Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2020-21.
Istituzioni di Matematica. Canale 2.
Prof. Paolo Piazza
Compito a casa del 5/11/20. Soluzione.

Esercizio 1. *Sia* $a \neq 1$. *Calcolare*

$$\log_a(1)\,, \quad \log_a(a)\,, \quad \log_a(a^2)\,, \quad \log_a(\sqrt{a})\,.$$

Soluzione. Ricordiamo che $\log_a(x)$ è l'esponente che bisogna dare ad a per ottenere x. Dato che vale sempre $a^{\mathbf{0}} = 1$ concludiamo che $\log_a(1) = 0$. Analogamente, dato che $a^1 = a$ concludiamo che $\log_a(a) = 1$. Infine $\log_a(a^2) = 2$ dato che 2 è l'esponente che occorre dare ad a per ottenere a^2. È anche chiaro a questo punto che $\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\log_2(\frac{1}{16})\,, \quad 2^{\log_2(512)}\,, \quad \log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

Soluzione. Dato che $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ si ha, chiaramente, $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$; infatti -4 è l'esponente che occorre dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$. Dato che per la definizione stessa di logaritmo si ha

$$\forall x \in (0, \infty) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

è chiaro che $2^{\log_2(512)} = 512$.
Per calcolare

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = ((2^{-1}))^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Ci domandiamo qual è l'esponente che bisogna dare a $2^{\frac{1}{2}}$ per ottenere $2^{-\frac{1}{5}}$; tale esponente è $-\frac{2}{5}$. Infatti

$$(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})} = 2^{-\frac{1}{5}}\,.$$

Esercizio 4. *Determinare* $x \in (0, +\infty)$ *tale che* $\log_4(x) = 2$. *Ripetere l'esercizio per* $\log_7(x) = -2$.
Soluzione. Basta applicare la definizione: $\log_4(x)$ è l'esponente che occorre dare a 4 per ottenere x: quindi $4^{\log_4(x)} = x$; ma ci viene data l'informazione che $\log_4(x) = 2$ e concludiamo allora che $x = 4^2 = 16$. Analogamente: $7^{\log_7(x)} = x$ e dato che ci viene data l'informazione che $\log_7(x) = -2$ concludiamo che $x = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$.

Esecizio 5. Determinare l'insieme di definizione (o dominio) della seguenti funzione:

$$f(x) = \log_{10}\left(1 - |\frac{x}{2-3x}|\right).$$

Soluzione. Per definizione di logaritmo dobbiamo determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 - |\frac{x}{2-3x}| > 0\,,$$

e cioè tali che $|2-3x| > |x|$. Inoltre dobbiamo porre $|2-3x| \neq 0$ a causa del denominatore. Otteniamo 4 sistemi; quindi $|2-3x| > |x|$ e $|2-3x| \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x > 0 \\ 2-3x > x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x > 0 \\ 2-3x > -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) > -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) > x \end{cases}$$

dove utilizziamo *o* invece di *oppure*. Risolvendo si ottiene

$$|2-3x| > |x| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Riassumendo

$$\text{Dom}\left(\log_{10}(1 - |\frac{x}{2-3x}|)\right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Esecizio 6. Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni calcolare, se esistono, $f \circ g$ e $g \circ f$ e determinare l'insieme di definizione delle due composizioni:
(i) $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$;
(ii) $f(x) = \log x$, $g(x) = 1 + 8x^2$;
(iii) $f(x) = \log x$, $g(x) = -1 - 8x^2$;
(iv) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 3$;
(v) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Soluzione.
(i) $(f \circ g)(x) = e^{\cos x}$; $(g \circ f)(x) = \cos(e^x)$. Entrambe definite su tutto $\mathbb{R}$.
(ii) $(f \circ g)(x) = \log(1 + 8x^2)$, definita su tutto $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = 1 + 8(\log x)^2$, definita in $(0, \infty)$.
(iii) $(f \circ g)(x)$ non è definita, perché l'immagine di g non ha alcun elemento nell'insieme di definizione di f ; $(g \circ f)(x) = -1 - 8(\log x)^2$, definita in $(0, \infty)$.
(iv) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, definita su tutto $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = x + 3$, definita in $[0, \infty)$.
(v) $(f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{1-x^2})$, definita in $[-, 1, 1]$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \equiv |\cos x|$, definita su tutto $\mathbb{R}$.
Esecizio 7 (di ripasso). Risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{2-x^2} > 2x - 1$.

Risposta: $x \in [-\sqrt{2}, 1]$.

Esecizio 8. Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:
(i) $\log(1 + \sin x)$;
(ii) $\log(\log x)$;
(iii) $(\sin x)^{\tan x}$ per $x \in [0, 2\pi]$ (il dominio sarà quindi un sottoinsieme di $[0, 2\pi]$).
Risposta:
(i) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(ii) $(1, \infty)$
(iii) $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$

Esecizio 9. Verificare che

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\delta + x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

e che

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| \leq \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -\delta + x_0 \leq x \leq x_0 + \delta\}$$

Disegnare nella retta reale l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - x_0| < \delta\}$ quando $x_0 = 3$ e $\delta = 2$ e quando $x_0 = 3$ e $\delta = 1/2$
Soluzione.
x è tale che $|x - x_0| < \delta$ se e solo se

$$\begin{cases} x - x_0 < \delta & \text{se } x \geq x_0 \\ -x + x_0 < \delta & \text{se } x \leq x_0 \end{cases}$$

E quindi x è tale che $|x - x_0| < \delta$ se e solo se
$x < x_0 + \delta$ quando $x_0 \leq x$ oppure $x_0 - \delta < x$ quando $x \leq x_0$. Questo è precisamente l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, -\delta + x_0 < x < x_0 + \delta\}.$$