

REGOLE D'ESAME

- i) Sono vietati libri, appunti e calcolatrici. Si usa solo la penna !
- ii) Telefoni cellulari, smartphones, tablets etc **rigorosamente** spenti.
- iii) Risposta sbagliata -1 , risposta non indicata 0 .
- iv) Non si perdono punti con le domande a risposta aperta. Scrivere il procedimento non è necessario ma può far ottenere punti parziali anche se la risposta è sbagliata.
- v) Tempo a disposizione: **50 minuti**.

1. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-2}^2 \frac{x^2}{e^{x^3}} dx$$

A $\frac{8e^8}{9}$

B $\frac{e^8 - e^{-8}}{3}$

C 0

D $\frac{e^{-8} - e^8}{3}$

E $\frac{e^2 - e^{-2}}{3}$

Risposta: B

Infatti:

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}} dx = \int x^2 e^{-x^3} dx = \int \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x^2)e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int (-3x^2)e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$$

dove abbiamo utilizzato che

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)}.$$

Quindi

una primitiva di $\frac{x^2}{e^{x^3}}$ è $G(x) := -\frac{1}{3}e^{-x^3}$.

L'integrale definito è uguale a

$$G(x)|_{x=-2}^{x=2} \equiv G(2) - G(-2) = -\frac{1}{3}e^{-x^3}(2) - \left(-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right)(-2) = -\frac{1}{3}e^{-8} + \frac{1}{3}e^8$$

2. Usando la tecnica di integrazione per parti, calcolare l'integrale indefinito

$$\int (x^2 - 2x + 1) \log(x) dx$$

Soluzione.

Riscriviamo l'integrale come

$$\int (x - 1)^2 \log(x) dx$$

Sappiamo che

$$(x-1)^2 = \left(\frac{1}{3}(x-1)^3\right)'$$

Quindi possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int \left(\frac{1}{3}(x-1)^3\right)' \log(x) dx \tag{1}$$

Ora possiamo applicare l'integrazione per parti: (1) è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3 \log(x) - \int \frac{1}{3}(x-1)^3 (\log(x))' dx$$

che è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3 \log(x) - \int \frac{1}{3}(x-1)^3 \frac{1}{x} dx$$

che è a sua volta uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3 \log(x) - \frac{1}{3} \int \left[(x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}) \right] dx$$

dove abbiamo svolto $(x-1)^3$ e semplificato.

Otteniamo

$$\frac{1}{3}(x-1)^3 \log(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx + \int x dx - \int dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} dx$$

che è uguale a

$$\frac{1}{3}(x-1)^3 \log(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3} \log x.$$

3. Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(x) + \cos(x)) dx$$

A -1

B $-1 + \sqrt{2}$

C 1

D $\sqrt{2}$

E $-1 - \sqrt{2}$

Risposta: C.

Infatti

$$\int (\sin(x) + \cos(x)) dx = \int \sin(x) dx + \int \cos(x) dx$$

che è uguale a

$$-\cos x + \sin x$$

L'integrale definito è ottenuto calcolando questa primitiva in $\pi/4$ e 0 e facendone la differenza.

Otteniamo

$$-\cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - (-\cos 0 + \operatorname{sen} 0)$$

che è uguale a 1

4. Usando un'opportuna sostituzione, calcolare l'integrale

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione.

Poniamo $\sqrt{x} = t$ e quindi $x = t^2$ e $dx = 2t dt$. Sostituendo otteniamo

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{t} 2t dt = 2 \int \operatorname{sen} t dt = -2 \cos t$$

In definitiva, tornando alla variabile x , abbiamo

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x}$$