Dimostrazione. Sia y una soluzione dell'equazione differenziale. Dobbiamo dimostrare che esistono due costanti A, $B \in \mathbb{R}$ tali che $y = Ay_1 + By_2$. Facciamo alcune osservazioni preliminari.
1) Grazie al Teorema 4.23 sappiamo che per ogni A e $B \in \mathbb{R}$ la funzione $Ay_1 + By_2$ risolve l'equazione differenziale.
2) Per il Teorema 4.21, se riusciamo a dimostrare che per ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione esistono A e $B \in \mathbb{R}$ tali che $Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = y(x_0)$ e $Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = y'(x_0)$, allora $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ per ogni $x \in I$. Infatti avremmo che y e $Ay_1 + By_2$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy e quindi, per l'unicità della soluzione, devono coincidere.

Quindi il risultato è dimostrato se si può risolvere il sistema lineare di due equazioni nelle due incognite A e B

$$\begin{cases} Av_0 + Bz_0 = y(x_0) \\ Av_1 + Bz_1 = y'(x_0)\,. \end{cases} \tag{4.20}$$

Per il Teorema di Cramer (Teorema 7.66 del primo volume), il sistema ammette un'unica soluzione (A, B) per ogni scelta di $y(x_0)$ e $y'(x_0)$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} v_0 & z_0 \\ v_1 & z_1 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Per ipotesi noi sappiamo che i vettori (v_0, v_1) e (z_0, z_1) sono linearmente indipendenti e quindi (per il Corollario 7.62 del primo volume) il determinante della matrice due per due con tali vettori come vettori colonna è effettivamente diverso da zero. Quindi per ogni funzione y, soluzione dell'equazione, è possibile trovare due costanti A e B che verificano il sistema (4.20) e di conseguenza, per quanto detto prima, risulta $y = Ay_0 + By_1$. $\square$

A questo punto sappiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale (4.18) è l'insieme delle combinazioni lineari di due soluzioni particolari corrispondenti a dati iniziali linearmente indipendenti. Si tratta ora di determinare la forma esplicita di queste due funzioni. Per fare questo ci dovremo limitare al caso in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono costanti. D'ora in poi considereremo quindi equazioni del tipo

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0\,,} \qquad (a \neq 0) \tag{4.21}$$

con a, b e $c \in \mathbb{R}$. Per il Teorema 4.21, le soluzioni di questa equazione saranno funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Se $a = 0$, abbiamo un'equazione lineare omogenea del primo ordine e sappiamo che le soluzioni sono $y(x) = Ae^{-\frac{c}{b}x}$, $A \in \mathbb{R}$. Proviamo a vedere se anche per le equazioni del secondo ordine (ossia quando $a \neq 0$) ci sono soluzioni di tipo $y(x) = e^{\lambda x}$. Poiché

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}\,, \qquad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}\,,$$

se calcoliamo $ay'' + by' + cy$ troviamo che

$$ay'' + by' + cy = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x}\,.$$

Quindi la funzione $y(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione dell'equazione differenziale se e solo se λ è soluzione dell'equazione di secondo grado

$$\boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.} \qquad \binom{\text{equazione}}{\text{caratteristica}} \tag{4.22}$$

L'equazione (4.22) prende il nome di **equazione caratteristica** dell'equazione differenziale (4.21). Sappiamo bene che a questo punto ci troviamo davanti a tre possibilità, che dipendono dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ dell'equazione caratteristica.

Primo caso: $\Delta > 0$. Siano λ_1 e λ_2 le due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica. Allora le funzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione differenziale (4.21). Inoltre si ha che

$$y_1(0) = y_2(0) = 1\,, \quad y_1'(0) = \lambda_1\,, \quad y_2'(0) = \lambda_2\,,$$

e, poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y_1 e y_2 hanno condizioni iniziali in $x = 0$ linearmente indipendenti. Quindi, per il Teorema 4.24, l'integrale generale dell'equazione differenziale (4.21) è

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{integrale generale}\\ \text{di (4.21) per } \Delta > 0\end{array}\right)$$

