Istituzioni di Matematica, II modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2019-2020.

Esercizi di riepilogo. Parte 5. Soluzione di alcuni esercizi.

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx \tag{1}$$

Soluzione. Prima di tutto facciamo la divisione euclidea; infatti $x^4+1 = (x+1)(x^3-x^2+x-1)+2$ che ci dà

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = (x+1) + \frac{2}{x^3-x^2+x-1} \equiv (x+1) + \frac{2}{(x^2+1)(x-1)}\,.$$

Quindi

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int (x+1)dx + \int \frac{2}{(x^2+1)(x-1)}dx\,;$$

il primo integrale a destra è immediato ed il secondo si calcola determinando A, B e C tali che

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A(2x)+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x-1)}$$

perché allora

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)}dx = A\log|x^2+1| + B\mathrm{arctg}x + C\log|x-1|\,.$$

Di fatto, abbiamo già risolto questo integrale durante l'anno....

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{2}$$

Soluzione. Facendo la sostituzione

$$\sqrt{x} = t\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2tdx\,,$$

applicando la formula di sostituzione, calcolando il risultante integrale in t e ritornando poi alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + c\,.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x dx \tag{3}$$

Soluzione. Osserviamo che l'integrale si può scrivere come

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^2 x(\cos x)dx$$

Facendo la sostituzione

$$\sin x = t\,, \quad \text{che dà} \quad dt = \cos x dx$$

otteniamo

$$\int \sqrt{t}(1-t^2)dt$$

che è di facile integrazione. Ri-sostituendo otteniamo la soluzione.

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx$$

Soluzione: Effettuiamo la sostituzione $\sin x = t$: si ha

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{16}$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \qquad \int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}dx.$$

Soluzione: Dimostriamo che

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = 1, \qquad \int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}dx = \frac{7}{2} + 2\log 2.$$

Infatti integrando per parti

$$\int x \sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = \sin x - x\cos x + c,$$

e quindi $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\pi/2} = 1$. Per calcolare il secondo integrale dividiamo x^2+1 per $x-1$ e otteniamo che

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1| + c.$$

Quindi $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1|\right]_2^3 = \frac{7}{2} + 2\log 2$.