Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, e fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Come già detto più volte, ogni elemento $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base, $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Quindi possiamo definire un'applicazione $v_i'\colon V \to \mathbb{R}$ che associa a ogni $v \in V$ la sua i-esima coordinata rispetto alla base $\mathcal{B}$. In simboli, $v_i'(v) = x_i$ per $i = 1, \dots, n$, o anche

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{vmatrix} v_1'(v) \\ \vdots \\ v_n'(v) \end{vmatrix}.$$

In particolare,

$$v_i'(v_j) = \delta_{ij}, \tag{8C.1}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker introdotto nell'Osservazione 7.4.

È facile vedere (esercizio) che ogni v_i' è lineare, per cui appartiene allo spazio duale V'. Di più, possiamo dimostrare la seguente

Proposizione 8C.1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e scegliamo una sua base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Allora $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ è una base di V'. In particolare,* $\dim V' = \dim V$.

Dimostrazione. Prima di tutto, $v_1', \dots, v_n'$ sono linearmente indipendenti. Infatti, supponiamo che si abbia

$$\alpha_1 v_1' + \cdots + \alpha_n v_n' = O,$$

dove qui $O\colon V \to \mathbb{R}$ indica l'applicazione nulla. Allora (8C.1) ci dice che

$$0 = O(v_j) = (\alpha_1 v_1' + \cdots + \alpha_n v_n')(v_j) = \alpha_j$$

per $j = 1, \dots, n$, e l'indipendenza lineare è dimostrata.

Prendiamo ora $\varphi \in V'$, e poniamo $\beta_j = \varphi(v_j)$ per $j = 1, \dots, n$. Allora

$$(\beta_1 v_1' + \cdots + \beta_n v_n')(v_j) = \beta_j = \varphi(v_j)$$

per $j = 1, \dots, n$; dunque il Corollario 5.3 ci dà

$$\beta_1 v_1' + \cdots + \beta_n v_n' = \varphi,$$

e $\mathcal{B}'$ è anche un sistema di generatori. □

Definizione 8C.1 La base $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ di V' è detta la *base duale* della base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.

ESEMPIO 8C.1 Prendiamo $V = \mathbb{R}_2[t]$. Ci sono alcuni elementi del duale particolarmente facili da definire: le valutazioni. Fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ la *valutazione* in t_0 è semplicemente l'applicazione lineare $\nu_{t_0}\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ data da

$$\nu_{t_0}(p) = p(t_0) \in \mathbb{R}.$$

Più in generale possiamo usare le derivate, e per $k \geq 0$ definire la *k-valutazione* $\nu_{t_0}^k$ in t_0 ponendo

$$\nu_{t_0}^k(p) = p^{(k)}(t_0) \in \mathbb{R},$$

dove $p^{(k)}$ indica la k-esima derivata del polinomio p. Per esempio, se $p(t) = 2t^2 - 2$, allora

$$\nu_1(p) = p(1) = 0, \qquad \nu_3^1(p) = p'(3) = 4 \cdot 3 = 12, \qquad \nu_{-\pi}^2 = p''(-\pi) = 4,$$

e così via. In particolare, se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, allora

$$a_0 = \nu_0(p), \qquad a_1 = \nu_0^1(p) \qquad \text{e} \qquad a_2 = \frac{1}{2}\nu_0^2(p). \tag{8C.2}$$

Consideriamo la base $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$ di V data dai soliti polinomi $p_0 = 1$, $p_1 = t$, e $p_2 = t^2$. Allora (8C.2) ci dice esattamente che la base duale di V' è data da

$$(p_0)' = \nu_0, \qquad (p_1)' = \nu_0^1, \qquad (p_2)' = \frac{1}{2}\nu_0^2,$$

dove stavolta l'apice indica che si tratta degli elementi della base duale, e non una derivata. Se invece come base di V prendiamo la base $\mathcal{C} = \{q_0, q_1, q_2\}$ dove $q_0 = 1 - t^2$, $q_1 = (t + t^2)/2$ e $q_2 = (t^2 - t)/2$, allora rispetto a questa base i polinomi di V si esprimono

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = a_0 q_0 + (a_0 + a_1 + a_2) q_1 + (a_0 - a_1 + a_2) q_2,$$

per cui la base duale stavolta è data da

$$(q_0)' = \nu_0, \qquad (q_1)' = \nu_1, \qquad (q_2)' = \nu_{-1}.$$

In questo caso le due basi individuano due isomorfismi fra V e V' diversi. Infatti la base $\mathcal{B}$ individua l'isomorfismo

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mapsto a_0 \nu_0 + a_1 \nu_0^1 + \frac{1}{2} a_2 \nu_0^2,$$

mentre la base $\mathcal{C}$ individua l'isomorfismo

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mapsto a_0 \nu_0 + a_1 \nu_1 + a_2 \nu_{-1}.$$

Come conseguenza della Proposizione 8C.1, gli spazi V e V' hanno la stessa dimensione (ammesso che V abbia dimensione finita), per cui pure $V'' = (V')'$, il duale del duale, ha la stessa dimensione di V.

