**Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2020-21.**
**Istituzioni di Matematica. Canale 2.**
**Compito a casa del 29/10/20**

**Esecizio 1.** Determinare, se esistono, le soluzioni delle equazioni

$$|x+10| = 3\,, \quad |x+5| = -2\,, \quad x = 4 - 3|x|\,.$$

*Soluzione.* La seconda equazione non ha soluzione perché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a 0.. Determiniamo le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$. Per definizione $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ne segue che l'equazione può essere riscritta come segue

$$x = 4 - 3x \text{ se } x \geq 0\,, \quad x = 4 + 3x \text{ se } x < 0$$

La prima equazione ha soluzione $x = 1$ che è una soluzione accettabile dato che $1 > 0$.
La seconda equazione ha soluzione $x = -2$ che è anche accettabile dato che $-2 < 0$.
Conclusione: le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$sono $x = 1$, $x = -2$.
Determiniamo infine le soluzioni dell'equazione $|x+10| = 3$. Per definizione $|x+10|$ è uguale a $x+10$ se $x \geq -10$ ed è uguale a $-x-10$ se $x < -10$. Nel primo caso otteniamo $x+10 = 3$ e quindi $x = -7$ che è accettabile perché $-7 < -10$. Nel secondo caso otteniamo $-x - 10 = 3$ e cioè $x = -13$ che è anche accettabile perché $-13 < -10$. Conclusione: le soluzioni dell'equazione $|x + 10| = 3$ sono $x = -7$ e $x = -13$.

**Esecizio 2.** Determinare l'insieme di definizione (o dominio naturale o, semplicemente, dominio) della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x-6}}\,.$$

**Soluzione.** Dobbiamo imporre che

$$\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$$

(perché la radice è definita solo per numeri non-negativi) e

$$x \neq 6$$

(perché non ha senso dividere per 0).
Assumiano subito che $x \neq 6$.
Una frazione è maggiore o uguale a zero quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi oppure entrambi negativi (ma ovviamente il denominatore non si deve annullare). Quindi

$$\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ (x-6) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ (x-6) < 0 \end{cases}$$

Studiamo allora il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore: la disequazione $x^2+3x-4 \geq 0$ è soddisfatta per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$. Quindi il numeratore è $\geq 0$ in $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ ed è invece $< 0$ in $(-4, 1)$. Il denominatore è strettamente positivo per $x \in (6, \infty)$, si annulla per $x = 6$ (valore che va quindi escluso perché 0 non è ammesso al denominatore) ed è strettamente negativo per $x < 6$.
Conclusione: $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$ per $x \in [-4, 1] \cup (6, \infty)$ dove il primo intervallo in questa unione è relativo al secondo sistema mentre il secondo intervallo al primo.

**Esercizio 3 (da fare in un secondo tempo, dopo aver fatto tutti gli altri esercizi).**
Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione

$$|x^2+3x-4| < 2.$$

**Risposta:** $x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})) \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2})$.
*Soluzione.* Utilizzeremo la notazione compatta per gli intervalli nei numeri reali: se $a < b$ denotiamo

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}\,, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}\,, \quad [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

e analogamente per $(-\infty, a)$ e $(-\infty, a]$.

Riscriviamo esplicitamente la disequazione utilizzando la definizione di modulo. Per definizione

$$|x^2+3x-4| = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{se } \ x^2+3x-4 \geq 0 \\ -(x^2+3x-4) & \text{se } \ x^2+3x-4 < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$|x^2+3x-4| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ -(x^2+3x-4) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ -x^2-3x+4 < 2 \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni del primo sistema che riscriviamo come

$$\begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-6 < 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2+3x-4=0$ ha il $\Delta = 25 > 0$; le sue soluzioni reali sono $x_2 = -4$, $x_1 = 1$. Dato che il coefficiente di $x^2$ è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2+3x-4 \geq 0$ per $x \in (-\infty,-4] \cup [1,+\infty)$ (valori esterni).
L'equazione $x^2+3x-6=0$ ha il $\Delta = 33 > 0$; le sue soluzioni reali sono

$$\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Dato che il coefficiente di $x^2$ è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2+3x-6 < 0$ quando

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{-3+\sqrt{33}}{2}) \quad (\text{valori interni})\,.$$

Notare che utilizziamo qui le parentesi tonde, visto che vogliamo escludere gli estremi dell'intervallo. [1] Osserviamo poi che

$$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} \simeq -4,3722\,, \quad \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \simeq 1,3722\,,$$

e quindi

$$\frac{-3-\sqrt{33}}{2} < -4 < 1 < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\,.$$

Concludiamo che queste due disequazioni sono *simultaneamente* soddisfatte per

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2})\,.$$

Queste sono quindi le soluzioni del primo sistema.
Passiamo al secondo sistema che riscriviamo nella forma:

$$\begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ x^2+3x-2 > 0 \end{cases}$$

Per quanto visto sopra sappiamo che la prima disequazione $x^2+3x-4 < 0$ è soddisfatta da $x \in (-4,1)$ (ora dobbiamo prendere i valori interni ed escludere gli estremi). L'equazione $x^2+3x-2=0$ ha soluzioni

$$\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

[1] infatti in quei 2 punti l'espressione $x^2+3x-6$ si annulla; noi vogliamo invece che sia strettamente minore di zero.

e quindi $x^2 + 3x - 2 > 0$ per

$$x \in (-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{-3-\sqrt{17}}{2} \simeq -3,5615\,, \qquad \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \simeq 0,5615$$

e quindi

$$-4 < \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} < 1$$

Le soluzioni simultanee delle due disequazioni, e cioè del secondo sistema, sono date da

$$x \in (-4, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1)\,.$$

Riassumendo: la disequazione $|x^2 + 3x - 4| < 2$ è soddisfatta da

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2}) \text{ oppure } x \in (-4, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1)$$

e quindi (pensateci un attimo)

$$x \in (\frac{-3-\sqrt{33}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})) \cup [-1, \frac{-3+\sqrt{33}}{2})\,.$$

La soluzione dell'esercizio è completa.

