Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2020-21.
Istituzioni di Matematica. Canale 2.
Prof. Paolo Piazza
Compito a casa del 12/11/20

Alcuni limiti notevoli

1. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n pari.

3. $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n dispari.

4. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

5. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

6. $\lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n pari.

7. $\lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n dispari.

8. $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

9. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

10. $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

11. $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

12. $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$

13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad$ dove $\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

14. $\lim_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty; \qquad \lim_{x\to0^+} \cot x = +\infty \quad$ dove $\quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

15. $\lim_{x\to\pm\infty} \text{arctan} x = \pm\dfrac{\pi}{2}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+x)}{x} = 1$
(segue dal limite precedente ponendo $y = \log(1+x)$).

19. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty\ \forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$; equivalentemente: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0\ \forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
(l'esponenziale con base $a > 1$ "vince" su qualsiasi potenza)

20. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(\lg x)^\alpha}{x^\beta} = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0$, equivalentemente: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^\beta}{(\lg x)^\alpha} = +\infty\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta > 0$
(il logaritmo naturale (e le sue potenze) "perde" con qualsiasi potenza positiva di x)

21. $\lim_{x\to 0+} x^\beta |\lg x|^\alpha = 0\ \forall \beta > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (segue dal precedente limite ponendo $y = \frac{1}{x}$);
più in generale si ha :
$\lim_{x\to 0} |x|^\beta |\lg |x||^\alpha = 0\ \forall \beta > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

22. Se $P(x) = a_p x^p + \cdots + a_0$ è un polinomio di grado p e $Q(x) = b_q x^q + \cdots + b_0$ è un polinomio di grado q allora $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q > p \\ a_p/b_q & \text{se} \quad q = p \\ +\infty & \text{se} \quad q < p \end{cases}$.

Utilizzando i limiti notevoli riportati qui sopra, calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + 2x^2}{x^5 + 10x^4}$

2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$
Suggerimento: moltiplicare e dividere per $2x$. Quanto vale $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x}$?

3) $\lim_{x\to +\infty} 5^x - x^4$
Suggerimento: cercate di mettere in evidenza 5^x....

4) $\lim_{x\to +\infty} \lg x - \sqrt{x}$
Suggerimento: cercate di mettere in evidenza $\sqrt{x}$ ....

5) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\lg \sqrt{x+1}}{x}$
Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi.....

6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\lg \sqrt{x+1}}{x}$
Suggerimento: utilizzare una nota proprietà dei logaritmi....

7) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\lg(x^2+1)}{2^x}$

8) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{1 - e^{2x}}$

9) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
Suggerimento: moltiplicare e dividere per un'opportuna espressione....

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{tg 2x}$

11) $\lim_{x\to +\infty} x\sin(\frac{1}{x})$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$
Suggerimento: moltiplicare e dividere per $(1+\cos x)$.