Secondo caso: $\Delta = 0$. Abbiamo una sola soluzione reale $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ dell'equazione caratteristica e quindi siamo in grado di determinare una sola soluzione di tipo esponenziale $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$. In questo caso però si verifica facilmente che anche la funzione $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ è soluzione. Infatti si ha

$$y_2'(x) = (1 + \lambda_1 x)e^{\lambda_1 x}\,, \qquad y_2''(x) = (2\lambda_1 + \lambda_1^2 x)e^{\lambda_1 x}\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= [a(2\lambda_1 + \lambda_1^2 x) + b(1 + \lambda_1 x) + cx]e^{\lambda_1 x} = \\ &= [(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)x + (2\lambda_1 a + b)]e^{\lambda_1 x} = 0\,, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che λ_1 è soluzione dell'equazione caratteristica e che, in questo caso, $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ e quindi $2\lambda_1 a + b = 0$. Verifichiamo che le condizioni iniziali in $x = 0$ di y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti: si ha $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, \lambda_1)$ e $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, 1)$. Quindi, per il Teorema 4.24, l'integrale generale dell'equazione differenziale (4.21) è

$$\boxed{y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{integrale generale}\\ \text{di (4.21) per } \Delta = 0\end{array}\right)$$

Terzo caso: $\Delta < 0$. Non abbiamo nessuna soluzione reale dell'equazione caratteristica e quindi nessuna soluzione di tipo esponenziale dell'equazione differenziale. In questo caso le soluzioni y_1 e y_2 che generano tutto l'integrale generale sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,, \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,,$$

con

$$\alpha = -\frac{b}{2a}\,, \qquad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,.$$

Verifichiamo che y_1 e y_2 risolvono l'equazione. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= [\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\
y_1''(x) &= [(\alpha^2 - \beta^2)\cos(\beta x) - 2\alpha\beta\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\
y_2'(x) &= [\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)]e^{\alpha x}\\
y_2''(x) &= [(\alpha^2 - \beta^2)\sin(\beta x) + 2\alpha\beta\cos(\beta x)]e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
ay_1'' + by_1' + cy_1 &= [(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\cos(\beta x) - (2a\alpha\beta + b\beta)\sin(\beta x)]e^{\alpha x}\\
ay_2'' + by_2' + cy_2 &= [(a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c)\sin(\beta x) + (2a\alpha\beta + b\beta)\cos(\beta x)]e^{\alpha x}\,.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di α e β segue che

$$\begin{aligned}
a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac - b^2}{4a}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0\\
2a\alpha\beta + b\beta &= -b\beta + b\beta = 0\,,
\end{aligned}$$

e quindi y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione. Inoltre i dati iniziali in $x = 0$ di y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti. Infatti si ha $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, \alpha)$ e $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, \beta)$. Quindi, per il Teorema 4.24, l'integrale generale dell'equazione differenziale (4.21) è

$$\boxed{y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{integrale generale}\\ \text{di (4.21) per } \Delta < 0\end{array}\right)$$

Esempio 4.25. Abbiamo visto che l'equazione differenziale del moto di un oscillatore libero è

$$mx'' + kx = 0$$

dove $m > 0$ è la massa del corpo e $k > 0$ è la costante elastica della molla. L'equazione caratteristica associata è

$$m\lambda^2 + k = 0\,,$$

che non ammette soluzioni reali. Ci troviamo quindi nel terzo caso considerato sopra e abbiamo che $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{k/m} = \omega$. Quindi l'integrale generale è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,.$$

Se invece consideriamo l'oscillatore smorzato, l'equazione del moto è

$$mx'' + hx' + kx = 0$$

e la sua equazione caratteristica determina gli zeri di un polinomio di secondo grado con discriminante $\Delta = h^2 - 4mk$, da cui si ricavano i tre casi per l'integrale generale visti nell'Esempio 4.12.

4.5 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti

Vogliamo ora considerare equazioni del tipo

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)\,,} \tag{4.23}$$

con a, b e c numeri reali (con $a \neq 0$) e f funzione continua. Iniziamo enunciando il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.

Teorema 4.26. *Se $a \neq 0$ ed f è una funzione continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni y_0 e v_0 in $\mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$

definita su tutto I.

Una volta stabilito che per ogni funzione continua f l'equazione (4.23) è risolubile, ci interessa determinarne l'integrale generale. La struttura dell'insieme delle soluzioni è descritta nel seguente teorema.

Teorema 4.27. *Siano y_1 e y_2 due soluzioni dell'equazione* (4.23). *Allora la funzione $y = y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione omogenea $ay'' + by' + cy = 0$, che chiameremo equazione omogenea associata alla* (4.23).