**Esecizio 4.** *Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificato il sistema*

$$\begin{cases} |x| > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}.$$

**Soluzione.** Riscriviamo il sistema utilizzando la definizione di modulo. Il sistema è soddisfatto $\Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

Consideriamo il primo sistema: l'unica disequazione da studiare veramente è la terza. Potete applicare il metodo noto e scoprite che è soddisfatta per $x \in (-4, 0)$ (valori interni). Ma allora il primo sistama non è soddisfatto da alcun $x$ (è ovvio che non ci sono $x$ che sono simultaneamente in $(-4, 0)$ (e quindi negativi) e in $(2, \infty)$. In altre parole *non* esiste $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa *simultaneamente* le 3 disequazioni. Consideriamo il secondo sistema che è equivalente a

$$\begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

È chiaro che la soluzione è data da tutti gli $x \in (-4, -2)$. Conclusione: il sistema dato è soddisfatto da ogni $x \in (-4, -2)$.

**Esecizio 5.** Determinare l'insieme di definizione (o dominio) delle seguenti funzioni:

$$(i)\ f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (ii)\ f(x) = \sqrt{\frac{|x+6|}{|x-3|}}; \quad (iii)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 9}} + \cos x$$

**Soluzione.** La prima funzione è definita per tutti gli $x$ tali che $\cos^2 x \neq 0$. Cerchiamo allora gli $x$ tali che $\cos^2 x = 0$ ed escludiamoli dal dominio. In generale, per un numero reale $a$ si ha che $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Basta allora cercare gli $x$ tali che $\cos x = 0$. Sappiamo che questi sono i valori

$$\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Conclusione:

$$\mathrm{Dom}(\frac{1}{\cos^2 x}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

La seconda funzione ha come insieme di definizione $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (il modulo è sempre $\geq 0$). La terza funzione è sempre definita perché $x^2 + x + 9 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (il $\Delta$ è strettamente negativo ed il coefficiente di $x^2$ è positivo) e $\cos x$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 6.** Verificare che la funzione $f(x) = x^2$ con dominio $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ è strettamente crescente e quindi iniettiva.
*Soluzione vista in dettaglio in classe.*

**Esercizio 7.** Studiare l' iniettività delle seguenti applicazioni:

- $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
  $x \longrightarrow \sin x$
- $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2$
- $f_3 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow x^2$
- $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow 2x + 5$

*Soluzione vista in dettaglio in classe.*

**Esercizio 8.** Consideriamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2 - 3x + 2$.
(i) Stabilire se $0 \in \mathrm{Im}(f)$
(ii) Stabilire se $f$ è iniettiva
*Soluzione vista in dettaglio in classe.*

**Esercizio 9.** Consideriamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2 + 1$.
Vero o Falso: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
*Soluzione vista in dettaglio in classe.*

**Esercizio 10 (di ripasso).** A cosa è uguale $\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}}$ ? Possibile risposte (scegliere quella giusta):

$$0\,, \quad 1\,, \quad \pi\,, \quad \frac{1}{\pi}\,, \quad \sqrt[3]{\pi^{10}}\,, \quad \sqrt[10]{\pi^3}\,.$$

**Soluzione.** Sappiamo che, in generale,

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}\,, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

In questo caso

$$\pi^3\,\pi^{\frac{1}{3}} = \pi^{3+\frac{1}{3}} = \pi^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{\pi^{10}}\,.$$

**Esercizio 11 (di ripasso).** *Scrivere un' uguaglianza che colleghi tra loro le seguenti quantità :*

$$\log_{10}(\frac{54}{11})\,, \quad \log_{10}(2)\,, \quad \log_{10}(3)\,, \quad \log_{10}(11).$$

**Soluzione.** Ricordiamo che se $a = 10$ allora

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,, \quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,, \quad \log_a(x^b) = b\log_a(x)\,.$$

Scriviamo $54 = 2 \cdot 3^3$. Ma allora

$$\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(54) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2 \cdot 3^3) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11).$$

Conclusione: $\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11)$.

**Esercizio 12.** Consideriamo la funzione $f(x) = 4x + 3$, scritta anche come $y = 4x + 3$, con dominio uguale a $\mathbb{R}$. Verificare che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Verificare che è ben definita la funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e determinarla esplicitamente.
*Soluzione vista in dettaglio in classe.*

**Esercizio 13.** Sia $g(x) = \frac{\sqrt{|\cos x|}}{2}$ e $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Determinare $g \circ f$.
*Soluzione vista in dettaglio in classe.*