Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2022-23.
Istituzioni di Matematica. Canale 2.
Prof. Paolo Piazza
Compito a casa del 27/10/22. Soluzione di alcuni esercizi.

Esecizio 3 (di ripasso). Determinare l'insieme di definizione (o dominio naturale o, semplicemente, dominio) della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x-6}}\,.$$

Ripetere l'esercizio per

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad f(x) = \log_{10}\Big(1 - |\frac{x}{2-3x}|\Big).$$

Soluzione. Dobbiamo imporre che

$$\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$$

(perché la radice è definita solo per numeri non-negativi) e

$$x \neq 6$$

(perché non ha senso dividere per 0).
Assumiano subito che $x \neq 6$.
Una frazione è maggiore o uguale a zero quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi oppure entrambi negativi (ma ovviamente il denominatore non si deve annullare). Quindi

$$\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ (x-6) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ (x-6) < 0 \end{cases}$$

Studiamo allora il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore: la disequazione $x^2+3x-4 \geq 0$ l' abbiamo già risolta; sappiamo che essa è soddisfatta per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$. Quindi il numeratore è ≥ 0 in $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ ed è invece < 0 in $(-4, 1)$. Il denominatore è strettamente positivo per $x \in (6, \infty)$, si annulla per $x = 6$ (valore che va quindi escluso perché 0 non è ammesso al denominatore) ed è strettamente negativo per $x < 6$.
Conclusione: $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$ per $x \in [-4, 1] \cup (6, \infty)$.

Continuiamo con le altre due funzioni.
La prima funzione è definita per tutti gli x tali che $\cos^2 x \neq 0$. Cerchiamo allora gli x tali che $\cos^2 x = 0$ ed escludiamoli dal dominio. In generale, per un numero reale a si ha che $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Basta allora cercare gli x tali che $\cos x = 0$. Sappiamo che questi sono i valori

$$\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Conclusione:

$$\mathrm{Dom}(\frac{1}{\cos^2 x}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Passiamo alla terza funzione; per definizione di logaritmo dobbiamo determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 - |\frac{x}{2-3x}| > 0\,,$$

e cioè tali che $|2-3x| > |x|$. L'ultima disequazione si esplicita in 4 sistemini; quindi $|2-3x| > |x|$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases}$$

dove utilizziamo *o* invece di *oppure*. Risolvendo si ottiene

$$|2-3x| > |x| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Riassumendo

$$\text{Dom}\left(\log_{10}(1 - |\frac{x}{2-3x}|)\right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Esercizio 4 (di ripasso). Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni calcolare, se esistono, $f \circ g$ e $g \circ f$ e determinare l'insieme di definizione delle due composizioni:
(i) $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$;
(ii) $f(x) = \log x$, $g(x) = 1 + 8x^2$;
(iii) $f(x) = \log x$, $g(x) = -1 - 8x^2$;
(iv) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 3$;
(v) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
Soluzione.
(i) $(f \circ g)(x) = e^{\cos x}$; $(g \circ f)(x) = \cos(e^x)$. Entrambe definite su tutto $\mathbb{R}$.
(ii) $(f \circ g)(x) = \log(1 + 8x^2)$, definita su tutto $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = 1 + 8(\log x)^2$, definita in $(0, \infty)$.
(iii) $(f \circ g)(x)$ non è definita, perché l'immagine di g non ha alcun elemento nell'insieme di definizione di f ; $(g \circ f)(x) = -1 - 8(\log x)^2$, definita in $(0, \infty)$.
(iv) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, definita su tutto $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = x + 3$, definita in $[0, \infty)$.
(v) $(f \circ g)(x) = \sin(\sqrt{1 - x^2})$, definita in $[-, 1, 1]$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \equiv |\cos x|$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esecizio 6. Determinare, se esistono, le soluzioni delle equazioni

$$|x + 10| = 3\,, \quad |x + 5| = -2\,, \quad x = 4 - 3|x|\,.$$

Soluzione. La seconda equazione non ha soluzione perché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a 0. Determiniamo le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$. Per definizione $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ne segue che l'equazione può essere riscritta come segue

$$x = 4 - 3x \text{ se } x \geq 0\,, \quad x = 4 + 3x \text{ se } x < 0$$

La prima equazione ha soluzione $x = 1$ che è una soluzione accettabile dato che $1 > 0$.
La seconda equazione ha soluzione $x = -2$ che è anche accettabile dato che $-2 < 0$.
Conclusione: le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$sono $x = 1$, $x = -2$.
Determiniamo infine le soluzioni dell'equazione $|x+10| = 3$. Per definizione $|x+10|$ è uguale a $x+10$ se $x \geq -10$ ed è uguale a $-x-10$ se $x < -10$. Nel primo caso otteniamo $x+10 = 3$ e quindi $x = -7$ che è accettabile perché $-7 < -10$. Nel secondo caso otteniamo $-x - 10 = 3$ e cioè $x = -13$ che è anche accettabile perché $-13 < -10$. Conclusione: le soluzioni dell'equazione $|x + 10| = 3$ sono $x = -7$ e $x = -13$.

Esecizio 8. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificato il sistema

$$\begin{cases} |x| > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema utilizzando la definizione di modulo. Il sistema è soddisfatto $\Leftrightarrow$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x > 2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

Consideriamo il primo sistema: l'unica disequazione da studiare veramente è la terza. Potete applicare il metodo noto e scoprite che è soddisfatta per $x \in (-4, 0)$ (valori interni). Ma allora il primo sistema non è soddisfatto da alcun x (è ovvio che non ci sono x che sono simultaneamente in $(-4, 0)$

(e quindi negativi) e in $(2, \infty)$. In altre parole *non* esiste $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa *simultaneamente* le 3 disequazioni. Consideriamo il secondo sistema che è equivalente a

$$\begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases}$$

È chiaro che la soluzione è data da tutti gli $x \in (-4, -2)$. Conclusione: il sistema dato è soddisfatto da ogni $x \in (-4, -2)$.