Definizione 8C.2 Lo spazio $V'' = (V')'$ è detto il *biduale* di V.

Abbiamo visto che V e V' sono isomorfi, ma l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base. Invece V e V'' sono isomorfi in modo *canonico*, ovvero esiste un isomorfismo indipendente da qualunque scelta arbitraria. Infatti, definiamo un'applicazione $\Psi: V \to V''$ in questo modo: a ogni $v \in V$ associamo l'elemento $\Psi(v) = \psi_v: V' \to \mathbb{R}$ del biduale tale che $\psi_v(\varphi) = \varphi(v)$ per ogni $\varphi \in V'$ (nota che gli elementi del biduale sono applicazioni da V' in $\mathbb{R}$, cioè applicazioni che associano a ogni applicazione lineare da V in $\mathbb{R}$ un numero reale).

Proposizione 8C.2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora l'applicazione $\Psi: V \to V''$ appena definita è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Verifichiamo prima di tutto che è lineare. Prendiamo v_1, $v_2 \in V$ e $\varphi \in V'$. Allora

$$\begin{aligned}\Psi(v_1 + v_2)(\varphi) &= \psi_{v_1+v_2}(\varphi) = \varphi(v_1 + v_2)\\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \psi_{v_1}(\varphi) + \psi_{v_2}(\varphi) = \big[\Psi(v_1) + \Psi(v_2)\big](\varphi),\end{aligned}$$

cioè $\Psi(v_1 + v_2) = \Psi(v_1) + \Psi(v_2)$ per ogni v_1, $v_2 \in V$. Analogamente si dimostra che Ψ è omogenea, per cui è lineare.

Ora, noi sappiamo già che $\dim V'' = \dim V$; quindi per dimostrare che Ψ è un isomorfismo ci basta far vedere che è iniettiva. Ma infatti, supponiamo che $\Psi(v) = O$. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, e scriviamo $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Allora

$$0 = \Psi(v)(v'_j) = v'_j(v) = x_j$$

per $j = 1, \dots, n$, e dunque $v = O$. □

Osservazione 8C.1 Se V non è di dimensione finita, questa proposizione è in generale falsa. Certo, possiamo ancora definire la $\Psi: V \to V''$ come prima, e dimostrare che è iniettiva; sfortunatamente, però, se V ha dimensione infinita la Ψ può risultare non surgettiva. La classe degli spazi vettoriali di dimensione infinita in cui Ψ è un isomorfismo (detti *spazi riflessivi*) è molto importante per lo studio delle equazioni differenziali.

A ogni sottospazio di uno spazio vettoriale è possibile associare un sottospazio dello spazio duale (e viceversa):

Definizione 8C.3 Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. L'*annullatore* di S è il sottoinsieme S° del duale V' dato da

$$S^\circ = \{\varphi \in V' \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in S\}.$$

Analogamente, se R è un sottoinsieme di V' il suo *annullatore* ${}^\circ R \subset V$ è il sottoinsieme ${}^\circ R$ di V dato da

$${}^\circ R = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall \varphi \in R\}.$$

Nota che ${}^\circ R$ è l'annullatore di R nel biduale, riletto in V tramite l'isomorfismo Ψ.

Proposizione 8C.3 *Sia V uno spazio vettoriale, e V' il suo duale. Allora:*

(i) *Se S è un sottoinsieme di V, allora S° è un sottospazio di V'.*
(ii) *Se R è un sottoinsieme di V', allora ${}^\circ R$ è un sottospazio di V.*
(iii) *Se S è un sottoinsieme di V, allora $S^\circ = \big(\mathrm{Span}\,(S)\big)^\circ$.*
(iv) *Se R è un sottoinsieme di V, allora ${}^\circ R = {}^\circ\big(\mathrm{Span}\,(R)\big)$.*
(v) *Se S è un sottoinsieme di V, allora ${}^\circ(S^\circ) = \mathrm{Span}\,(S)$.*
(vi) *Se V ha dimensione finita e U è un sottospazio di V, allora*

$$\dim U^\circ = \dim V - \dim U.$$

(vii) *Se V ha dimensione finita e W è un sottospazio di V', allora*

$$\dim {}^\circ W = \dim V - \dim W.$$

Dimostrazione. (i) Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\circ$. Allora

$$\forall v \in S \qquad (\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) = 0 + 0 = 0,$$

per cui $\varphi_1 + \varphi_2 \in S^\circ$. Analogamente S° è chiuso rispetto al prodotto per scalari.

