# Istituzioni di Matematica, II modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2022-2023.

## Compito del 17/3/2022 (terzo compito)

**Esercizio 0, di ripasso.** Sappiamo che
$$\int x^b dx = \frac{1}{b+1} x^{b+1} + c$$
perché
$$\left(\frac{1}{b+1} x^{b+1}\right)' = x^b \quad \text{e} \quad \int h'(x)dx = h(x) + c\,.$$
Procedendo analogamente, dalla formula di derivazione delle funzioni composte,
$$\int f(x)^b f'(x)dx = \frac{1}{b+1} f(x)^{b+1} + c$$
perché
$$\left(\frac{1}{b+1} f(x)^{b+1}\right)' = f(x)^b f'(x)$$
Quindi, riassumendo,
$$\int x^b dx = \frac{1}{b+1} x^{b+1} + c \qquad\qquad \int f(x)^b f'(x)dx = \frac{1}{b+1} f(x)^{b+1} + c$$
**Completate, formando due colonne di integrali; a sinistra quelli classici, a destra le loro modifiche come nell'esempio appena fatto.**

**Esercizio 1.** Risolvere in [Guerraggio, Esercizi per il capitolo 9]
(i) tutti gli integrali in 9.2
(ii) l'integrale 9.3 XII)
(iii) l'integrale 9.3. XIV).

**Esercizio 2.** Risolvere in [Guerraggio] l'integrale 9.6 IV)

**Esercizio 3.** Calcolare
$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx$$
Suggerimento: porre
$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$
**Integrazione per sostituzione.**
L'integrazione per sostituzione si basa sulla seguente formula, applicazione diretta della formula di derivazione delle funzioni composte:
$$\left[\int f(x)dx\right]_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)dt\,.$$
Data una funzione derivabile $g(t)$ poniamo $dg = g'(t)dt$. Allora l'integrazione per sostituzione si ottiene sostituendo formalmente $x = g(t)$ e ponendo $dg$, e quindi $g'(t)dt$, al posto di $dx$. Vediamo un esempio.

**Esempio.** Calcolare
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx$$
Soluzione. Poniamo $t=\sqrt{x}$ e quindi $x=t^2$, da cui $dx=(t^2)'dt$ e quindi $dx=2tdt$. Ora sostituiamo e otteniamo
$$\int \frac{1}{t-3}2tdt$$
che è uguale a
$$2\int \frac{t}{t-3}dt$$
che possiamo risolvere scrivendo il numeratore come $(t-3)+3$; otteniamo
$$2t+6\log|t-3|+c$$
In definitiva, ritornando alla variabile $x$ otteniamo che
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}dx = 2\sqrt{x}+6\log|\sqrt{x}-3|+c$$
Notare che dalla sostituzione $t=\sqrt{x}$ ci siamo dovuti calcolare $x=t^2$ per poter trovare $dx=2tdt$.

**Esercizio 4.** Calcolare
$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}+x+2}$$
Suggerimento: usare la sostituzione $t=\sqrt{x+1}$.

**Esercizio 5.** Calcolare
$$\int \sqrt{e^x-1}dx$$
Suggerimento: usare la sostituzione $t=\sqrt{e^x-1}$.