Istituzioni di Matematica, Modulo I.

Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2022-2023.

Compito a casa del 19/10/2022. Soluzione di alcuni esercizi.

Esecizio 1.
Stabilire se le seguenti proprietà dei numeri reali sono vere o false.

(1)
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = 1$$

(2)
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1$$

(3)
$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

(4)
$$\frac{a^n}{n} = a$$

(5)
$$-x \leq -1 \ \Rightarrow \ \ x \leq 1$$

(6)
$$\frac{(\frac{a}{b})}{b} = a$$

(7)
$$\frac{a}{c} \geq 1 \Rightarrow a \geq c$$

(8)
$$\sqrt{(-2)^2} = -2$$

(9)
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad a, b > 0$$

Soluzione.

(1) Falsa. Se $c \neq 0$ allora $\frac{1}{c}$ è quell'unico numero che moltiplicato per c dà 1. Quindi
$$\frac{1}{\frac{b}{a}}$$
è quell'unico numero che moltiplicato per $\frac{b}{a}$ dà 1. Ma
$$\frac{a}{b}\frac{b}{a} = 1$$
e quindi per unicità
$$\frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$$

Ne segue che

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = \frac{a^2}{b^2}$$

(2) Falsa. Ad esempio $1/2 + 1/2 = 1$ ma $2 + 2 \neq 1$. Di fatto, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$; se questa quantità è uguale a 1 allora possiamo solo dire che $b + a = ab$.
(3) Falsa. A destra c'è $(cb + ca)/ab$ che non è uguale a $\frac{c}{a+b}$
(4) Falsa. a^n vuol dire $(aaa \cdots a)$ n volte e questa quantità non può certo essere semplificata con il denominatore.
(5) Falsa. Per ottenere x ed 1 dalla disuguaglianza data dobbiamo moltiplicarla per (-1). Ma sappiamo che $\alpha \leq \beta$, $\gamma < 0$ implica che $\gamma\alpha \geq \gamma\beta$. Quindi $-x \leq -1 \;\Rightarrow\; x \geq 1$.
(6) Falsa. L'espressione data è uguale a a/b^2.
(7) Falsa per una ragione già spiegata sopra (se $c < 0$, moltiplicando la disuguaglianza data per c il verso della disuguaglianza si scambia; è invece vero che $\frac{a}{c} \geq 1, c > 0 \Rightarrow a \geq c$).
(8) Falsa. In generale $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(9) Falsa. La radice quadrata non è una funzione additiva.

Esercizio 2. A cosa è uguale $\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}}$? Possibile risposte (scegliere quella giusta):

$$0\,, \quad 1\,, \quad \pi\,, \quad \frac{1}{\pi}\,, \quad \sqrt[3]{\pi^{10}}\,, \quad \sqrt[10]{\pi^3}\,.$$

Soluzione esercizio 2. Sappiamo che, in generale,

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}\,, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

In questo caso

$$\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}} = \pi^{3+\frac{1}{3}} = \pi^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{\pi^{10}}\,.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\log_2(\frac{1}{16})\,, \quad 2^{\log_2(512)}\,, \quad \log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

Soluzione. Dato che $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ si ha, chiaramente, $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$; infatti -4 è l'esponente che occorre dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$. Dato che per la definizione stessa di logaritmo si ha

$$\forall x \in (0, \infty) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

è chiaro che $2^{\log_2(512)} = 512$.
Per calcolare

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = ((2^{-1}))^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Ci domandiamo qual è l'esponente che bisogna dare a $2^{\frac{1}{2}}$ per ottenere $2^{-\frac{1}{5}}$; tale esponente è $-\frac{2}{5}$. Infatti

$$(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})} = 2^{-\frac{1}{5}}\,.$$

Quindi

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}) = -\frac{2}{5}.$$

Esercizio 6. Determinare $x \in (0, +\infty)$ tale che $\log_4(x) = 2$. Ripetere l'esercizio per $\log_7(x) = -2$.
Soluzione. Basta applicare la definizione: $\log_4(x)$ è l'esponente che occorre dare a 4 per ottenere x: quindi $4^{\log_4(x)} = x$; ma ci viene data l'informazione che $\log_4(x) = 2$ e concludiamo allora che $x = 4^2 = 16$. Analogamente: $7^{\log_7(x)} = x$ e dato che ci viene data l'informazione che $\log_7(x) = -2$ concludiamo che $x = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$.