Dimostrazione. Il risultato è conseguenza della proprietà di linearità sia dell'operazione di derivazione che dell'equazione differenziale. Infatti si ha $y' = y_1' - y_2'$, $y'' = y_1'' - y_2''$ e
$ay'' + by' + cy = ay_1'' + by_1' + cy_1 - (ay_2'' + by_2' + cy_2) = f(x) - f(x) = 0$. □

Il teorema precedente ci dice che ogni soluzione dell'equazione (4.23) ha la forma

$$\boxed{y(x) = \varphi(x) + \overline{y}(x)\,,} \qquad \begin{pmatrix}\text{integrale generale}\\ \text{di (4.23)}\end{pmatrix}$$

dove $\varphi(x)$ è una particolare soluzione di (4.23) e $\overline{y}(x)$ appartiene all'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea (4.23) è completamente determinato se si conoscono

1) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

2) una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Il punto 1) è completamente risolto attraverso le tecniche descritte nel paragrafo precedente.
Il punto 2) è di non facile soluzione, in generale. Tuttavia in alcuni casi si può applicare quello che chiameremo **metodo di somiglianza**, cioè è possibile determinare una soluzione particolare $\varphi(x)$ che ha una forma simile a quella di $f(x)$.

***f* polinomio:** se $f(x)$ è un polinomio di grado n si può tentare di vedere se è possibile determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale che sia anch'essa un polinomio di grado n.

Ad esempio, determiniamo l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = x^2\,.$$

Per prima cosa dobbiamo determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni reali. Siamo nel terzo caso discusso nel paragrafo precedente, con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\overline{y}(x) = A\cos x + B\sin x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ (generico polinomio di secondo grado). Abbiamo $\varphi'(x) = 2ax+b$ e $\varphi''(x) = 2a$. Imponiamo che φ sia soluzione dell'equazione:

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2\,,$$

che è un'identità solo se

$$a = 1\,, \quad b = 0\,, \quad 2a + c = 0\,,$$

cioè per $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$. Quindi la soluzione particolare è $\varphi(x) = x^2 - 2$ e l'integrale generale è

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Proviamo ora a fare lo stesso con l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' = x^2 + 1\,. \tag{4.24}$$

Questa volta l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ che ha due soluzioni reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x) = A + Be^{3x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Come prima, cerchiamo la soluzione particolare della forma $\varphi(x) = ax^2+bx+c$. Affinché sia soddisfatta l'equazione dovrà essere

$$2a - 3(2ax + b) = x^2 + 1\,,$$

cosa che chiaramente non sarà mai verificata (abbiamo a sinistra un polinomio di primo grado e vorremmo che coincidesse con un polinomio di secondo grado).

Questa è una difficoltà di ordine generale che si incontra tutte le volte che nell'equazione differenziale non compare la funzione y, ma solo le sue derivate. Infatti, se f è un polinomio di grado k e si cerca una soluzione particolare φ che sia un polinomio di grado k, l'assenza del termine y nell'equazione fa in modo che a sinistra dell'uguale appaia sempre un polinomio di grado al più $k - 1$. In questo caso è quindi necessario cercare la soluzione particolare φ come un polinomio di grado $k + 1$.

Torniamo all'equazione (4.24) e proviamo a cercare φ della forma $\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ora abbiamo $\varphi'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $\varphi''(x) = 6ax + 2b$ e l'equazione sarà verificata se

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1\,,$$

che risulta essere un'identità se

$$-9a = 1\,, \quad 6a - 6b = 0\,, \quad 2b - 3c = 1\,,$$

ossia per $a = -1/9$, $b = -1/9$ e $c = -11/27$. Non abbiamo ottenuto nessuna condizione sulla costante d, che può essere scelta arbitrariamente, ad esempio $d = 0$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x) = A + Be^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

***f* esponenziale:** se abbiamo $f(x) = C_0 e^{\alpha x}$, $C_0 \in \mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma $\varphi(x) = C(x)e^{\alpha x}$ dove la funzione $C(x)$ va determinata attraverso l'equazione differenziale. Infatti, poiché

$$\varphi'(x) = C'(x)e^{\alpha x} + C(x)\alpha e^{\alpha x}$$
$$\varphi''(x) = C''(x)e^{\alpha x} + 2C'(x)\alpha e^{\alpha x} + C(x)\alpha^2 e^{\alpha x}\,,$$

affinché φ sia soluzione di

$$ay'' + by' + c = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

deve essere verificata l'identità

$$[a(C'' + 2\alpha C' + \alpha^2 C) + b(C' + \alpha C) + cC]e^{\alpha x} = C_0 e^{\alpha x}\,,$$

che può essere riscritta, dopo le dovute semplificazioni, come

$$aC'' + (2a\alpha + b)C' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)C = C_0\,.$$

Ora abbiamo tre possibilità:

1) α non è soluzione dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0$). In questo caso è sufficiente scegliere C costante ($C'(x) = C''(x) = 0$), $C = \frac{C_0}{a\alpha^2 + b\alpha + c}$.