(ii) Come in (i).

(iii) Siccome $S \subseteq \mathrm{Span}\,(S)$, è chiaro (Esercizio 8C.2) che $(\mathrm{Span}\,(S))^\circ \subseteq S^\circ$. Viceversa, se $\varphi \in S^\circ$, $v_1, \ldots, v_k \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k \varphi(v_k) = 0 + \cdots + 0 = 0,$$

e quindi $\varphi \in (\mathrm{Span}\,(S))^\circ$. Ma φ è generico; quindi $S^\circ \subseteq (\mathrm{Span}\,(S))^\circ$, come richiesto.

(iv) Come in (iii).

(v) Prendiamo $\varphi \in S^\circ$ e $v \in S$; allora $\varphi(v) = 0$, per cui $v \in {}^\circ(S^\circ)$. Dunque $S \subseteq {}^\circ(S^\circ)$; da (ii) e (iv) otteniamo che $\mathrm{Span}\,(S) \subseteq {}^\circ(S^\circ)$. Viceversa, prendiamo un elemento $w \in V \setminus \mathrm{Span}\,(S)$. Per l'Esercizio 8C.3, esiste $\varphi \in \mathrm{Span}\,(S)^\circ$ tale che $\varphi(w) = 1$; quindi $w \notin {}^\circ(\mathrm{Span}\,(S)^\circ)$, per cui ${}^\circ(\mathrm{Span}\,(S)^\circ) \subseteq \mathrm{Span}\,(S)$, e ci siamo.

(vi) Sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base di U; completiamola a una base

$$\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

di V, e consideriamo la base duale $\mathcal{B}' = \{u'_1, \ldots, u'_k, v'_{k+1}, \ldots, v'_n\}$. Ci basta far vedere che $\{v'_{k+1}, \ldots, v'_n\}$ è una base di U°. Prima di tutto, ogni elemento di U si scrive come

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_k u_k + 0 v_{k+1} + \cdots + 0 v_n,$$

per cui $v'_j(u) = 0$ per ogni $u \in U$ e $j = k+1, \ldots, n$, cioè $v'_{k+1}, \ldots, v'_n \in U^\circ$. Inoltre, se

$$\varphi = \alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_k u'_k + \alpha_{k+1} v'_{k+1} + \cdots + \alpha_n v'_n \in U^\circ$$

si deve avere $0 = \varphi(u_i) = \alpha_i$ per $i = 1, \ldots, k$. Quindi $v'_{k+1}, \ldots, v'_n$ formano anche un sistema di generatori di U°, e ci siamo.

(vii) Segue subito da (vi) considerando il biduale (esercizio). □

8C.2 Trasposta di un'applicazione lineare

Vediamo ora che relazioni ci sono fra gli spazi duali e le applicazioni lineari.

Proposizione 8C.4 *Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora esiste un'unica applicazione lineare $T': W' \to V'$ tale che*

$$\varphi(T(v)) = T'(\varphi)(v) \tag{8C.3}$$

per ogni $v \in V$ e $\varphi \in W'$.

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in W'$ l'applicazione $v \mapsto \varphi(T(v)) \in \mathbb{R}$ è lineare per cui è un elemento univocamente individuato di V', elemento che chiameremo $T'(\varphi)$. Dobbiamo solo dimostrare che T' è lineare. Ma infatti

$$T'(\lambda\varphi)(v) = (\lambda\varphi)(T(v)) = \lambda[\varphi(T(v))] = \lambda T'(\varphi)(v)$$

per ogni $v \in V$, cioè $T'(\lambda\varphi) = \lambda T'(\varphi)$. Analogamente si dimostra che T' è additiva. □

Definizione 8C.4 L'applicazione $T': W' \to V'$ così definita si dice *trasposta* (o *duale*) dell'applicazione lineare $T: V \to W$.

