

Istituzioni di Matematica, II modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2022-2023.

Compito del 9/3/2023

Abbiamo visto che per una funzione derivabile si ha:

$$(1) \quad \int h'(x)dx = h(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Infatti a sinistra abbiamo $\{G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$ con $G(x)$ una primitiva di $h'(x)$ e cioè una funzione G tale che $G'(x) = h'(x)$; è ovvio che possiamo scegliere $G(x)$ uguale a $h(x)$ e quindi vale (1).

Questo vuol dire che le classiche liste di derivate notevoli, con a sinistra la colonna delle funzioni elementari, e a destra la colonna delle loro derivate, può anche essere letta, da destra a sinistra, come una lista di integrali notevoli. Inoltre, tenete sempre presente la regola di derivazione delle funzioni composte.

Esempio. Vogliamo calcolare

$$\int \sin^2(x) \cos x dx$$

Osserviamo che

$$\sin^2(x) \cos x = \left(\frac{1}{3} \sin^3(x)\right)'$$

Ma allora per la (1) abbiamo

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \left(\frac{1}{3} \sin^3(x)\right)' dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + c.$$

Esercizio 1. Dopo aver ripassato tutte le derivate notevoli (e quindi, per quanto appena spiegato, tutti i corrispondenti integrali), calcolare i seguenti integrali.

$$(2) \quad \int \frac{1}{x \log x} dx; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$$

$$(3) \quad \int \sin^5 x \cos x dx; \quad \int \sin 5x dx; \quad \int (4 \sin^5 x \cos x + 9 \sin 5x) dx;$$

$$(4) \quad \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad \int e^{\sin x} \cos x dx;$$

$$(5) \quad \int x \sin(x^2 + 5) dx; \quad \int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti utilizzando gli integrali notevoli e la regola di derivazione delle funzioni composte.

$$(6) \quad \int \frac{\sqrt{3 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx, \quad \int \operatorname{tg}(3x + 5) dx$$

$$(7) \quad \int \frac{1}{1 + (x^3 + 3x^2 + 1)^2} (x^2 + 2x) dx, \quad \int x \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$(8) \quad \int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad (\text{moltiplicare e dividere per } \sqrt{1+x})$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali indefiniti applicando in prima istanza l'integrazione per parti:

$$(9) \quad \int x^2 \log x dx \quad \int x(\log x)^2 dx$$

$$(10) \quad \int e^x \sin x dx \quad \int \arcsin x dx$$