2) α è soluzione semplice dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, ma $2a\alpha + b \neq 0$). In questo caso basta prendere $C = \frac{C_0}{a\alpha + b}x$, in modo da avere $C''(x) = 0$ e l'identità verificata.

3) α è soluzione doppia dell'equazione caratteristica (ossia $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ e $2a\alpha+b=0$). In questo caso deve essere verificata l'equazione $aC''=C_0$, quindi con una doppia integrazione si ottiene $C(x)=\frac{C_0}{a}\frac{x^2}{2}$.

Esempio 4.28. Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-2y'+y=3e^{-x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1\,. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2-2\lambda+1=0$, che è risolta solo da $\lambda=1$. Quindi siamo nel secondo caso descritto nel paragrafo precedente e l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$\overline{y}(x)=Ae^x+Bxe^x\,, \qquad A,B\in\mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la soluzione particolare. Poiché $\alpha=-1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, possiamo cercare la soluzione della forma $\varphi(x)=Ce^{-x}$ con C costante da determinare. Dal momento che $\varphi'(x)=-Ce^{-x}$ e $\varphi''(x)=Ce^{-x}$, imponendo che φ risolva l'equazione otteniamo $C+2C+C=3$, quindi $C=3/4$ e l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$y(x)=Ae^x+Bxe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

Ora (e, attenzione, solo ora) possiamo imporre le condizioni iniziali:

$$\begin{gathered} y(0)=A+\frac{3}{4}=0 \\ y'(x)=Ae^x+Be^x+Bxe^x-\frac{3}{4}e^{-x} \quad\Longrightarrow\quad y'(0)=A+B-\frac{3}{4}=1 \end{gathered}$$

da cui si ottiene che $A=-\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{2}$ e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x)=-\frac{3}{4}e^x+\frac{5}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^{-x}\,.$$

***f* trigonometrica:** se abbiamo $f(x) = C_0 \cos(\alpha x)$ oppure $f(x) = C_0 \sin(\alpha x)$ $C_0 \in \mathbb{R}$, possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$\varphi(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)\,,$$

dove le costanti C_1 e C_2 vanno determinate attraverso l'equazione differenziale. Se, ad esempio, vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = -\sin(3x)\,,$$

come sempre prima determiniamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata che risulta essere

$$\overline{y}(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Per determinare la soluzione particolare, proviamo con $\varphi(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$. Abbiamo che

$$\varphi'(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)\,, \quad \varphi''(x) = -9C_1 \cos(3x) - 9C_2 \sin(3x)\,,$$

e quindi, affinché l'equazione sia verificata, dovrà essere

$$(-9C_1 - 6C_2 - 3C_1) \cos(3x) + (-9C_2 + 6C_1 - 3C_2) \sin(3x) = -\sin(3x)\,,$$

ossia

$$-12C_1 - 6C_2 = 0\,, \qquad -12C_2 + 6C_1 = -1\,,$$

da cui si ricava $C_1 = -\frac{1}{30}$ e $C_2 = \frac{1}{15}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione differenziale di partenza è

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{30} \cos(3x) + \frac{1}{15} \sin(3x)\,, \qquad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Facciamo notare esplicitamente che, se avessimo cercato una soluzione del tipo $\varphi(x) = C_1 \sin(3x)$ (ossia simile al termine $f(x)$) non la avremmo trovata. Questo perché, mentre nei due casi precedenti (polinomi ed esponenziali) avevamo funzioni che, dopo una o più derivazioni mantenevano la stessa struttura (qualsiasi derivata di un polinomio è un polinomio e qualsiasi derivata di un esponenziale è un esponenziale), in questo caso se si parte da una funzione trigonometrica (diciamo il seno) dopo una derivazione otteniamo l'altra (ossia il coseno). Quindi in questo caso il metodo di somiglianza può funzionare a patto di cercare soluzioni che siano combinazioni lineari di seno e coseno. Può tuttavia succedere che non sia possibile trovare una soluzione particolare della forma proposta (si veda l'Esempio 4.29), per motivi simili a quelli esposti nei casi precedenti.