Istituzioni di Matematica, II modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2019-2020.

Esercizi di riepilogo. Parte 4. Soluzione dell'esercizio 6.

Esercizio 6. Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x-1}$$

determinandone in particolare il dominio, massimi e minimi relativi, asintoti.
Soluzione. Il dominio di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ perché in $x = 1$ e $x = -1$ i due denominatori si annullano.
Osserviamo che $f(x) > 0$ per $x > 1$ e $f(x) < 0$ per $x < 1$ (il numeratore è sempre positivo e quindi il segno è determinato dal denominatore).
È chiaro che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

perché il numeratore tende a $e^0 = 1$ ed il denominatore è un numero in valore assoluto molto grande. Quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.
Osserviamo poi $x = 1$ ed $x = -1$ sono asintoti verticali: infatti è facile vedere che

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

Osserviamo poi che $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$. Infatti se $x = -1 - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ si ha

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{(-2-\epsilon)} e^{\frac{1}{-1-\epsilon+1}}$$

che è uguale a

$$\lim_{\epsilon \to 0+} -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\frac{1}{\epsilon}}}$$

e quest'ultimo limite è zero.
La derivata prima è

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+1}} \frac{x(x+3)}{(x^2-1)^2}$$

che si annulla in $x = 0$ ed $x = -3$. Il segno di $f'(x)$ è determinato da $-x(x+3)$ negli intervalli in cui è definita. Quindi $f'(x)$ è:
negativa in $(-\infty, 3)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$;
positiva in $(-3, -1)$ e $(-1, 0)$.
Ne deduciamo quanto segue:

- $f(x)$ parte da 0 per $x \sim -\infty$;
- $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, -3)$ e crescente in $(-3, -1)$; -3 è un punto di minimo relativo e la funzione in quel punto vale $-1/e^{1/2}4$;
- $f(x)$ tende a 0 per $x \to -1^-$;

- $f(x)$ parte da $-\infty$ per $x > -1$, $x \sim -1$ e cresce fino a $x = 0$ perché in $(-1, 0)$ la derivata è positiva; in $x = 0$ la derivata si annulla; poi $f(x)$ decresce in $(0, 1)$ perché $f'(x)$ è negativa in $(0, 1)$ e infine tende a $-\infty$ per $x \to 1^-$; vediamo che $x = 0$ è un punto di massimo relativo e la funzione in quel punto vale $-e$;
- $f(x)$ parte da ∞ per $x > 1$, $x \sim 1$ e decresce fino a zero per $x \to +\infty$.