Istituzioni di Matematica, II modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2019-2020.

Esercizi di riepilogo. Parte 2.

Limiti notevoli.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$

(4) $\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

(5) $\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

(6) $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

(7) $\lim_{x\to +\infty} \lg x = +\infty$

(8) $\lim_{x\to 0^+} \lg x = -\infty$

(9) $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \ \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
equivalentemente:
(9bis) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(10) $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\lg x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$
equivalentemente:
(10bis) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\beta}{(\lg x)^\alpha} = +\infty \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$

(11) $\lim_{x\to 0} |x|^\beta |\lg |x||^\alpha = 0 \ \forall \beta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(12) $\lim_{x\to \pm\infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(12bis) $\lim_{x\to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(13) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$; $\quad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ dove $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(14) $\lim_{x\to \pi^-} \cot x = -\infty$; $\quad \lim_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$ dove $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(15) Se $P(x) = a_p x^p + \cdots + a_0$ è un polinomio di grado p e $Q(x) = b_q x^q + \cdots + b_0$ è un polinomio di grado q allora $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q > p \\ a_p/b_q & \text{se} \quad q = p \\ +\infty & \text{se} \quad q < p \end{cases}$.

Sappiamo inoltre che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^α, $\lg x$ sono *continue* nel loro insieme di definizione; quindi $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, etc, etc. Occorre anche ricordare i teoremi sui limiti delle somme, dei prodotti, dei quozienti etc.

Calcolare i seguenti limiti:

0) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+2x^2}{x^5+10x^4}$

0.5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

Suggerimento: moltiplicare e dividere per $2x$. Quanto vale $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 2x}{2x}$? (Porre $t = 2x$).

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5^x - x^4$

Suggerimento: cercate di mettere in evidenza 5^x; utilizzate poi i limiti notevoli (4) e (9bis).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg x - \sqrt{x}$

Suggerimento: cercate di mettere in evidenza $\sqrt{x}$; utilizzate poi (10).

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg\sqrt{x+1}}{x}$

Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi e (10).

4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\lg\sqrt{x+1}}{x}$

Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi e (3).

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lg(x^2+1)}{2^x}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-e^{2x}}$

7) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

Suggerimento: pensate a come avete risolto 0.5)...

8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{tg2x}$

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\dfrac{1}{x})$

(10) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan^2 x}{1-\cos x}$

Suggerimento: moltiplicare e dividere per $(1+\cos x)$.

Risposte 0): 0. 0.5): 2. 1): $+\infty$. 2): $-\infty$. 3): 0. 4): 1/2. 5): 0. 6): 0. 7): 3/2. 8): 2. 9): 1. 10): 2.

Calcolare i seguenti limiti:

(11) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x\cos x - x}$.

Suggerimento: potete ad esempio utilizzare la formula di Taylor.

Risoluzione:

Dimostriamo che

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x\cos x - x} = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

I polinomi di Taylor a $x = 0$ di $\sin x$ e $\cos x$ danno

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

con $o(x^4)$ un termine che va a zero più velocemente di x^4 e analogamente per $o(x^3)$ (abbiamo anche scritto a lezione $R_4(x)$ e $R_3(x)$). Quindi

$$\frac{\sin x - x}{x\cos x - x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{-\frac{1}{2} + o(x)},$$

da cui segue (**??**). In alternativa si può applicare L'Hôpital. Siano $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x\cos x - x$. Si trova che

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f'(0) = g'(0) = 0, \quad f''(0) = g''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad g'''(0) = -3,$$

e segue (**??**).

12) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. basta moltiplicare e dividere per $\sqrt{x}+1$; si ottiene

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1}\,\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

13) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+1} - x$ basta moltiplicare e dividere per $\sqrt{x^2+4x+1}+x$; si ottiene

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+4x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$$

che possiamo riscrivere come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{16x^2+1+8x}} + \frac{x}{4x+1}}$$

Si ottiene

$$\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2$$