frenet.

Esercizio 5. Siano S_1 ed S_2 due superfici regolari in $\mathbb{R}^3$ e supponiamo che $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$; diremo che S_1 ed S_2 si intersecano trasversalmente se $\forall p \in S_1 \cap S_2$ si ha che $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Dimostrare che se S_1 e S_2 si intersecano trasversalmente allora ogni componente connessa di $S_1 \cap S_2$ è una 1-sottovarietà di $\mathbb{R}^3$.