Istituzioni di Matematica, 2022-2023, II Modulo
prova di autovalutazione del 20/3/2023

REGOLE D'ESAME

i) Sono vietati libri, appunti e calcolatrici. Si usa solo la penna !
ii) Telefoni cellulari, smartphones, tablets etc **rigorosamente** spenti.
iii) Risposta sbagliata -1, risposta non indicata 0.
iv) Non si perdono punti con le domande a risposta aperta. Scrivere il procedimento non è necessario ma può far ottenere punti parziali anche se la risposta è sbagliata.
v) Tempo a disposizione: **60 minuti**.

1. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{e^{x^3}}\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{A}$ $\frac{8e^8}{9}$ $\boxed{B}$ $\frac{e^8-e^{-8}}{3}$ $\boxed{C}$ 0 $\boxed{D}$ $\frac{e^{-8}-e^8}{3}$ $\boxed{E}$ $\frac{e^2-e^{-2}}{3}$

Risposta: $\boxed{B}$
Infatti:

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,\mathrm{d}x = \int x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = \int (-\frac{1}{3})(-3x^2)e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (-3x^2)e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$$

dove abbiamo utilizzato che

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)}.$$

Quindi

$$\text{una primitiva di } \frac{x^2}{e^{x^3}} \quad \text{è } G(x) := -\frac{1}{3}e^{-x^3}.$$

L'integrale definito è uguale a

$$G(x)|_{x=-2}^{x=2} \equiv G(2) - G(-2) = -\frac{1}{3}e^{-x^3}(2) - (-\frac{1}{3}e^{-x^3})(-2) = -\frac{1}{3}e^{-8} + \frac{1}{3}e^8$$

2. Usando la tecnica di integrazione per parti, calcolare l'integrale indefinito

$$\int (x^2 - 2x + 1)\log(x)\,\mathrm{d}x$$

Suggerimento: $(x-1)^2 = ((x-1)^3/3)'$. **Soluzione.**
Riscriviamo l'integrale come

$$\int (x-1)^2 \log(x)\,\mathrm{d}x$$

Sappiamo che

$$(x-1)^2 = \left(\frac{1}{3}(x-1)^3\right)'.$$

Quindi possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int \left(\frac{1}{3}(x-1)^3\right)' \log(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Ora possiamo applicare l'integrazione per parti: (1) è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3\log(x) - \int \frac{1}{3}(x-1)^3(\log(x))'\,\mathrm{d}x$$

che è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3\log(x) - \int \frac{1}{3}(x-1)^3\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

che è a sua volta uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3\log(x) - \frac{1}{3}\int \left[(x^2-3x+3-\frac{1}{x}\right]\,\mathrm{d}x$$

dove abbiamo svolto $(x-1)^3$ e semplificato.
Otteniamo

$$\frac{1}{3}(x-1)^3\log(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

che è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3\log(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}\log|x|.$$

3. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{sen}(x)+\cos(x))\,\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{A}}$ -1 $\boxed{\text{B}}$ $-1+\sqrt{2}$ $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{E}}$ $-1-\sqrt{2}$

Risposta: $\boxed{\text{C}}$.
Infatti

$$\int (\mathrm{sen}(x)+\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

che è uguale a

$$-\cos x + \mathrm{sen} x$$

L'integrale definito è ottenuto calcolando questa primitiva in $\pi/4$ e 0 e facendone la differenza.

Otteniamo

$$-\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-(-\cos 0+\operatorname{sen} 0)$$

che è uguale a 1

4. Usando un'opportuna sostituzione, calcolare l'integrale

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione.
Poniamo $\sqrt{x}=t$ e quindi $x=t^2$ e $dx=2tdt$. Sostituendo otteniamo

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = -2\cos t$$

In definitiva, tornando alla variabile x, abbiamo

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\cos\sqrt{x}$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{3x+7}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione.
Il denominatore ammette due radici distinte, +1 e -1. Impostiamo

$$\frac{3x+7}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

che è vera se e solo se

$$3x+7=(A+B)x+(A-B)$$

Per il principio d'identità dei polinomi deve essere

$$A+B=3\,,\quad A-B=7$$

da cui $A=5$ e $B=-2$. Ne segue che

$$\int \frac{3x+7}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int \frac{5}{x-1}\,\mathrm{d}x-\int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = 5\log|x-1|-2\log|x+1|+c$$