Istituzioni di Matematica, I modulo. Prof. Paolo Piazza.

Corso di Laurea in Scienze Naturali - a.a. 2020-2021.

Esercizio 1. Determinare dominio di definizione ed asintoti delle seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

(3) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$

(4) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(5) $f(x) = x \log x$

(6) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

(7) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

(8) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$

Soluzioni.

(1). La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è definita in $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale dato che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty \tag{1}$$

Infatti se $x > 1$ allora la quantità $1-x$, e quindi $\frac{1}{1-x}$, è negativa; se $x < 1$ allora la quantità $1-x$, e quindi $\frac{1}{1-x}$, è positiva. I limiti (1) dovrebbero ora essere chiari.
Notiamo poi che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-x} = 0$$

e quindi l'asse x, di equazione $y = 0$, è un asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

(2). La funzione $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ è definita quando $1 - x^2 \neq 0$, cioè quando $x \neq 1$ **e** $x \neq -1$. Concludiamo che $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Le rette $x = 1$ e $x = -1$ sono due asintoti verticali. Infatti

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty \tag{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1-x^2} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1-x^2} = -\infty \tag{3}$$

Per capire questi 4 limiti osserviamo che la funzione $1 - x^2$ è positiva per $-1 < x < 1$, cioè $x \in (-1, 1)$, negativa per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e si annulla per $x = 1$ e $x = -1$. In particolare $\frac{1}{1-x^2}$ è positiva per $x \in (-1, 1)$ e negativa per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Il limite (2) si spiega allora osservando che per $x > 1$, x vicino ad 1, la quantità $\frac{1}{1-x^2}$ è negativa e in valore assoluto molto grande, mentre per $x < 1$, x vicino a 1, la quantità $\frac{1}{1-x^2}$ è positiva e molto grande. Analogamente si ragiona per il limite (3).
Notiamo poi che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

e quindi la retta $y = 0$, cioè l'asse x, è un asintoto orizzontale.

(3) La funzione $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3+1}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dato che $x = -1$ è l'unica soluzione reale dell'equazione $x^3 + 1 = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^4+1}{x^3+1} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^4+1}{x^3+1} = -\infty \tag{4}$$

e quindi la retta $x = -1$ è un asintoto verticale. Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x^3+1} = \pm\infty \tag{5}$$

non ci sono asintoti orizzontali ma ci possono essere asintoti obliqui.
Per capire se esiste un asintoto obliquo a $+\infty$ dobbiamo innanzitutto calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{6}$$

cioè il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x(x^3+1)} \tag{7}$$

Se questo limite esiste ed è uguale a m allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo. Se questo limite non esiste oppure non è finito allora concludiamo che non c'è un asintoto obliquo a $+\infty$.
Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x(x^3+1)} = 1 \tag{8}$$

vediamo che può esistere un asintoto obliquo, e che se esiste esso sarà del tipo $y = x + q$.

Per completare la nostra analisi calcoliamo poi

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) \tag{9}$$

Se questo limite esiste ed è uguale a q allora $y = x + q$ sarà l' asintoto obliquo a $+\infty$. Se questo limite non esiste oppure non è finito allora concludiamo che non c'è un asintoto obliquo a $+\infty$. Essendo

$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{x^4+1}{(x^3+1)} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{(x^3+1)} = 0 \tag{10}$$

possiamo concludere che la retta $y = 1x + 0$, cioè la retta $y = x$, è un asintoto obliquo a $+\infty$. Analogamente si procede per $x \to -\infty$

(4) La funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ha come insieme di definizione tutto $\mathbb{R}$. Non ci sono asintoti verticali. Dato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali; ci possono essere asintoti obliqui. Concentriamoci su $+\infty$.
Calcoliamo allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{11}$$

e se questo limite esiste finito uguale a m, allora calcoliamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) \tag{12}$$

Se anche questo limite esiste finito ed uguale a q allora $y = mx + q$ sarà l'asintoto obliquo a $+\infty$
Passiamo ai conti: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1 \tag{13}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) \tag{14}$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+1}+x$ otteniamo che (14) è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$$

Quindi la retta $y = 1x+0$ e cioè la retta $y = x$ è un asintoto obliquo a $+\infty$. Consideriamo ora l'andamento per $x \to -\infty$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+1} = -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -1 \tag{15}$$

Si ha poi:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x)) = \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}+x) \tag{16}$$

Se $y = -x$ con $x > 0$ allora quest'ultimo limite è uguale a

$$\lim_{y\to+\infty}(\sqrt{1+y^2}-y) \tag{17}$$

e già sappiamo che questo limite è zero. Quindi $y = -x$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(5) Il Dominio di definizione è $\mathrm{Dom}(x\log x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. L'unico asintoto verticale può essere $x = 0$. Dato che [1] $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ vediamo che non ci sono asintoti verticali. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} x\log x = +\infty$, quindi non ci sono asintoti orizzontali. Vediamo se c' è un asintoto obliquo a $+\infty$. Cominciamo con il calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$$

e quindi non c' è asintoto obliquo a $+\infty$.

(6) La funzione $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ è definita per $x \neq 2$, quindi $\mathrm{Dom}\frac{x^2-3}{x-2} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Dato che

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{x-2} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x-2} = -\infty$$

concludiamo che la retta $x = 2$ è un asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x-2} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x-2} = -\infty$$

e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x} = 1$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x} = 1\,.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-3}{x-2}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+2x}{x-2} = 2$$

e analogamente

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2-3}{x-2}-x) = 2$$

Quindi la retta $y = 1x+2$, cioè la retta $y = x+2$, è un asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

(7) La funzione $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ è definita per $x \neq 1$. Quando $x \to 1^{\pm}$ allora $\frac{x^2}{1-x} \longrightarrow \mp\infty$. In particolare $x = 1$ è un asintoto verticale. La retta $y = -x-1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$

[1] è un limite notevole ....

(8) La funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$ è definita in $(-\infty,-1) \cup 0 \cup [1,+\infty)$. Ha asintoto verticale $x = -1$. Ha asintoto obliquo $y = x - 1$ a $+\infty$ e asintoto obliquo $y = 1 - x$ a $-\infty$.

Esercizio 2. Seguendo lo schema spiegato a lezione, studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x}\,.$$

Soluzione. Abbiamo visto a lezione una soluzione dettagliata di questo esercizio e riporto quindi solo le risposte:

- $\mathrm{Dom}(f) = (0,+\infty)$;
- la retta $x = 0$, e cioè l'asse y, è asintoto verticale dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;
- la funzione incontra l'asse x, che ha equazione $y = 0$, nel punto $(1,0)$; non ci sono simmetrie o periodicità;
- la funzione è crescente in $(0,e)$ e descrescente in $(e,+\infty)$; si ha $f'(e) = 0$ e quindi $x = e$ è punto di massimo relativo; non ci sono punti di minimo relativo;
- la funzione è concava in $(0,e^{3/2})$ e convessa in $(e^{3/2},+\infty)$; il punto $e^{3/2}$ è un flesso.