Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2022-23.
Istituzioni di Matematica. Canale 2.
Prof. Paolo Piazza
Compito a casa del 28/10/20

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio di definizione uguale ad A (un sottoinsieme di $\mathbb{R}$).
Abbiamo dato la definizione **informale** di

$$\lim_{x \to P} f(x) = K$$

con $P \in \mathbb{R}^*$ e $Q \in \mathbb{R}^*$.
La abbiamo poi esplicitata in maniera rigorosa nei casi:
(1) $P \in \mathbb{R}$ e $K \in \mathbb{R}$ (con P un punto di accumulazione per A)
(2) $P \in \mathbb{R}$ e $K = \{+\infty\}$ (con P un punto di accumulazione per A)
(3) $P = \{+\infty\}$ e $K \in \mathbb{R}$ (quindi A è illimitato verso $+\infty$).
Rivedere queste definizioni in [G], p. 85 e 86, e modificarle in modo tale da trattare anche:
(2') $P \in \mathbb{R}$ e $K = \{-\infty\}$ (con P un punto di accumulazione per A)
(3') $P = \{-\infty\}$ e $K \in \mathbb{R}$ (quindi A è illimitato verso $-\infty$).

Esercizio 2. Esplicitare rigorosamente la definizione informale quando
(4.1) $P = \{+\infty\}$ e $K = \{+\infty\}$ (quindi A è illimitato verso $+\infty$)
(4.2) $P = \{+\infty\}$ e $K = \{-\infty\}$ (quindi A è illimitato verso $+\infty$)
(4.3) $P = \{-\infty\}$ e $K = \{+\infty\}$ (quindi A è illimitato verso $-\infty$)
(4.4) $P = \{-\infty\}$ e $K = \{-\infty\}$ (quindi A è illimitato verso $-\infty$)

Osservazione. Per (2') si veda [G] Definizione p. 85. Per (4.1) $\to$ (4.4) di veda [G], Definizione p. 87.

Esercizio 3. Sulla base dello studio dei grafici che trovate in [G] (e visti a lezione), convincetevi che si ha:

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n pari.

$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$, n dispari.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \log |x| = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \log |x| = -\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$