Osservazione 8C.2 Il motivo del nome è che la matrice associata a T' è esattamente la trasposta della matrice associata a T. Infatti, fissiamo una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W, e indichiamo con $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ le basi duali di V' e W'. Prendiamo $\varphi \in W'$, e indichiamo con $a = F_{\mathcal{C}'}(\varphi) \in \mathbb{R}^m$ le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}'$. Se $w \in W$ ha coordinate $y = F_{\mathcal{C}}(w) \in \mathbb{R}^m$, allora è facile verificare (esercizio) che

$$\varphi(w) = \varphi_a(y),$$

dove $\varphi_a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è la solita funzione definita nell'Esempio 5.9. Indichiamo con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta T rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, e con $A' \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta T' rispetto a $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{B}'$. Se indichiamo con $x = F_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{R}^n$ le coordinate di un vettore $v \in V$ allora la (8C.3) è equivalente a

$$\varphi_a(Ax) = \varphi_{A'a}(x).$$

Ma noi conosciamo già una matrice che soddisfa questa uguaglianza: la matrice trasposta A^T (vedi il Lemma 5.10). Siccome l'unica matrice che la può soddisfare è quella che rappresenta T' rispetto a $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{B}'$, ne deduciamo che $A' = A^T$, come voluto.

Mettendo insieme annullatori e applicazione trasposta otteniamo la

Proposizione 8C.5 *Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita. Allora si ha*

$$\operatorname{Ker} T = {}^\circ(\operatorname{Im} T'), \quad \operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Im} T)^\circ, \quad \operatorname{Im} T = {}^\circ(\operatorname{Ker} T'), \quad \operatorname{Im} T' = (\operatorname{Ker} T)^\circ.$$

Dimostrazione. Sia $v \in \operatorname{Ker} T$, e $\varphi = T'(\psi) \in \operatorname{Im} T'$. Allora

$$\varphi(v) = T'(\psi)(v) = \psi\bigl(T(v)\bigr) = \psi(O) = 0,$$

per cui $\operatorname{Ker} T \subseteq {}^\circ(\operatorname{Im} T')$. Viceversa, se $v \in {}^\circ(\operatorname{Im} T')$ si deve avere

$$0 = T'(\psi)(v) = \psi\bigl(T(v)\bigr)$$

per ogni $\psi \in W'$, e questo implica (Esercizio 8C.1) che $T(v) = O$. Essendo v generico, questo vuol dire che ${}^\circ(\operatorname{Im} T') \subseteq \operatorname{Ker} T$, e la prima uguaglianza è dimostrata.

La seconda si dimostra nello stesso modo (esercizio); vediamo la terza. Prendiamo $w = T(v) \in \operatorname{Im} T$, e $\psi \in \operatorname{Ker} T'$. Allora

$$\psi(w) = \psi\bigl(T(v)\bigr) = T'(\psi)(v) = O(v) = 0,$$

per cui $\operatorname{Im} T \subseteq {}^\circ(\operatorname{Ker} T')$. Ma ora

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} T &= \dim V - \dim \operatorname{Ker} T = \dim V - \dim {}^\circ(\operatorname{Im} T') \\ &= \dim \operatorname{Im} T' = \dim W - \dim \operatorname{Ker} T' = \dim {}^\circ(\operatorname{Ker} T'),\end{aligned} \tag{8C.4}$$

dove abbiamo usato il Teorema della dimensione e la Proposizione 8C.3, per cui anche la terza uguaglianza è dimostrata. La quarta si verifica analogamente, e ci siamo. □

Osservazione 8C.3 Una conseguenza di (8C.4) è che un'applicazione lineare e la sua trasposta hanno lo stesso rango.

Esercizi

8C.1 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Dimostra che $\varphi(v) = 0$ per ogni $\varphi \in V'$ se e solo se $v = O$.

8C.2 Siano U_1, $U_2 \subseteq V$ sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostra che se si ha $U_1 \subseteq U_2$ allora $U_2^\circ \subseteq U_1^\circ$; che $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$; e che $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

8C.3 Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V, e prendiamo un vettore $w \in V \setminus U$. Dimostra che esiste $\varphi \in U^\circ$ tale che $\varphi(w) = 1$. (*Suggerimento:* completa una base di $U \oplus \mathbb{R}w$ a una base di V.)

8C.4 Sia $T: V \to W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita, e consideriamo la sua trasposta $T': W' \to V'$ e la trasposta della trasposta $T'': V'' \to W''$. Dimostra che $T'' = \Psi_W \circ T \circ \Psi_V^{-1}$, dove $\Psi_V: V \to V''$ e $\Psi_W: W \to W''$ sono gli isomorfismi canonici. In altri termini, se identifichiamo V e W coi loro biduali, allora la trasposta della trasposta coincide con l'applicazione originaria.