

## CAPITOLO 8

### INTEGRALI DEFINITI

#### 61. Il metodo di esaustione

Con l'espressione «*metodo di esaustione*» si fa riferimento ad un metodo per calcolare le aree ed i volumi di figure curvilinee, usato da Archimede nel III secolo a.C., ma risalente, secondo lo stesso Archimede, ed Eudosso di Cnido, vissuto nel IV secolo a.C.

Abbiamo già descritto nel paragrafo 16 il metodo che Archimede utilizzava per calcolare l'area di un cerchio, approssimando tale area con le aree di poligoni regolari di  $n$  lati inscritti (o circoscritti). Riferendoci a questo esempio, con la parola «*esaustione*» si vuole significare che un cerchio viene riempito, o «*esaurito*», inscrivendo in esso poligoni regolari di  $n$  lati, e facendo poi tendere  $n$  all'infinito.

Descriviamo in questo paragrafo il metodo di esaustione con il linguaggio moderno, facendo uso della teoria dei limiti, in modo da facilitare la comprensione del metodo generale che introdurremo nel paragrafo successivo.

Calcoliamo con il metodo di esaustione l'area di un *settore di parabola*, cioè l'area della regione  $S$  che nel piano cartesiano  $x, y$  è compresa tra l'asse delle  $x$ , il grafico della funzione  $f(x) = x^2$  nell'intervallo  $[0, b]$ , e la retta verticale di equazione  $x = b$  ( $b > 0$ ), come in figura 8.1.

Dividiamo l'intervallo  $[0, b]$  in  $n \in \mathbf{N}$  intervalli,  $[x_{k-1}, x_k]$ , ciascuno di ampiezza  $b/n$ , ponendo:

$$(61.1) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}b, \quad x_2 = \frac{2}{n}b, \quad \dots, \quad x_k = \frac{k}{n}b, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

Calcoliamo l'area della regione tratteggiata nella figura 8.2. La regione tratteggiata è unione di rettangoli. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$ , di lunghezza uguale a  $b/n$ , ed ha per altezza il valore della funzione in  $x_{k-1}$ , cioè  $f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2$ . L'area totale è data dalla somma delle aree dei rettangoli componenti, cioè (il simbolo di sommatoria è stato

Per facilitare il lettore osserviamo che la (61.2) si può riscrivere esplicitamente, senza l'uso del simbolo di sommatoria, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 & f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \dots + \\
 (61.3) \quad & + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_0^2 \frac{b}{n} + x_1^2 \frac{b}{n} + \dots + x_{k-1}^2 \frac{b}{n} + \dots + x_{n-1}^2 \frac{b}{n} = \\
 & = \frac{b}{n} (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 + \dots + x_{n-1}^2).
 \end{aligned}$$

La somma indicata nella (61.2) è un'approssimazione per difetto dell'area della regione  $S$ . Analogamente otteniamo un'approssimazione per eccesso considerando l'area della unione di rettangoli, come in figura 8.3.

