

**Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2020-21.**  
**Istituzioni di Matematica. Canale 2.**  
**Prof. Paolo Piazza**  
**Compito a casa del 5/11/20**

**Esercizio 1.** Sia  $a \neq 1$ . Calcolare

$$\log_a(1), \quad \log_a(a), \quad \log_a(a^2), \quad \log_a(\sqrt{a}).$$

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\log_2\left(\frac{1}{16}\right), \quad 2^{\log_2(512)}, \quad \log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)$$

**Esercizio 3.** Determinare  $x \in (0, +\infty)$  tale che  $\log_4(x) = 2$ . Ripetere l'esercizio per  $\log_7(x) = -2$ .

**Esercizio 4.** Determinare l'insieme di definizione (o dominio) della seguenti funzione:

$$f(x) = \log_{10}\left(1 - \left|\frac{x}{2-3x}\right|\right).$$

**Esercizio 5.** Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni calcolare, se esistono,  $f \circ g$  e  $g \circ f$  e determinare l'insieme di definizione delle due composizioni:

- (i)  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \cos x$ ;
- (ii)  $f(x) = \log x$ ,  $g(x) = 1 + 8x^2$ ;
- (iii)  $f(x) = \log x$ ,  $g(x) = -1 - 8x^2$ ;
- (iv)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2 + 3$ ;
- (v)  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

**Esercizio 6 (di ripasso).** Risolvere la disequazione irrazionale  $\sqrt{2-x^2} > 2x - 1$ .

**Esercizio 7.** Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

- (i)  $\log(1 + \sin x)$ ;
- (ii)  $\log(\log x)$ ;
- (iii)  $(\sin x)^{\tan x}$  per  $x \in [0, 2\pi]$  (il dominio sarà quindi un sottoinsieme di  $[0, 2\pi]$ )

**Esercizio 8.** Verificare che

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\delta + x_0 < x < x_0 + \delta\}$$

e che

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \delta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\delta + x_0 \leq x \leq x_0 + \delta\}$$

Disegnare nella retta reale l'insieme  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$  quando  $x_0 = 3$  e  $\delta = 2$  e quando  $x_0 = 3$  e  $\delta = 1/2$ . Spiegare perché senza fare alcun conto possiamo affermare che

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 6| < 1\}$$

è uguale all'insieme vuoto.