Istituzioni di Matematica, 2021-2022, prova di autovalutazione del 2/5/2022

REGOLE D'ESAME

i) All'esame saranno vietati libri, appunti e calcolatrici. Provate a risolvere questi esercizi senza consultare libri o appunti (ma se siete bloccati utilizzateli).
ii) Risposta sbagliata -1, risposta non indicata 0.
iii) Non si perdono punti con le domande a risposta aperta. Scrivere il procedimento non è necessario ma può far ottenere punti parziali anche se la risposta è sbagliata.
iv) Tempo a disposizione per questa autovalutazione: **90 minuti**.

1. Sia $y(x)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = (1-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $y(x)$ calcolata in $x = 1$ vale
$\boxed{\text{A}}$ $\pi + e$, $\boxed{\text{B}}$ $2\pi + \frac{1}{e}$, $\boxed{\text{C}}$ $1 - \frac{2}{e}$, $\boxed{\text{D}}$ $4 + \frac{1}{2e}$, $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle risposte

Risposta: $\boxed{\text{C}}$

Soluzione. Trattasi di un'equazione differenziale lineare del primo ordine, per la quale esiste una formula risolutiva che richiamiamo. Sia in generale $y' = a(x)y + b(x)$; allora se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ la soluzione generale è

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

dove l'integrale indefinito include una costante arbitraria che va determinata con la condizione iniziale. Nel nostro caso

$$a(x) = -1 \quad \text{e} \quad b(x) = 1 - x$$

Quindi

$$A(x) = -x\,, \quad e^{A(x)} = e^{-x}.$$

Ne segue che la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-x} \int e^{x}(1-x)dx$$

Ora

$$\int e^{x}(1-x)dx = e^{x} + C_1 - \int e^{x} x dx\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x (x)' dx = e^x x - e^x + C_2$$

Quindi

$$\int e^x (1-x) dx = e^x + C_1 - (e^x x - e^x + C_2) = 2e^x - xe^x + C$$

dove abbiamo combinato le due costanti arbitrarie in un'unica costante arbitraria.
La soluzione generale è quindi

$$y(x) = 2 - x + Ce^{-x}$$

e imponendo che $y(0) = 0$ otteniamo $C = -2$.
Conclusione: la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 2 - x - 2e^{-x}$ che calcolata in $x = 1$ vale $1 - 2/e$.

2. Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{-y^3}{x+1} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ $y = \frac{2}{\log|x+1|+4}$ $\boxed{\text{B}}$ $y = \frac{1}{\sqrt{2\log|x+1|+4}}$ $\boxed{\text{C}}$ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3\log|x+1|+8}}$
$\boxed{\text{D}}$ $y = \frac{-1}{\sqrt{2\log|x+1|+1}}$ $\boxed{\text{E}}$ $y = \frac{1}{\sqrt{\log|x+1|+2}}$
Risposta : $\boxed{\text{B}}$

Soluzione. Trattasi di un'equazione differenziale del primo ordine non lineare a variabili separabili. La possiamo scrivere nella forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^3}{x+1}$$

che riscriviamo come

$$\frac{dy}{y^3} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Ora integriamo ambo i membri ed otteniamo

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = -\log|x+1| + C$$

da cui

$$y^2 = \frac{1}{2\log|x+1| + C}$$

e quindi

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2\log|x+1| + C}}$$

Dalla condizione iniziale capiamo che la soluzione negativa è da scartare. Quindi la soluzione generale è

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\log|x+1| + C}}$$

Per determinare la costante imponiamo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$; otteniamo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

e quindi $C = 4$.
Conclusione: la soluzione del problema di Cauchy è

$$\frac{1}{\sqrt{2\log|x+1| + 4}}$$

3. Per quali valori di α i seguenti vettori sono ortogonali?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3-\alpha \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 2$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = -6, 2$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 6, -2$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 2, 1$ $\boxed{\text{E}}$ $\alpha = 0$

Risposta : $\boxed{\text{C}}$

Soluzione. Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è uguale a zero. Il prodotto scalare dei due vettori dati è uguale a

$$1 \cdot \alpha + \alpha \cdot (3-\alpha) + 3 \cdot 4$$

e quindi i due vettori sono ortogonali se e solo se α soddisfa l'equazione

$$\alpha^2 - 4\alpha - 12 = 0$$

Le soluzioni danno la risposta C.

4. Determinare un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia ortogonale al vettore $\underline{v} = (1, 2, 0)$ **e** al vettore $\underline{w} = (0, 1, 1)$

Soluzione. Basta prendere il prodotto vettoriale dei due vettori. Si ottiene il vettore $(2, -1, 1)$.

5. Consideriamo il sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} kx + ky + z = 1 \\ y + 2kz = -2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Il sistema ammette un'unica soluzione per
$\boxed{\text{A}}$ $k = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $k = -1$ $\boxed{\text{C}}$ $k \neq 0$ e $k \neq -1$ $\boxed{\text{D}}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{E}}$ $k \neq -1$ e $k \neq -2$

Risposta: $\boxed{\text{C}}$

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è uguale a $k(-2-2k)$ (sviluppare secondo la prima colonna). Per il teorema di Cramer il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $k(-2-2k) \neq 0$ e quindi se e solo se $k \neq 0$ e $k \neq -1$.

6. Discutere la risolubilità del sistema dell'esercizio 5 per $k = -1$.

Soluzione. In questo caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} -x - y + z = 1 \\ y - 2z = -2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$$

ed è ovvio che le ultime 2 equazioni sono incompatibili. Il sistema non ammette quindi soluzioni.
Potevamo anche applicare Rouché-Capelli: la matrice A dei coefficienti del sistema ha rango 2; la matrice completa A' ha invece rango 3, come si capisce prendendo il minore individuato dalla prima, terza e quarta colonna.