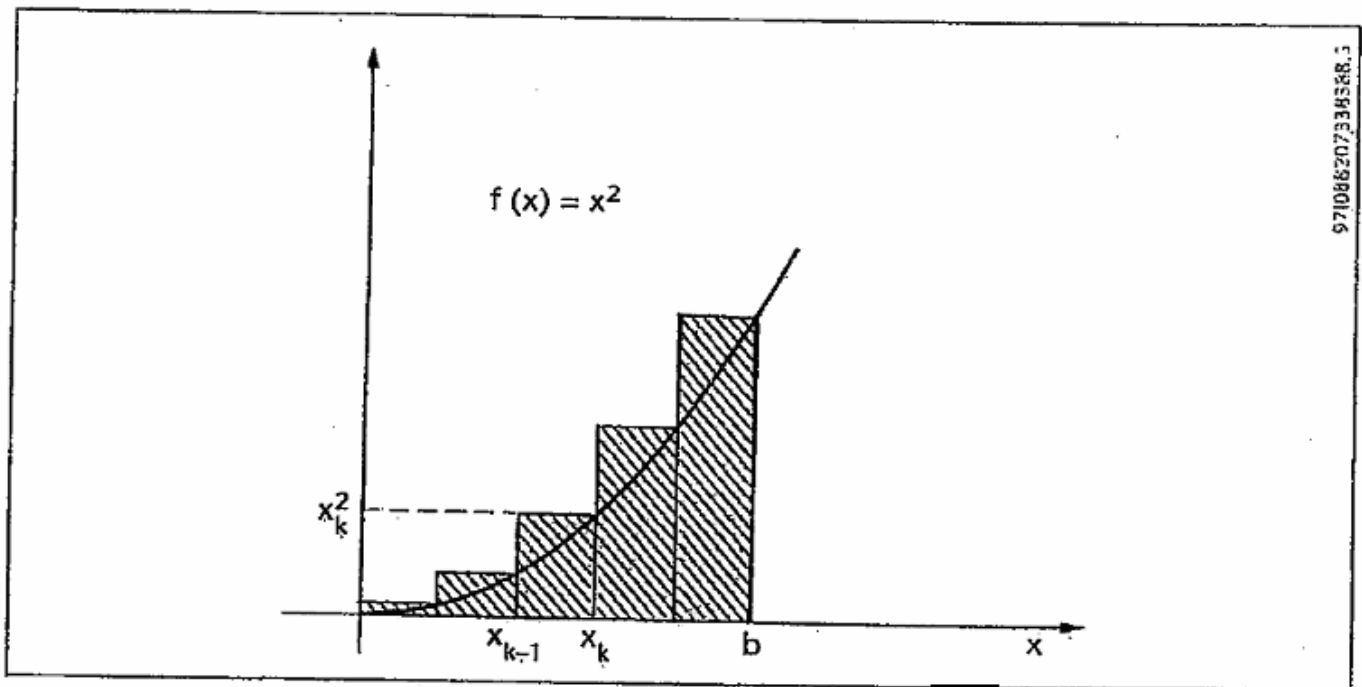


Figura 8.3

Rispetto al caso precedente, stiamo considerando rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$ , e per altezza  $f(x_k) = x_k^2$ . L'area totale in questo caso è data da

$$(61.4) \quad \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Quindi abbiamo ottenuto le seguenti stime per difetto e per eccesso dell'area della regione  $S$ :

$$(61.5) \quad \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_{k-1}^2 < \text{area } S < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \forall n \in \mathbf{N};$$

la somma a primo membro è detta *somma integrale inferiore*, mentre quella all'ultimo membro è detta *somma integrale superiore*.

Ricordando la definizione (61.1) di  $x_k$ , valutiamo l'ultima sommatoria:

$$(61.6) \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} b \right)^2 = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2;$$

la (61.5) si può quindi riscrivere:

$$(61.7) \quad \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \text{area } S < \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Utilizziamo la formula (11.10), che si verifica per mezzo del principio di induzione:

$$(61.8) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1).$$

Sostituiamo questo valore nell'ultimo membro della (61.7), mentre a primo membro sostituiamo il valore della somma corrispondente, cambiando quindi  $n$  con  $n - 1$ . Otteniamo:

$$(61.9) \quad \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} < \text{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3};$$

cioè, semplificando:

$$(61.10) \quad \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} < \text{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Si calcola facilmente il limite per  $n \rightarrow +\infty$  delle successioni che compaiono nella relazione precedente (si può ad esempio dividere numeratore e denominatore per  $n^2$ ). Dato che il limite del primo membro è uguale al limite del membro a destra, il comune valore ( $= b^3/3$ ) è l'area della regione  $S$ . Ab-

biamo quindi ritrovato il risultato di Archimede: l'area del settore di parabola  $S$ , come in figura 8.1, è data da

$$(61.11) \quad \text{area } S = \frac{b^3}{3}.$$

Si noti ciò che apparentemente può sembrare una coincidenza: derivando il risultato trovato rispetto a  $b$  otteniamo:

$$(61.12) \quad \frac{d}{db} (\text{area } S) = b^2.$$

Cioè, la derivata dell'area, pensata come funzione del parametro  $b$ , è uguale al valore della funzione  $f(x) = x^2$ , che ci è servita per definire la regione  $S$ , calcolata per  $x = b$ . Chiariremo nel paragrafo 67 l'importanza di questa apparente curiosità.

Nei paragrafi seguenti introduciamo l'integrale definito sulla base delle idee sopra esposte.

## 62. Definizioni e notazioni

Sia  $f(x)$  una funzione *limitata* nell'intervallo chiuso  $[a, b]$  di  $\mathbf{R}$ ; quindi esistono due costanti  $m, M$  tali che  $m \leq f(x) \leq M$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Una *partizione*  $P$  di  $[a, b]$  è un insieme ordinato costituito di  $n + 1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , con  $n \in \mathbf{N}$ , tali che

$$(62.1) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

Quindi, per definizione, risulta  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Gli  $n + 1$  punti individuano  $n$  intervalli  $[x_{k-1}, x_k]$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Per ogni partizione  $P$  di  $[a, b]$ , poniamo

$$(62.2) \quad m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$(62.3) \quad M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le *somme (integrali) inferiori*

$$(62.4) \quad s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le *somme (integrali) superiori*